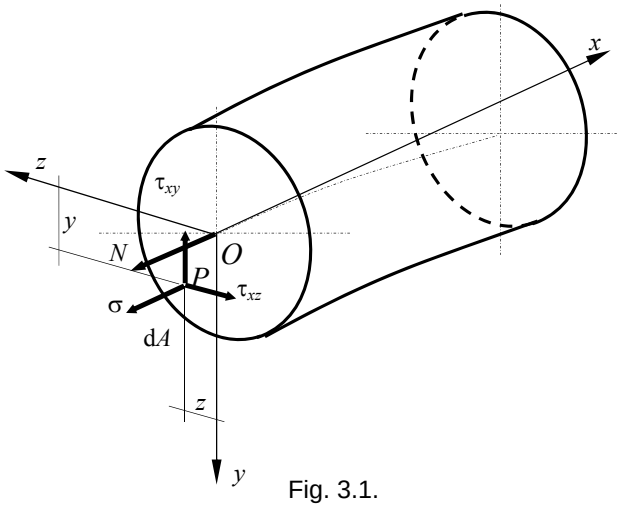


Fig. 3.1.

fiind rezultatul intersecției dintre suprafața exterioară a barei şi două secțiuni drepte, infinit apropiate. Între cele două curbe directoare se trasează o serie de generatoare foarte apropiate între ele, care pot fi considerate a fi segmente de lungime dx din fibrele situate la suprafața exterioară a barei (fig. 3.2, *a*).

După ce bara este solicitată de către o forță exterioară care generează în ea efortul secțional constant N (fig. 3.2, *b*), se constată următoarele:

– toate generatoarele trasate la suprafața barei au deplasări şi deformații liniare egale, ceea ce conduce la concluzia că, la exteriorul barei, segmentele de fibre de lungime dx s-au alungit toate cu aceeaşi cantitate Δdx_0 (indicele 0 precizează că se face referire la fibrele de la exteriorul barei);

– unghiurile dintre generatoare şi curbele directoare, inițial drepte, rămân drepte şi după solicitare.

Rezultă că la exteriorul barei:

$$\varepsilon_0 = \frac{\Delta dx_0}{dx} = \text{ct.}\ ;\ \gamma_0 = 0. \tag{3.2}$$

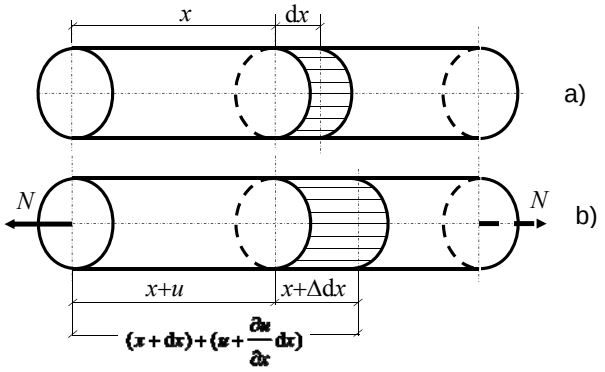


Fig.3.2.

În baza ipotezei secțiunilor plane, toate segmentele de fibre cuprinse între cele două secțiuni imaginare au aceleaşi deplasări şi deformații. Rezultă că în toate punctele de pe secțiunea dreaptă a barei supusă la întindere sau compresiune simplă, se dezvoltă aceeaşi stare de deformații caracterizată de:

$$\varepsilon = \frac{\Delta \mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \text{ct.}\ ;\ \gamma = 0. \tag{3.3}$$

Aspectul fizic al problemei este dat de relațiile:

$$\sigma = E\cdot\varepsilon\ ;\ \tau = G\cdot\gamma \tag{3.4}$$

care exprimă legea simplă a lui Hooke.

Din combinarea aspectului fizic cu cel geometric, relațiile (3.3) şi (3.4), se poate deduce:

$$\sigma = E\cdot\varepsilon = \text{ct.}\ ;\ \tau = G\cdot\gamma = 0. \tag{3.5}$$

Din a doua relație (3.5) rezultă că:

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0, \tag{3.6}$$

oricare ar fi direcțiile y şi z din planul secțiunii drepte.

Introducând aceste valori în relațiile (3.1) se constată că a doua, a treia şi a patra egalitate se verifică identic, iar din ultimele două relații rezultă:

$$\int_{(A)} y\mathrm{d}A = 0\ ;\ \int_{(A)} z\mathrm{d}A = 0\,. \tag{3.7}$$

Aceste două egalități, care exprimă momentele statice ale secțiunii barei în raport cu axele y şi z, se verifică deoarece, se cunoaşte de la mecanică, momentele statice ale unei suprafețe în raport cu axe ce trec prin centrul de greutate al acesteia sunt nule.

Fig. 3.3.

Din prima relație (3.1), cunoscând (3.5), se determină valoarea efortului axial N:

$$N = E\cdot\varepsilon\int_{(A)}\mathrm{d}A = E\cdot\varepsilon\cdot A \Rightarrow E\cdot\varepsilon = \frac{N}{A}$$

care, în baza primei relații (3.5) conduce la:

$$\sigma = \frac{N}{A}\,. \tag{3.8}$$

Rezultă că pentru o bară solicitată la întindere sau compresiune simplă, în orice secțiune dreaptă a acesteia, tensiunea σ se distribuie uniform în toate punctele şi valoarea ei se determină cu relația (3.8) (fig. 3.3), iar tensiunile tangențiale sunt nule – vezi relația (3.6).

3.1.2. Calculul de rezistenţă

Deoarece la barele drepte solicitate la întindere sau compresiune simplă, starea de tensiuni este la fel de periculoasă în toate punctele de pe secţiunea dreaptă, tensiunea σ având o distribuţie constantă conform relaţiei (3.8), condiţia de rezistenţă se aplică în secţiunea unde efortul N are valoarea maximă:

$$\sigma_{\max} = \frac{|N_{\max}|}{A} \leq \sigma_a \,. \tag{3.9}$$

Relaţia (3.9) poate fi folosită pentru:

– *dimensionarea* barei atunci când se cunoaşte solicitarea, deci se cunosc valoarea lui N, şi materialul din care aceasta este confecţionată, adică rezistenţa admisibilă σ_a:

$$A_{nec} = \frac{|N_{\max}|}{\sigma_a} = A_{dim} \,, \tag{3.10}$$

unde A_{nec} reprezintă aria necesară a secţiunii barei pentru ca ea să reziste la efortul axial $N_{\max}$, iar A_{dim} este aria secţiunii barei în funcţie de dimensiunile acesteia;

– *verificarea* dimensiunilor secţiunii barei atunci când se cunosc solicitarea, forma şi dimensiunile secţiunii barei, precum şi rezistenţa admisibilă:

$$\sigma_{\max}^{ef} = \frac{|N_{\max}|}{A_n^{ef}} \leq \sigma_a \tag{3.11}$$

unde A_n^{ef} reprezintă aria efectivă a secţiunii nete a barei; verificarea barei se va face după fiecare dimensionare, ca măsură suplimentară de siguranţă în ceea ce priveşte corectitudinea calculelor;

– determinarea *efortului capabil*, adică a forţei maxime de solicitare corespunzătoare lui $N_{\max}$, atunci când se cunosc forma şi dimensiunile secţiunii barei, precum şi rezistenţa admisibilă:

$$F \leq N_{cap} = \sigma_a A_n^{ef} \,. \tag{3.12}$$

De reţinut este faptul că, atât valoarea lui $N_{\max}$ cât şi aria secţiunii nete A_n

trebuie luate în acelaşi punct de pe axa barei, adică în aceeaşi secţiune, care se presupune a fi periculoasă.

În general, aria secţiunii nete a barei este:

$$A_n = A_{br} - A_s,$$

A_{br} reprezentă aria secţiunii brute a barei, adică a secţiunii curente, iar A_s – aria slăbirilor, adică aria cumulată a acelor părţi din secţiune care se pierd datorită unor nevoi constructive, ca de exemplu prinderea barei de alte părţi ale construcţiei.

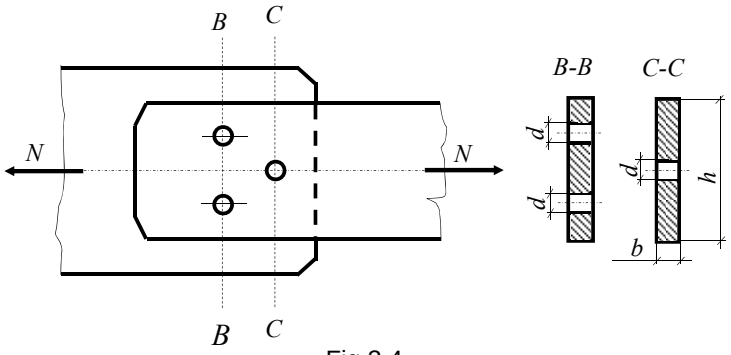


Fig.3.4.

În figura 3.4 este ilustrată prinderea a două platbande prin intermediul a trei nituri. Pentru cazul secţiunii *B–B* aria netă este: $A_{net}^{B-B} = bh - 2bd = b(h - 2d)$, iar pentru secţiunea *C–C*: $A_{net}^{C-C} = bh - bd = b(h - d)$. Deoarece aria slăbirilor A_s nu poate fi cunoscută la momentul dimensionării, ea depinzând de dimensiunile secţiunii curente, calculul de rezistenţă, în prima fază, va fi un calcul de predimensionare. Aceasta se va efectua folosind o relaţie de legătură între A_{br} şi A_n: de exemplu, pentru profile din S235 (OL37), $A_{br} = (1{,}10 \div 1{,}15)A_n$.

După predimensionarea secţiunii barei şi determinarea slăbirilor necesare se poate calcula aria secţiunii nete efective A_n^{ef} şi efectua verificarea acesteia cu relaţia (3.11).

Deoarece în condiţia de rezistenţă (3.9) intervine aria secţiunii nete, calculul barelor solicitate la întindere sau compresiune simplă poate fi efectuat complet numai odată cu calculul îmbinărilor acestora, care implică calculul elementelor de îmbinare (nituri, buloane, sudură).

3.1.3. Deformarea barelor drepte supuse la întindere sau compresiune

Ansamblul deplasărilor punctelor unei bare produse de solicitările la care este supusă, față de configurația barei nedeformate, defineşte forma deformată a acesteia.

În cazul unei bare solicitată la întindere sau compresiune simplă deformarea barei se produce numai axial (v. fig. 1.18, *b*) şi în baza relațiilor (1.30) şi (3.8) deformația specifică liniară este:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EA}. \tag{3.13}$$

În această situație, alungirea unei bare de lungime l supusă la întindere sau compresiune simplă este:

$$\Delta l = \int_{(l)} \varepsilon \cdot \mathrm{d}x = \int_{(l)} \frac{N}{EA} \mathrm{d}x. \tag{3.14}$$

Dacă efortul secțional N este constant pe toată lungimea l a barei şi dacă aceasta are secțiunea constantă atunci;

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}. \tag{3.15}$$

Sunt anumite structuri care nu trebuie să prezinte, sub solicitări, deformații mai mari decât cele admisibile. Pentru astfel de structuri, pe lângă condiția de rezistență (3.9) trebuie verificată şi *condiția de rigiditate*. În cazul unei bare solicitată la întindere sau compresiune simplă, această condiție de rigiditate are forma:

$$(\Delta l)_{\max} \leq (\Delta l)_a, \tag{3.16}$$

unde $(\Delta l)_{\max}$ se determină, după caz, cu relația (3.14) sau (3.15).

Dacă condiția de rezistență (3.9) este îndeplinită, iar condiția de rigiditate (3.16) nu, atunci din acesta se exprimă A_{nec} în funcție de $(\Delta l)_a$ şi se determină noi dimensiuni pentru secțiunea barei studiate. În această situație condiția de deformație (3.16) este mai restrictivă, condiția de rezistență (3.9) fiind îndeplinită acoperitor.

3.1.4. Încercarea la tracţiune

Încercarea la tracțiune se utilizează ca încercare de referință pentru evidențierea comportării materialelor şi produselor industriale supuse solicitărilor mecanice.

Condițiile şi modul de realizare a încercării la tracțiune şi caracteristicile mecanice care se pot determina din această încercare sunt reglementate, în funcție de tipul produsului şi natura materialului din care este fabricat, prin standarde. În tabelul 3.1 sunt prezentate aceste norme pentru cele mai utilizate tipuri de materiale şi produse industriale.

3.1.4.1. Curba caracteristică convenţională la tracţiune (CCCT)

În mod obişnuit (materiale metalice, lemn, materiale plastice etc.) încercarea la tracțiune se execută pe *epruvete* confecționate din materialul care se cercetează, având forma şi dimensiunile prezentate în figura 3.5. Aceste epruvete au o porțiune centrală, cu secțiunea circulară (epruvete circulare) sau dreptunghiulară (epruvete plate), calibrată (cu dimensiuni precise) şi două capete de prindere (pe maşina cu care se realizează încercarea) cu diverse configurații (cilindrice, conice, cilindrice filetate, plate, plate cu orificii pentru bolțuri etc.). Pe porțiunea calibrată a epruvetelor se trasează (înainte de încercare) două repere la distanța L_0; de regulă, distanța (lungimea) inițială între repere L_0 se alege în funcție de aria secțiunii transversale inițiale a porțiunii calibrate S_0, utilizând relația:

$$L_0 = k\sqrt{S_0}\ . \qquad (3.17)$$

Epruvetele astfel dimensionate se numesc *epruvete proporționale* (de obicei, se adoptă k = 5,65, ceea ce, pentru epruvetele rotunde, este echivalent cu $L_0 = 5d_0$).

Tabelul 3.1.

Tipul produsului şi materialul din care este confecționat	Standardul care reglementează condițiile şi modul de încercare la tracțiune
Materiale metalice	SR EN 10002
Cabluri de oțel	STAS 272
Țevi metalice	STAS 6718
Lemn şi produse din lemn	STAS 6291; STAS 336
Cauciuc	STAS 3888
Materiale plastice	STAS 6642

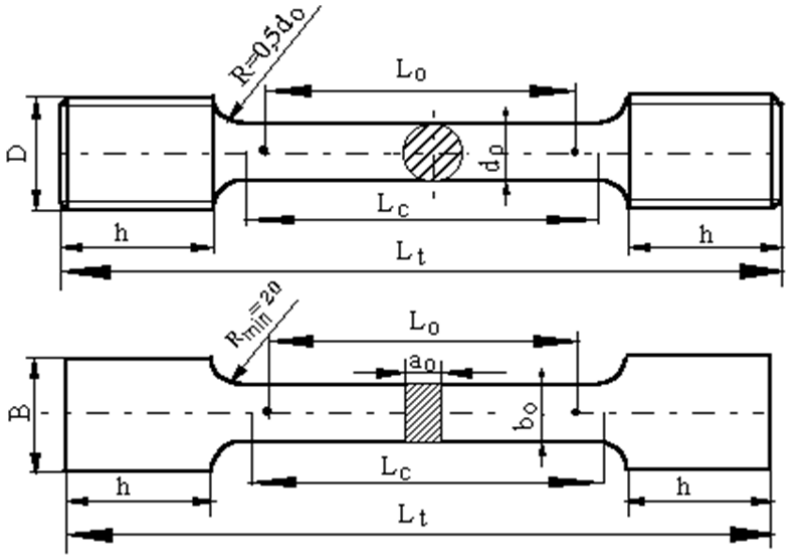


Fig. 3.5.

În timpul încercării la tracțiune, pe direcția axei longitudinale a unei epruvete realizate conform prescripțiilor anterior prezentate, se aplică o forță de tracțiune F, crescătoare ca intensitate, care produce deformarea progresivă şi, în final, ruperea epruvetei. Maşina folosită pentru realizarea încercării la tracțiune este prevăzută cu dispozitivele necesare pentru a măsura şi/sau înregistra (pe toată durata încercării) intensitatea forței aplicate F şi deformațiile liniare (lungirile sau extensiile) produse epruvetei $\Delta L = L - L_0$, L fiind distanța (lungimea) între reperele epruvetei la aplicarea forței de tracțiune cu intensitatea F. Prin măsurarea secvențială sau înregistrarea continuă a valorilor mărimilor F şi ΔL, se poate construi curba dependenței $F = g(\Delta L)$, numită *diagrama încercării la tracțiune* (*DIT*) sau *diagrama forță – alungire* (*extensie*).

Reprezentând în coordonate rectangulare variația tensiunii (convenționale) $\sigma = F/S_0$ în funcție de alungirea specifică $\varepsilon = \Delta L/L_0$ sau în funcție de alungirea procentuală $\varepsilon = (\Delta L/L_0)\cdot 100$, se obține o curbă $\sigma = f(\varepsilon)$, numită *curba caracteristică convențională la tracțiune* (*CCCT*) sau *curba caracteristică tensiune – deformație specifică* a materialului cercetat. De exemplu, în mod obişnuit, pentru materiale metalice *CCCT* se prezintă ca în figura 3.6, *a*, iar pentru materiale plastice ca în figura 3.6, *b*.

Cu ajutorul *CCCT* (construită pe baza încercării la tracțiune) se pot evidenția particularitățile comportării oricărui material metalic solicitat mecanic şi se pot defini o serie de caracteristici mecanice pe baza cărora se realizează calculele de proiectare şi/sau verificare a structurilor.

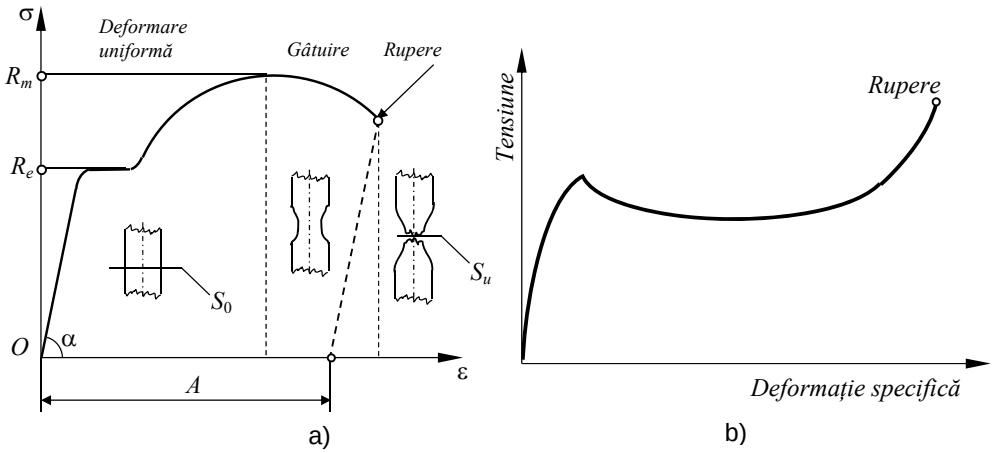


Fig. 3.6.

Există mai multe caracteristici care se definesc şi se determină în mod obişnuit:

a) *Limita de curgere aparentă* R_e (în N/mm^2); reprezintă *tensiunea la care se produce creşterea deformaţiilor specifice ale materialului la o tensiune constantă de solicitare* (tensiunea la care are loc fenomenul de curgere sau tensiunea corespunzătoare palierului înregistrat pe *CCCT* (v. fig. 3.6, *a*); această caracteristică se determină cu relaţia:

$$R_e = \frac{F_c}{A_0} = \frac{4F_c}{\pi d_0^2}, \tag{3.18}$$

în care F_c reprezintă valoarea forţei de solicitare a epruvetei la care apare fenomenul de curgere, în N; A_0 – aria secţiunii iniţiale a zonei calibrate a epruvetei, în mm^2.

În cazul materialelor la care nu se manifestă un fenomen de curgere aparentă, *CCCT* neprezentând variaţii bruşte ale pantei la instalarea procesului de deformare plastică, ci numai modificări continue, care evidenţiază creşterea ponderii deformaţiilor plastice şi apariţia fenomenului de ecruisare, se defineşte *limita de curgere convenţională* R_p. Ea reprezentând tensiunea la care alungirea specifică neproporţională (de natură plastică) ε_p atinge o valoare prescrisă; în mod curent limita de curgere convenţională se determină pentru o alungire procentuală neproporţională $\varepsilon_p = 0{,}2\%$ şi se notează $R_{p0,2}$.

b) *Rezistenţa la tracţiune* R_m (în N/mm^2); reprezintă *tensiunea corespunzătoare forţei maxime de solicitare a epruvetei înainte de rupere* F_{max} (v. fig. 3.6, *a*) şi se defineşte cu relaţia:

$$R_m = \frac{F_{\max}}{S_0} = \frac{4F_{\max}}{\pi d_0^2}. \tag{3.19}$$

Rezistența la tracțiune este o caracteristică mecanică importantă pentru foarte multe materiale şi produse industriale: materiale şi produse metalice, lemn şi produse din lemn, materiale plastice şi produse din materiale plastice, hârtie, materiale şi fibre textile etc.

c) *Alungirea procentuală după rupere* (sau *alungirea la rupere*) A (în %); se defineşte cu relația:

$$A = \frac{L_u - L_0}{L_0} \cdot 100, \tag{3.20}$$

în care L_u reprezintă lungimea ultimă a zonei calibrate, determinată prin aşezarea cap la cap a celor două părți ale epruvetei rupte la încercarea la tracțiune şi măsurarea distanței între cele două repere ale zonei calibrate a epruvetei.

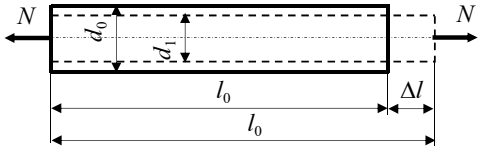


Fig. 3.7.

d) *Coeficientul de gâtuire* (*gâtuire* sau *stricțiune*), Z (în %); se defineşte cu relația:

$$Z = \frac{S_0 - S_u}{S_0} \cdot 100, \tag{3.21}$$

în care S_u reprezintă aria epruvetei în secțiunea de rupere (aria minimă); alungirea procentuală după rupere şi coeficientul de gâtuire sunt caracteristici mecanice utilizate mai ales în cazul materialelor metalice şi materialelor plastice.

3.1.4.2. Deformaţii transversale. Coeficientul lui Poisson

După cum s-a putut constata, în cazul epruvetelor utilizate la încercarea la tracțiune, concomitent cu alungirea epruvetei se produce şi o gâtuitură a acesteia. Rezultă că, dacă se consideră o bară de lungime l_0 şi diametru d_0 (fig. 3.7), pe lângă deformația specifică longitudinală, a cărei valoare este:

$$\varepsilon = \frac{l_1 - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_1},$$

apare şi o deformație specifică transversală care are valoarea:

$$\varepsilon_{tr} = \frac{d_1 - d_0}{d_0} = -\mu\varepsilon. \tag{3.22}$$

În relația anterioară $\mu \leq 0$ reprezintă *coeficientul lui Poisson* şi el constituie o constantă elastică a materialului.

Pentru a determina valoarea lui μ se defineşte deformația specifică volumică:

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V_1 - V_0}{V_0}.$$

Dacă se exprimâ, în relația anterioară, V_0 şi V_1 în funcție de d_0, respectiv d_1, şi dacă se ține seama că $l_1/l_0 = 1 + \varepsilon$ şi $\varepsilon_{tr} = d_1/d_0$, neglijând termeni ε^3 şi ε^2, ca valori foarte mici, deformația specifică volumică capătă expresia:

$$\varepsilon_v = (1 - \mu\varepsilon)^2(1 + \varepsilon) - 1 \cong \varepsilon(1 - 2\mu). \tag{3.23}$$

Pentru o bară solicitată la întindere, $\varepsilon_v \geq 0$, ceea ce face ca, din relația (3.23), $1 - 2\mu \geq 0$, adică $\mu \leq 0{,}5$. Rezultă că, $\mu \in [0,\ 0{,}5]$. Valoarea 0,5 corespunde corpurilor perfect elastice la care schimbarea formei se face fără variație de volum, iar valoarea zero corespunde plutei. Pentru oțelurile obişnuite $\mu = 0{,}3$.

3.1.4.3. Relaţia de izotropie

Aspectul fizic al problemelor rezistenței materialelor defineşte legătura dintre tensiuni şi deformații specifice. Pentru solicitarea de întindere monoaxială această legătură se exprimă, aşa cum s-a arătata în paragraful 1.8.3, sub forma (1.3) (legea simplă a lui Hooke). O relație similară se determină experimental şi în cazul solicitării de forfecare pură, solicitare la care apar numai tensiuni tangențiale τ şi deformații specifice γ:

$$\tau = G \cdot \gamma \tag{3.24}$$

coeficientul de proporționalitate G reprezintă modulul de elasticitate transversal, se exprimă în N/mm^2 şi reprezintă, ca şi E, o constantă elastică a materialului.

Între cele trei constante elastice μ, E şi G există egalitatea:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \tag{3.25}$$

care reprezintă *relația de izotropie*.

Pentru $\mu \in (0,\ 0{,}5)$ se obține $0{,}333 \leq G/E \leq 0{,}5$.

În tabelul 3.2 sunt date valorile constantelor E, G şi μ pentru unele materiale uzuale.

Tabelul 3.2.

Material	Modulul de elasticitate [N/mm^2]		Coeficientul
	E	G	μ
Oțel carbon	$(2 \ldots 2{,}1)\cdot 10^5$	$8{,}1\cdot 10^4$	0.24 ... 0,28
Oțel aliat	$2{,}1\cdot 10^5$	$8{,}1\cdot 10^4$	0,25 ... 0,30
Fontă cenuşie şi albă	$(1{,}15 \ldots 1{,}60)\cdot 10^5$	$4{,}5\cdot 10^4$	0,23 ... 0,27
Cupru laminat	$(1{,}1 \ldots 1{,}3)\cdot 10^5$	$4{,}9\cdot 10^4$	
Bronz fosforos	$1{,}15 \cdot 10^5$	$4{,}2\cdot 10^4$	0,32 ... 0,35
Alamă	$(0{,}9 \ldots 1{,}0)\cdot 10^5$	$(3{,}5 \ldots 3{,}7)\cdot 10^4$	0,32 ... 0,42
Aliaje de aluminiu	$(0{,}67 \ldots 0{,}71)\cdot 10^5$	$(2{,}4 \ldots 2{,}7)\cdot 10^4$	0,32 ... 0,36
Duraluminiu	$(0{,}70 \ldots 0{,}75)\cdot 10^5$	$(2{,}6 \ldots 2{,}7)\cdot 10^4$	-
Zidărie de cărămidă	$(2{,}5 \ldots 3) \cdot 10^3$	-	-
Lemn (în lungul fibrelor)	$(9 \ldots 1{,}2)\cdot 10^3$	450 ... 650	-
Lemn (perpendicular pe fibre)	$(0{,}4 \ldots 1{,}0) \cdot 10^3$	450 ... 650	-
Cauciuc	8	-	0,47
Celuloid	$(1.7 \ldots 2.0)\cdot 10^3$	600 ... 700	0,39

3.1.5. Sisteme static nedeterminate la întindere sau compresiune simplă

În multe cazuri forțele de legătură sau eforturile secționale nu pot fi determinate numai din ecuații de echilibru static deoarece sunt mai multe necunoscute – forțe de legătură sau eforturi – decât ecuații de echilibru. În astfel de cazuri sistemul de forțe este denumit *sistem static nedeterminat*, iar gradul de nedeterminare statică este dat de diferența între numărul necunoscutelor şi numărul ecuațiilor de echilibru care se pot scrie.

Rezolvarea problemelor static nedeterminatre la întindere sau compresiune simplă necesită cunoaşterea în prealabil a rigidităților *EA*. Alegând aprioric aceste rigidități, se pot determina tensiunile dar nu se pot obține soluții economice care să ducă la atingerea rezistenței admisibile în toate elementele construcției. Un sistem static nedeterminat economic se poate realiza prin aproximări succesive, modificând rigiditățile elementelor componente ale sistemului.

Rezolvarea sistemelor static nedeterminate se poate face aplicând *metoda compatibilității geometrice a deplasărilor*.

Această metodă constă în definirea ecuațiilor de echilibru static şi a unui număr de relații de compatibilitatea deplasărilor egal cu gradul de nedeterminare statică al sistemului. Ea este exemplificată în aplicațiile P.3.9 – P.3.13.

3.1.6. Tensiuni pe secţiuni înclinate la bare solicitate la întindere sau compresiune

În toate aspectele legate de solicitarea de întindere sau compresiune a barei drepte studiate până acum s-a considerat numai secţiunea normală pe axă, pe care s-a calculat tensiunea normală. Se pune problema determinării tensiunilor care apar pe o secţiune înclinată a unei bare solicitată la întindere sau compresiune, aşa cum este cea din figura 3.8. Pe secţiunea normală *BC* se dezvoltă tensiunea normală $\sigma_x = N/A$. Indicele *x* subliniază faptul că tensiunea normală are direcţia

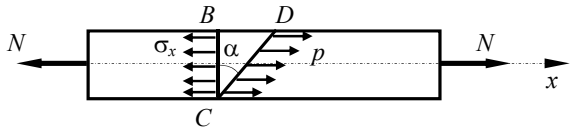


Fig. 3.8.

axei longitudinale *x* a barei. Se separă din bară un element de volum *BCD* cu grosimea egală cu unitatea (vezi fig. 3.9, *a*). Deoarece bara se consideră alcătuită din fibre care nu se apasă şi nu lunecă între ele în direcţie normală pe axa ei (v. paragr. 1.5.2), singurele tensiuni care apar sunt σ şi *p*. Elementul astfel considerat este în echilibru sub acţiunea forţelor generate de aceste tensiuni. Tensiunea totală *p* care acţionează pe secţiunea *CD* se poate descompune într-o componentă normală σ_α şi una tangenţială τ_α. Deoarece elementul considerat are dimensiuni foarte mici se poate aprecia că tensiunile sunt uniform repartizate pe cele două secţiuni, astfel încât forţele generate de acestea pot fi considerate ca forţe concentrate în centrele de greutate ale secţiunilor.

Forţele, provenite din înmulţirea tensiunilor cu ariile pe care ele se dezvoltă, sunt conţinute într-un singur plan, plan paralel cu planul *xBy*, ceea ce face ca pentru scrierea ecuaţiilor de echilibru să se folosească schema simplificată din figura 3.9, *b*.

Proiectând toate forţele pe direcţia lui σ_α, respectiv τ_α, se obţin ecuaţiile:

$$\sigma_\alpha \cdot 1 \cdot ds - \sigma_x \cdot 1 \cdot dy \cdot \cos\alpha = 0;$$

$$\tau_\alpha \cdot 1 \cdot ds + \sigma_x \cdot 1 \cdot dy \cdot \sin\alpha = 0$$

Din figura 3.9, *b* se poate constata uşor că $dy = ds \cdot \cos\alpha$ şi $dx = ds \cdot \sin\alpha$.

După înlocuirea lui dx şi dy în ecuaţiile de proiecţie anterioare, prin rezolvarea acestora, se obţin expresiile tensiunilor σ_α şi τ_α:

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{2}\sigma_x(1+\cos 2\alpha)$$
$$\tau_\alpha = -\frac{1}{2}\sigma_x \sin 2\alpha \qquad (3.26)$$

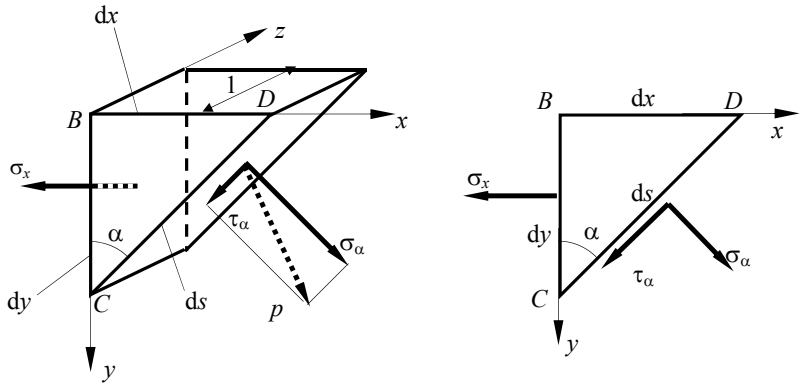


Fig. 3.9.

Pe baza relaţiilor (3.26), se constată că σ_α şi τ_α sunt funcţii continue de unghiul 2α. Astfel tensiunea normală σ_α este maximă pe secţiunea normală $\sigma_{\alpha=0} = \sigma_x$, iar într-un plan paralel cu axa barei, pentru care $\alpha = \pi/2$, ea are valoarea nulă $\sigma_{\alpha=\pi/2} = 0$. Tensiunea tangenţială este nulă pe secţiunea normală ($\alpha = 0$) şi pe un plan longitudinal ($\alpha = \pi/2$) şi maximă pe o secţiune înclinată la $\alpha = \pi/4$, având valoarea $\tau_{max} = \sigma_x/2$. Este de reţinut faptul că în planul în care tensiunea normală are valoarea maximă $\sigma_{max} = \sigma_x$ – planul secţiunii drepte – tensiunea tangenţială este nulă. În schimb pe planul în care tensiunea tangenţială are valoarea maximă, $\tau_{max} = \frac{\sigma_x}{2}$, tensiunea normală nu este nulă şi are valoarea $\sigma_{45^0} = \frac{\sigma_x}{2}$.

După cum s-a prezentat la încercarea la tracţiune, dacă forţa de tracţiune creşte mereu, bara se rupe. În cazul în care ruperea se produce ca urmare a unei valori maximale σ_{max} a tensiunii normale, ea are loc pe secţiunea dreaptă a barei. Dacă însă, ruperea se produce ca urmare a faptului ca tensiunea tangenţială a atins o valoare maximă, τ_{max}, limită, ea se produce pe o secţiune înclinată la 45°.

Probleme rezolvate

P.3.1. O bară de oțel cu secțiunea rotundă, d = 50 mm, este solicitată de un sistem de forțe axiale așa cum este arătat în figura 3.10, *a*. Să se calculeze alungirea totală a barei. Modulul de elasticitate longitudinal al oțelului este $2{,}05 \cdot 10^5$ N/mm^2.

Întreaga bară fiind în echilibru, rezultă că fiecare parte din ea se află în echilibru. Astfel se poate constata că segmentul *A-B* al barei se află în echilibru, în fiecare secțiune a ei acționând o forță axială de întindere $N_{A\text{-}B}$ = 10000 N după cum se poate observa în figura 3.10, *b*. Alungirea acestui segment de bară este:

$$\Delta l_{A-B} = \frac{N_{A-B} l_{A-B}}{EA} = \frac{10000 \cdot 2 \cdot 10^3}{2{,}05 \cdot 10^5 \cdot 1963{,}495} = 0{,}04968 \text{ mm}.$$

Segmentul *B-C* este solicitat de o forță axială de întindere $N_{B\text{-}C}$ = 10000 – 3000 = 7000 N, dacă se reduc forțele din stânga secțiunii *C*. Același rezultat se obține și când se reduc forțele din dreapta secțiunii *B*, $N_{B\text{-}C}$ = 9000 – 2000 = 7000 N. Alungirea acestui segment de bară este:

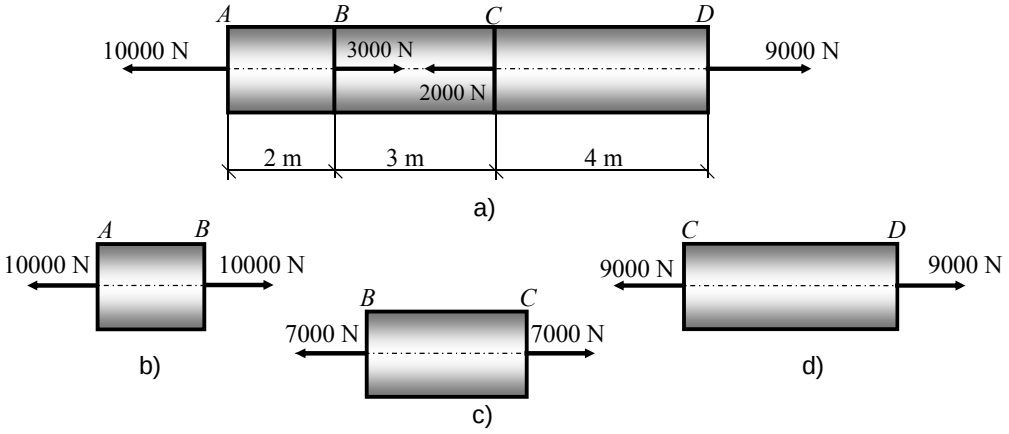


Fig. 3.10.

$$\Delta l_{B-C} = \frac{N_{B-C} l_{B-C}}{EA} = \frac{7000 \cdot 3 \cdot 10^3}{2{,}05 \cdot 10^5 \cdot 1963{,}495} = 0{,}05217 \text{ mm}.$$

În mod similar se procedează și pentru segmentul *C-D* care este solicitat de forța axială de întindere $N_{C\text{-}D}$ = 9000 N. Alungirea acestuia este:

$$\Delta l_{C-D} = \frac{N_{C-D} l_{C-D}}{EA} = \frac{9000 \cdot 4 \cdot 10^3}{2{,}05 \cdot 10^5 \cdot 1963{,}495} = 0{,}08944 \text{ mm}$$

Alungirea totală a barei este: Δl = 0,04968 + 0,05217 + 0,08944 = 0,19182 mm.

P.3.2. Să se determine alungirea totală a unei bare drepte cu secțiune constată, încastrată la partea superioară şi solicitată numai de greutatea proprie (fig. 3.11).

În fiecare secțiune a barei acționează un efort axial generat numai de greutatea proprie. Alungirea unui element de volum de grosime dx este:

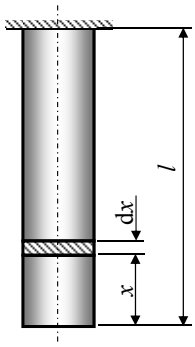


Fig. 3.11.

$$\Delta \mathrm{d}x = \varepsilon \mathrm{d}x = \frac{\sigma}{E}\mathrm{d}x = \frac{N}{EA}\mathrm{d}x = \frac{Ax\gamma}{EA}\mathrm{d}x$$

unde A este aria secțiunii barei şi γ greutatea specifică a materialului din care aceasta este confecționată (kg/m^3). Integrând pe toată lungimea l a barei se obține alungirea totală a acesteia:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{Ax\gamma}{EA}\mathrm{d}x = \frac{A\gamma}{EA}\frac{l^2}{2} = \frac{(A\gamma l)l}{2EA} = \frac{Gl}{2EA}$$

unde G este greutatea totală a barei. Se poate observa că alungirea totală produsă de greutatea barei este egală cu alungirea produsă de o încărcare egală cu jumătate din greutate barei aplicată la capetele acesteia.

P.3.3. Grinda cu zăbrele plană din figura 3.12 este solicitată de o forță de 120 kN. Materialul din care sunt confecționate barele este S235, iar coeficientul de siguranță ales este c = 1,5. Să se determine aria necesară pentru barele 1-3 şi 5-4.

Pentru a determina efortul axial $N_{1\text{-}3}$ din bara 1-3 este necesar să se determine mai întâi forțele de legătură din articulația nodului 1. Forța de legătura orizontală din articulația 1 este nulă

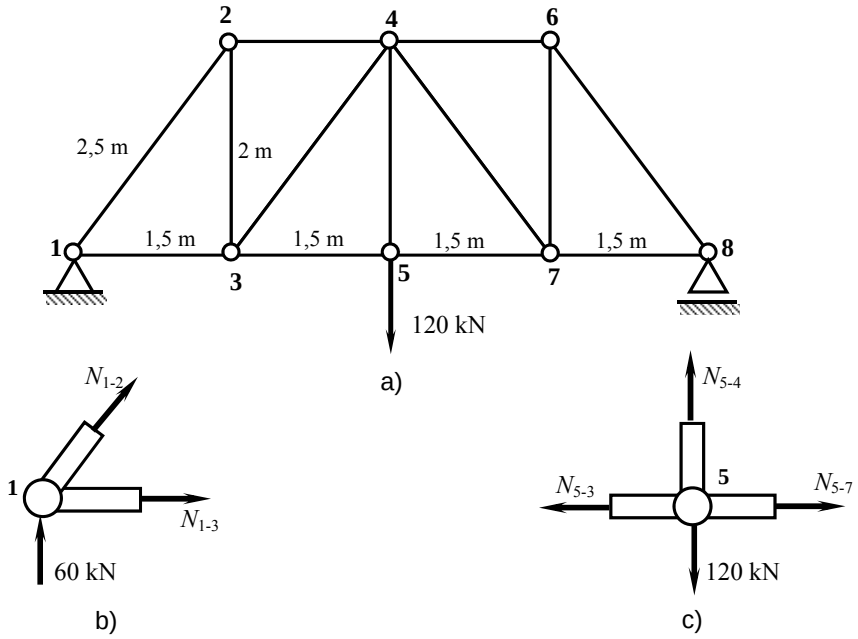


Fig. 3.12.

deoarece singura forță de încărcare este verticală. Forța de legătură verticală din 1, datorită simetriei va fi egală cu cea din 8 şi va avea valoarea 120/2 = 60 kN.

Efortul din bara 1-3 se determină din echilibrul nodului 1 (fig. 3.12, *b*):

$$\left(\sum F_V\right):\ 60 + N_{1-2}\frac{2}{2{,}5} = 0 \ \Rightarrow\ N_{1-2} = -75\text{kN}$$

$$\left(\sum F_O\right):\ N_{1-2}\frac{1{,}5}{2{,}5} + N_{1-3} = 0 \ \Rightarrow\ N_{1-3} = 45\text{kN}$$

Efortul din bara 5-4 se determină din echilibrul nodului 5:

$$\left(\sum F_V\right):\ N_{5-4} - 120 = 0 \Rightarrow N_{5-4} = 120\text{kN}$$

După cum se ştie, o bară articulată la capete preia numai eforturi axiale, în consecință barele 1-3 şi 5-4 sunt solicitate la întindere. Pentru determinarea ariilor necesare trebuie să se cunoască rezistența admisibilă a materialului din care acestea sunt confecționate. Ştiind că oțelul S235 are limita de elasticitate minimă R_e = 235 N/mm^2, rezistența admisibilă se determină cu relația:

$$\sigma_a = \frac{R_e}{c} = \frac{235}{1{,}5} = 156{,}7\ \text{N/mm}^2$$

Pentru bare solicitate la eforturi axiale tensiunea normală este da $\sigma = N / A$, relația (3.8), unde N este efortul axial, iar A aria secțiunii transversale a barei. Punând condiția ca tensiunea $\sigma = \sigma_a = 156{,}7\ \text{N/mm}^2$ se pot determina ariile necesare:

$$A_{1-3} = \frac{45000}{156{,}7} = 287{,}173\ \text{mm}^2 \quad \text{şi} \quad A_{5-4} = \frac{120000}{156{,}7} = 765{,}749\ \text{mm}^2$$

P.3.4. Două bare prismatice sunt solidar legate între ele şi supuse la o forță verticală de 500 kN aşa cum se vede în figura 3.13. Bara superioară este confecționată din oțel cu masa specifică 7850 kg/m^3, lungimea de 5 m şi aria secțiunii 6500 mm^2. Bara inferioară este confecționată din alamă cu masa specifică 8304 kg/m^3, lungimea 3 m şi aria secțiunii 4200 mm^2. Să se determine tensiunea maximă în fiecare bară.

Tensiunea maximă în bara de alamă se dezvoltă în secțiunea *B-B*. Aici, tensiunea normală verticală este produsă de încărcarea dată de forța de 500 kN şi de greutatea întregii bare situate sub secțiunea *B-B*.

Greutatea barei de alamă este $G_{al} = 4200\cdot10^{-6}\cdot3\cdot8304\cdot9{,}81$=1026,4 N. Tensiunea maximă este:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{500000 + 1026{,}4}{4200} = 119{,}29\ \text{N/mm}^2.$$

Tensiunea maximă în bara de oțel se dezvoltă în secțiunea *A-A*, secțiunea de susținere, deoarece aici acționează, pe lângă forța de 500 kN şi greutatea celor două bare. Greutatea barei de oțel este: $G_{ot} = 6500\cdot10^{-6}\cdot5\cdot7850\cdot9{,}81 = 2502{,}8$ N.

Tensiunea dezvoltată în secțiunea *A-A* este:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{500000 + 2052{,}8}{6500} = 77{,}3 \text{ N/mm}^2.$$

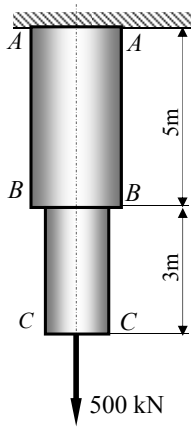


Fig. 3.13.

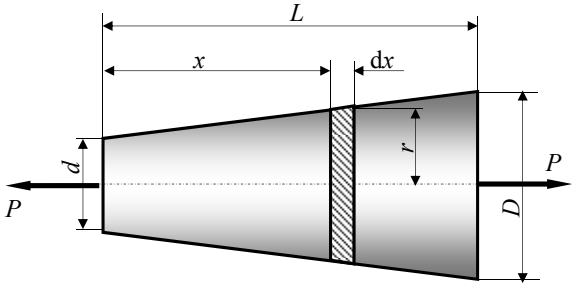


Fig.3.14.

P.3.5. O bară tronconică are secțiunea circulară, care variază uniform de la diametrul d la diametrul D, şi lungimea L. Să se calculeze alungirea barei atunci când este supusă unei forțe axiale P (vezi fig. 3.14).

La depărtarea x de secțiunea cu diametrul cel mai mic d se consideră un element de volum de lungime dx şi de rază r a cărei valoare se determină din triunghiuri asemenea:

$$r = \frac{d}{2} + \frac{x}{L}\left(\frac{D-d}{2}\right).$$

Alungirea acestui volum elementar se poate determina aplicând formula de la alungirea unei bare supuse la efort axial, (3.15):

$$\mathrm{d}(\Delta l) = \frac{P\mathrm{d}x}{\pi\left[\frac{d}{2} + \frac{x}{L}\left(\frac{D-d}{2}\right)\right]^2 E}.$$

Alungirea totală se obține prin însumarea deformațiilor acestor elemente de volum pe întreaga lungime a barei.

$$\Delta l = \int_0^L \mathrm{d}(\Delta l) = \int_0^L \frac{4P\mathrm{d}x}{\pi\left[d + \frac{x}{L}(D-d)\right]^2 E} = \frac{4PL}{\pi DdE}.$$

P.3.6. Un corp având forma unui solid de revoluție este solicitat de forța P după cum se poate vedea în figura 3.15. Corpul are raza secțiunii superioare r_0, iar greutatea specifică a materialului din care este confecționat γ, în N/m^3. Să se determine legea de variație a razei secțiunii corpului în funcție de coordonata y, astfel încât în orice secțiune a lui, perpendiculară pe axul de simetrie, tensiunea σ să fie constantă.

Se consideră la depărtarea y de secțiunea superioară, un volum definit de două secțiuni foarte apropiate, situate la depărtarea dy una față de alta (vezi fig. 3.15). Dacă Q este greutatea părții superioare atunci dQ reprezintă creşterea lui Q când y a crescut cu dy. Elementul de volum considerat este mărginit de două secțiuni, perpendiculare pe axul de rotație, ce au razele r şi r +dr şi ale căror arii sunt A, respectiv A + dA. Pe aceste două suprafețe se dezvoltă tensiuni normale de compresiune ale căror mărimi, în baza condiției impuse în enunț, trebuie să fie egale:

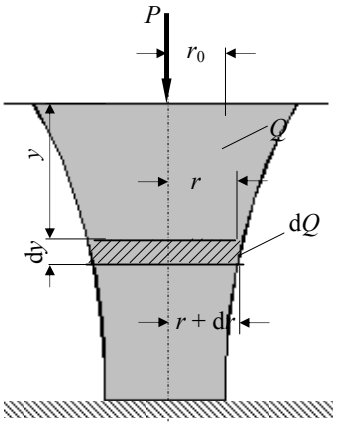


Fig. 3.15.

$$\frac{P+Q}{A}=\frac{P+Q+\mathrm{d}Q}{A+\mathrm{d}A}=\sigma=\text{const.}$$

Din această egalitate rezultă:

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}Q}=\frac{A}{P+Q}=\frac{1}{\sigma}. \qquad \text{(a)}$$

Creşterea ariei între cele două fețe, superioară şi inferioară ale elementului de volum este: dA = $\pi(r + \mathrm{d}r)^2 - - \pi r^2 = 2\pi r\mathrm{d}r$. Creşterea elementară a greutății este: d$Q = \pi r^2\gamma\mathrm{d}y$. Înlocuind pe d$A$ şi dQ în formula (a) şi integrând rezultă:

$$2\ln r=\frac{\gamma}{\sigma}y+C_1 \qquad \text{(b)}$$

Punând condițiile la limită şi anume, pentru $y = 0$, $r = r_0$ rezultă $C_1 = 2\ln r_0$. Pentru secțiunea superioară a corpului, la $y = 0$, tensiunea este $\sigma=\dfrac{P}{\pi r_0^2}$. Înlocuind aceste valori în (b) rezultă:

$$r=r_0\exp\left(\frac{\gamma\pi r_0^2}{2P}y\right).$$

P.3.7. Două bare identice, din oțel, sunt legate între ele aşa cum se poate vedea în figura 3.16, *a* şi sunt solicitate de o forță de 120 kN. Să se determine aria secțiuni barelor astfel încât tensiunea normală să nu fie mai mare de σ_a = 150 N/mm^2, precum şi deplasarea verticală a punctului B. Modulul de elasticitate longitudinal $E = 2{,}1\cdot10^5$ N/mm^2.

Din condiția de echilibru a nodului B rezultă (fig. 3.16, *b*):

$$\left(\sum F_V\right):\ N_{BA}\cos30^{\circ}+N_{BC}\cos30^{\circ}-120=0;$$

$$\left(\sum F_O\right):\ -N_{BA}\sin30^{\circ}+N_{BC}\sin30^{\circ}=0;$$

din care rezultă

$$N_{BA}=N_{BC}=\frac{120}{2\cos30^0}=69{,}28\text{ kN}.$$

Aria secțiunii barelor se determină cu relația:

$$A=\frac{N}{\sigma_a}=\frac{69{,}28\cdot10^3}{150}=461{,}88\text{ mm}.$$

Deoarece, în rezistența materialelor s-a admis ipoteza micilor deformații, forma deformată a celor două bare, sub acțiunea încărcării, nu este mult diferită de forma inițială (fig. 3.16, *c*).Din

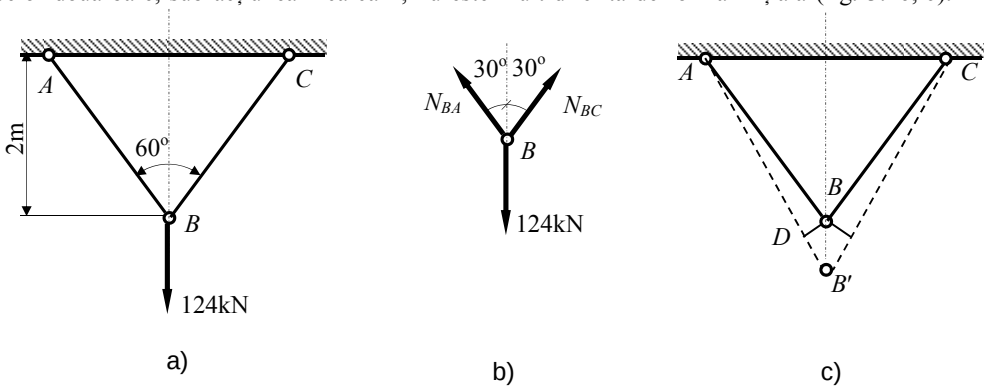


Fig. 3.16.

această cauză se consideră că unghiul *DB'B* are valoarea de 30°. Deplasarea pe verticală a nodului *B*, în acest caz, se determină astfel:

$$BB' = \frac{DB'}{\cos 30^0} = \frac{Nl}{EA} \cdot \frac{1}{\cos 30^0} = \frac{69{,}28 \cdot 10^3}{2{,}1 \cdot 10^3 \cdot 461{,}88} \cdot \frac{2 \cdot 10^3}{\cos 30^0} \cdot \frac{1}{\cos 30^0} = 1{,}9 \text{ mm.}$$

P.3.8. Două bare din oțel *AB* şi *BC* sunt articulate la capete şi sunt solicitate de o forță $F = 236$ kN aşa cum este arătat în figura 3.17, *a*. Materialul din care sunt confecționate cele două bare este un oțel turnat care are limita de curgere aparentă $R_e = 240$ N/mm^2. Coeficienții de siguranță adoptați sunt: 1,5 pentru solicitarea de întindere şi 3 pentru solicitarea de compresiune. Să se determine ariile secțiunilor transversale pentru cele două bare şi de asemenea, componenta orizontală şi cea verticală ale deplasării punctului *B*. Se va considera $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ N/mm^2.

Din echilibrul nodului *B* rezultă (fig. 3.17, *b*):

$$\left(\sum F_V\right): \; -N_{BC} \sin 30^o - F = 0;$$

$$\left(\sum F_O\right): -N_{BC} \cos 30^o - N_{BA} = 0;$$

Rezolvând sistemul se obține:

$$N_{BC} = \frac{-F}{\sin 30^0} = -\frac{236}{\sin 30^0} = -472 \text{ kN};$$

$$N_{BA} = -N_{BC} \cos 30^0 = 472 \cdot \cos 30^0 = 408{,}76 \text{ kN}.$$

Tensiunile admisibile se determină cu relația (1.27): $\sigma_a^{trac} = 240/1{,}5 = 160$ N/mm^2 pentru solicitarea de tracțiune şi $\sigma_a^{comp} = 240/3 = 80$ N/mm^2 pentru solicitarea de compresiune.

Ariile necesare pentru cele două bare se determină cu relația (3.10):

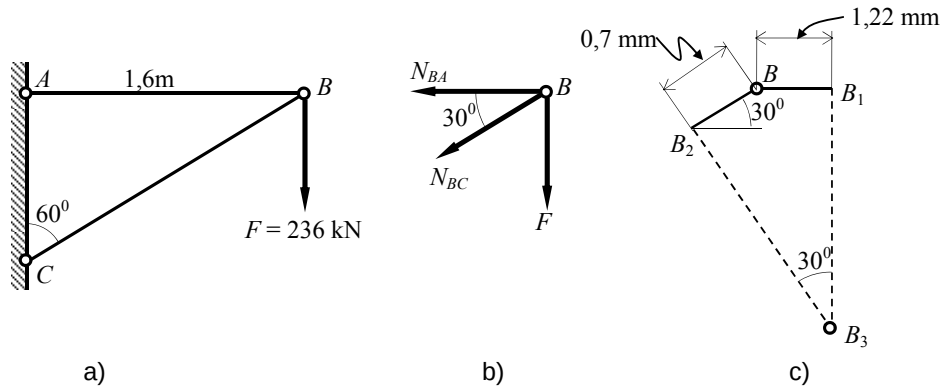


Fig. 3.17.

$$A_{BA} = \frac{N_{BA}}{\sigma_a^{trac}} = \frac{408{,}75 \cdot 10^3}{160} = 2554{,}75 \text{ mm}^2;$$

$$A_{BC} = \frac{|N_{BC}|}{\sigma_a^{tcomp}} = \frac{472 \cdot 10^3}{80} = 5900 \text{ mm}^2.$$

Pentru a determina deplasarea punctului B este necesar ca mai întâi să calculăm deformațiile axiale ale celor două bare folosind relația (3.15):

$$\Delta l_{BA} = \frac{N_{BA} l_{BA}}{EA_{BA}} = \frac{408{,}71 \cdot 10^3 \cdot 1{,}6 \cdot 10^3}{2{,}1 \cdot 10^3 \cdot 2554{,}75} = 1{,}2 \text{ mm}$$

$$\Delta l_{BC} = \frac{N_{BC} l_{BC}}{EA_{BC}} = \frac{-472 \cdot 10^3 \cdot \dfrac{1{,}6 \cdot 10^3}{\sin 60^0}}{2{,}1 \cdot 10^3 \cdot 2554{,}75} = -0{,}7 \text{ mm}.$$

Poziția punctului B după solicitarea barelor se poate determina ținând seama că bara AB se alungeşte cu 1,22 mm, ea putându-se roti în jurul punctului A, iar bara CB se scurtează cu 0,7 mm, ea putându-se roti în jurul punctului C. Deoarece deformațiile sunt mici, se poate considera că deplasarea punctului B cauzată de rotirea barei AB în jurul punctului A, poate fi asimilată cu segmentul de dreaptă B_1B_3. Acelaşi raționament se poate aplica şi în cazul rotirii barei BC. Din studiul geometric al figurii 3.17, *c*, rezultă deplasările punctului B:

$$u_B = 1{,}22 \text{ mm}; \qquad v_B = \frac{0{,}7 \cos 30^0 + 1{,}22}{\tan 30^0} + 0{,}7 \sin 30^0 = 3{,}5 \text{ mm}.$$

P.3.9. Trei bare din oțel legate solidar între ele sunt solicitate de forța axială F (fig. 3.18) Cunoscând ariile secțiunilor transversale ale barelor A_1, A_2, A_3 să se determine lungimile acestora astfel încât în fiecare dintre ele tensiunea maximă să nu depăşească tensiunea admisibilă σ_a.

Pentru fiecare bară tensiunea maximă se dezvoltă în secţiunea sa superioară acolo unde efortul secţional este compus din forţa F dar şi din greutatea barelor situate sub secţiunea respectivă.

Dacă se consideră că bara 1 are greutatea pe metru liniar q_1 (N/m), din condiţia $\sigma_{max} = \sigma_a$, pusă la partea superioară a tronsonului 1, se obţine:

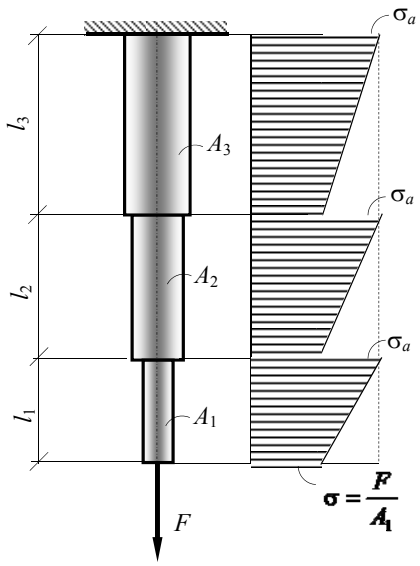


Fig. 3.18.

$$\sigma_a = \frac{F + l_1 q_1}{A_1} \Rightarrow l_1 = \frac{\sigma_a A_1 - F}{q_1}.$$

Procedând analog pentru tronsonul 2, rezultă:

$$\sigma_a = \frac{F + l_1 q_1 + l_2 q_2}{A_2} = \frac{\sigma_a A_1 + l_2 q_2}{A_2}$$

de unde:

$$l_2 = \frac{\sigma_a (A_2 - A_1)}{q_2}.$$

Prin recurenţă, pentru tronsonul i, se poate scrie:

$$l_i = \frac{\sigma_a (A_i - A_{i-1})}{q_i}.$$

P.3.10. Bara din figura 3.19, *a* are secţiunea constantă şi este încastrată între doi pereţi verticali. O forţă axială F este aplicată la distanţa l_1 de peretele din stânga. Să se determine forţele de legătură dintre pereţi şi bară.

Trebuie mai întâi să reprezentăm bara acţionată de forţa F şi de cele două forţe de legătură dintre ea şi pereţi. Cele două reacţiuni sunt notate cu H_1 şi H_2 aşa cum se poate vedea în figura 3.19, *b*. În această situaţie *aspectul static al problemei* constă dintr-o singură ecuaţie de echilibru:

$$\left(\sum F_O\right):\ H_1 - F + H_2 = 0$$

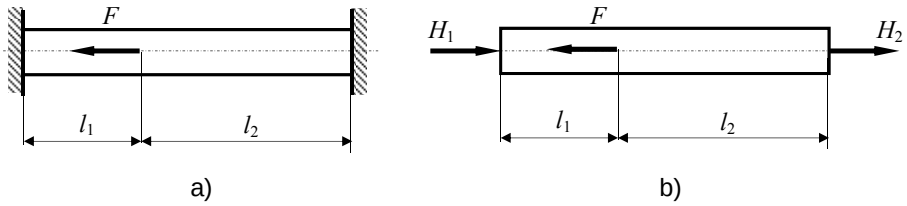


Fig. 3.19.

Se constată că sunt două necunoscute şi o singură ecuaţie: problema este static nedeterminată. În consecinţă, pe lângă ecuaţia de echilibru static trebuie adăugată o ecuaţie bazată pe deformaţia barei. După cum se poate vedea din figura 3.19, *b*, tronsonul de lungime l_1 este comprimat cu forţa H_1, iar tronsonul de lungime l_2 este supus la întindere cu forţa H_2. În consecinţă scurtarea tronsonului de lungime l_1 trebuie să fie egală cu alungirea tronsonului de lungime l_2. Această

egalitate constituie ecuaţia furnizată de *aspectul geometric al problemei*, cel care face legătura dintre deplasări şi deformaţii.

Modificarea lungimii unei bare solicitată axial se determină cu relaţia (3.15) care reprezintă în acest caz *aspectul fizic al problemei*. Rezultă:

$$\frac{H_1 l_1}{EA} = \frac{H_2 l_2}{EA},$$

unde A reprezintă aria secţiunii transversale a barei, iar E modulul de elasticitate longitudinal. Din ultima egalitate din care rezultă $H_1 l_1 = H_2 l_2$, şi din ecuaţia aspectului static al problemei se determină cele două necunoscute:

$$H_1 = \frac{F l_2}{l_1 + l_2} \text{ şi } H_2 = \frac{F l_1}{l_1 + l_2}.$$

Cunoscând forţele de legătură se pot determina deformaţiile celor două tronsoane:

$$\Delta l_1 = -\frac{H_1 l_1}{EA} = -\frac{F l_1 l_2}{EA(l_1 + l_2)}; \ \Delta l_1 = \frac{H_2 l_2}{EA} = \frac{F l_1 l_2}{EA(l_1 + l_2)}$$

cea ce dovedeşte că

$$\Delta l_2 = -\Delta l_1.$$

P.3.11. Într-un cilindru de oţel se află montată o bară de aluminiu, ansamblul fiind solicitat la compresiune de o forţă P = 400 kN prin intermediul a două plăci rigide, aşa cum este prezentat în figura 3.20, *a*. Diametrul interior al cilindrului este d = 80 mm, iar cel exterior D = 100 mm. Modulele de elasticitate sunt $E_{oţ} = 2{,}05 \cdot 10^5$ N/mm^2 şi $E_{al} = 0{,}62 \cdot 10^5$ N/mm^2. Să se determine tensiunile în cilindrul de oţel şi în bara de aluminiu.

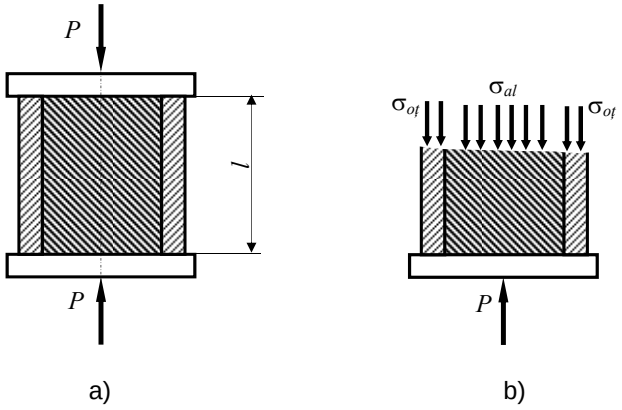


Fig. 3.20.

Dacă se face o secţiune orizontală prin ansamblu şi se înlătură una dintre părţi, de exemplu cea superioară, trebuie să se introducă efectul acesteia asupra părţii inferioare. Acest lucru se poate face introducând tensiunile normale care se dezvoltă, aşa cum este arătat în figura 3.20, *b*.

Partea rămasă în urma secţionării, cea inferioară trebuie să fie în echilibru sub acţiunea forţei P şi a forţelor generate de tensiuni: $P_{oţ} = \sigma_{oţ}A_{oţ}$ şi $P_{al} = \sigma_{al}A_{al}$, unde $A_{oţ}$, A_{al} reprezintă aria secţiunii tubului de oţel, respectiv cea a barei de aluminiu. Singura ecuaţie de echilibru a aspectului static al problemei ce se poate scrie este:

$$\left(\sum F_V\right): P - P_{oţ} - P_{al} = 0$$

Se constată că avem o ecuaţie cu două necunoscute $P_{oţ}$ şi P_{al}, deci sistemul este static nedeterminat. În această situaţie trebuie să adăugăm încă o ecuaţie provenită din deformaţia structurii. Deoarece tubul de oţel şi bara de aluminiu sunt montate între două plăci considerate rigide, deformaţia celor două elemente trebuie să fie identică. Deformarea unei bare sub acţiunea unei forţe axiale este dată de formula (3.15). În cazul analizat se poate scrie:

$$\frac{P_{ot}l}{E_{ot}A_{ot}} = \frac{P_{al}l}{E_{al}A_{al}},$$

sau

$$\frac{P_{ot}l}{2{,}05\cdot 10^5\cdot\frac{\pi}{4}\left(100^2-80^2\right)} = \frac{P_{al}l}{0{,}62\cdot 10^5\cdot\frac{\pi}{4}\cdot 80^2} \text{ din care rezultă } P_{oţ} = 1{,}86P_{al}.$$

Această ecuaţie, împreună cu ecuaţia statică, formează un sistem de ecuaţii prin rezolvarea căruia se obţine: $P_{al} = 0{,}35P$ şi $P_{oţ} = 0{,}65P$.

Deoarece P = 400 kN, P_{al} = 140kN, iar $P_{oţ}$ = 260 kN. Tensiunile căutate se obţin împărţind valoarea forţelor la aria fiecărui material:

$$\sigma_{al} = \frac{120\cdot 10^3}{\frac{\pi}{4}\cdot 80^2} = 23{,}9\ \text{N/mm}^2;\quad \sigma_{ot} = \frac{260\cdot 10^3}{\frac{\pi}{4}\left(100^2-80^2\right)} = 92\ \text{N/mm}^2.$$

P.3.12. Bara *ABC* este considerată de rigiditate infinită şi orizontală înainte ca forţa P = 80 kN să fie aplicată (fig. 3.21, *a*). Barele care formează structura sunt articulate între ele şi faţă de corpul de referinţă. Bara *EB* este din cupru ($E_{cu} = 1{,}15\cdot 10^5$ N/mm^2) şi are aria secţiunii transversale A_{cu} = 516 mm^2, iar bara *CD* este din oţel ($E_{oţ} = 2{,}05\cdot 10^5$ N/mm^2) şi are secţiunea $A_{oţ}$ = 322 mm^2. Să se determine tensiunile din cele două bare şi alungirea barei de oţel. Se va neglija greutatea barei *ABC*.

Pentru a putea scrie ecuaţiile aspectului static al problemei trebuie mai întâi să izolăm bara *ABC*, înlocuind legăturile prin forţe de legătură şi eforturi secţionale, aşa cu se poate vedea în figura 3.21, *b*. Se constată că sistemul de forţe ce acţionează asupra barei *ABC* este un sistem coplanar, deci condiţia de echilibru se exprimă prin trei ecuaţii, două de proiecţie şi una de moment:

$$\left(\sum F_O\right):\ H_A = 0$$

$$\left(\sum F_V\right):\ V_A + N_{cu} + N_{oţ} - P = 0$$

$$\left(\sum M_A\right):\ -N_{cu}\cdot 2 - N_{oţ}\cdot 4 + P\cdot 3 = 0$$

Ultimele două ecuaţii conţin trei necunoscute: sistemul este static nedeterminat. Pentru suplimentarea numărului de ecuaţii se apelează la aspectul geometric. Deoarece bara *ABC* este perfect rigidă singura posibilitate de mişcare este rotirea în jurul articulaţiei *A*. Linia întreruptă din

figura 3.21, *c* indică poziția finală a barei *ABC* după aplicarea forței *P*. Din asemănarea triunghiurilor ABB_1 şi ACC_1 se poate scrie:

$$\frac{\Delta l_{cu}}{2} = \frac{\Delta l_{oţ}}{4}$$

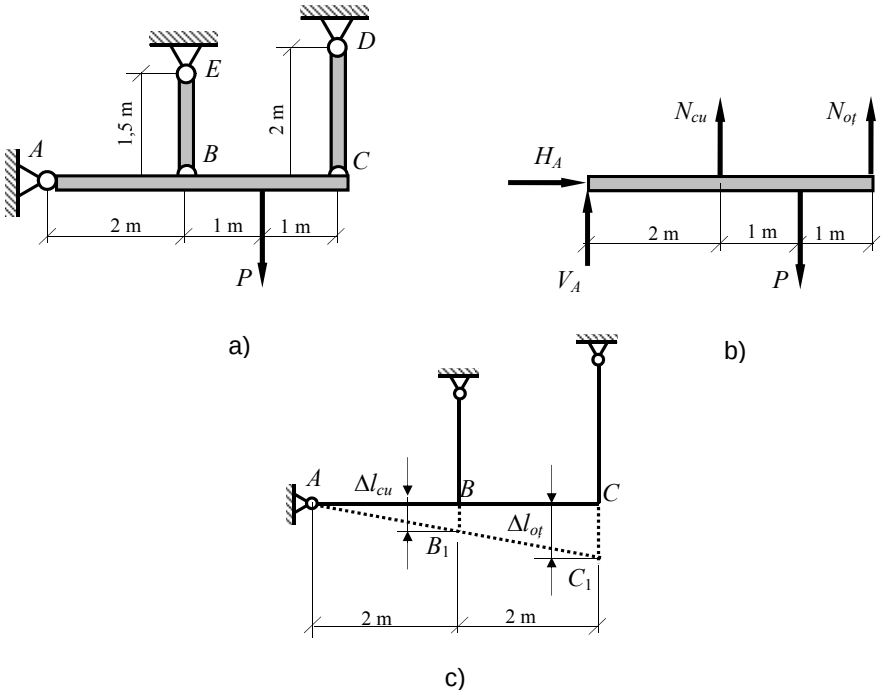


Fig. 3.21.

unde Δl_{cu} şi $\Delta l_{oţ}$ reprezintă alungirile barei de cupru, respectiv de oțel. Ecuația de natură geometrică va fi: $2\,\Delta l_{cu} = \Delta l_{oţ}$.

Folosind ecuația dată de aspectul fizic (3.15) se pot determina Δl_{cu} şi $\Delta l_{oţ}$:

$$\frac{2 \cdot N_{cu} \cdot 1{,}5 \cdot 10^3}{1{,}15 \cdot 10^5 \cdot 516} = \frac{N_{cu} \cdot 2 \cdot 10^3}{2{,}05 \cdot 10^5 \cdot 322}\text{, de unde } N_{cu} = 0{,}6 N_{oţ}$$

Această egalitate şi ecuația a treia a aspectului static formează un sistem care permite determinarea eforturilor din cele două bare:

$2 \cdot 0{,}6 \cdot N_{oţ} + 4 \cdot N_{oţ} = 3 \cdot P$, adică $N_{oţ} = 0{,}577P$ şi, apoi, $N_{cu} = 0{,}346P$.

Tensiunile din cele două bare sunt date de relația (3.9):

$$\sigma_{ot} = \frac{0{,}577 \cdot 80 \cdot 10^3}{322} = 143 \text{ N/mm}^2;\ \sigma_{cu} = \frac{0{,}346 \cdot 80 \cdot 10^3}{516} = 54 \text{ N/mm}^2.$$

Alungirea barei de oțel este:

$$\Delta l_{ot} = \frac{N_{ot} l_{ot}}{E_{ot} A_{ot}} = \frac{0{,}577 \cdot 80000 \cdot 2000}{2{,}05 \cdot 10^5 \cdot 322} = 1{,}4 \text{ mm}.$$

Alungirea barei de cupru va fi de două ori mai mică, adică $\Delta l_{cu} = 0{,}7$ mm.

P.3.13. Bara din figura 3.22 este din cupru, are secțiunea constantă şi este legată rigid de doi pereți, aşa cum este arătat. Ea are lungimea 1,5 m şi aria secțiunii 1613 mm^2. Bara a fost montată la temperatura 20°C. Să se determine tensiunea din bară dacă temperatura creşte cu 50°C. Se va considera $E = 1{,}15 \cdot 10^5$ N/mm^2 şi coeficientul de dilatare liniară $\alpha = 16{,}5 \cdot 10^{-6}$ /^{o}C.

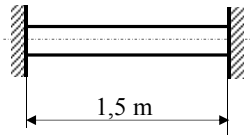


Fig. 3. 22.

Dacă bara ar avea unul din capete liber atunci datorită creşterii temperaturii ea va suferi o alungire ce se calculează cu relația

$$\Delta l = \alpha \cdot \Delta t \cdot l,$$

în care Δt reprezintă variația de temperatură. În cazul studiat $\Delta l = 16{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 50 \cdot 1500 = 1{,}24$ mm.

În realitate bara are deplasările împiedicate, din cauza pereților, fapt ce face ca în ea să apară o tensiune de compresiune echivalentă unei scurtări $\Delta l = 1{,}24$ mm. Folosind formula (3.15) se poate determina mai întâi forța axială N corespunzătoare lui Δl:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} \text{ sau } 1{,}24 = \frac{N \cdot 1500}{1{,}15 \cdot 10^5 \cdot 1613}, \text{ de unde } N = 153{,}343 \text{ kN}.$$

Tensiunea în bară va fi $\sigma = N/A = 153343/1613 = 95$ N/mm^2.

P.3.14. Bara *ABC* este perfect rigidă şi articulată în *A*. De ea sunt legate, tot prin articulații, bara *BE* din cupru şi bara *CD* din oțel (fig. 3.23, *a*). Întreg sistemul nu are tensiuni de monataj, iar greutatea barei *ABC* se neglijează. Temperatura barei *BE* este diminuată cu 10°C, iar cea a barei *CD* este majorată cu 30°C. Neglijând orice posibilitate de flambaj lateral să se determine tensiunile în barele *BE* şi *CD*. Pentru BE, care este din cupru, $E_{cu} = 1{,}15 \cdot 10^5$ N/mm^2 şi $\alpha_{cu} = 16{,}5 \cdot 10^{-6}$ /^{o}C, iar pentru C*D*, care este din aluminiu, $E_{cu} = 0{,}62 \cdot 10^5$ N/mm^2 şi $\alpha_{cu} = 23{,}6 \cdot 10^{-6}$ /^{o}C. Aria secțiunii transversale pentru *BE* este $A_{cu} = 650$ mm^2, iar pentru *CD*, $A_{al} = 1300$ mm^2.

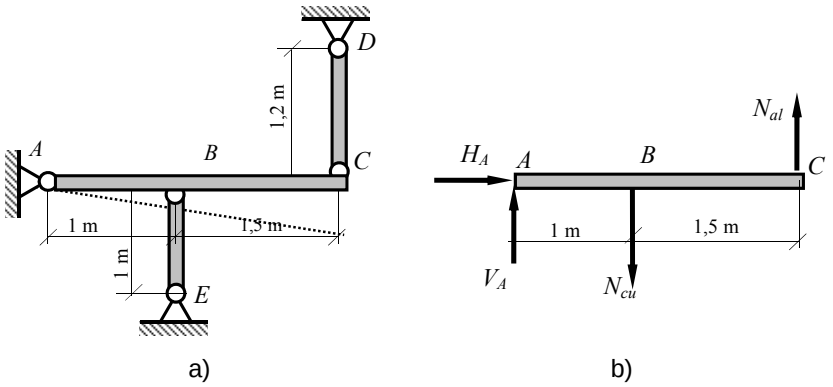


Fig. 3.23.

Datorită variaţiei de temperatură, bara *BE* se va scurta, iar bara *CD* se va alungi, astfel încât eforturile în cele două bare au sensurile indicate în figura 3.23, *b*. Ecuaţia de echilibru static care va conţine cele două eforturi N_{cu} şi N_{al} este o ecuaţie de moment în raport cu articulaţia *A*:

$$\left(\sum M_A\right): \quad N_{cu}\cdot 1 - N_{al}\cdot 2{,}5 = 0$$

Deoarece bara *ABC* este perfect rigidă şi ea se poate roti în jurul punctului *A*, între deformaţiile celor două bare se poate scrie relaţia: $\frac{\Delta l_{cu}}{1} = \frac{\Delta l_{al}}{2{,}5}$, în care Δl_{cu} reprezintă scurtarea barei *BE*, iar Δl_{al}, alungirea barei *CD*. Modificarea totală a lungimii barei *BE* se datoreşte variaţiei de temperatură şi efortului secţional N_{cu}:

$\Delta l_{cu} = \alpha_{cu}\Delta t_{cu} l_{cu} + \frac{N_{cu} l_{cu}}{E_{cu} A_{cu}}$. La fel şi în cazul barei CD: $\Delta l_{al} = \alpha_{al}\Delta t_{al} l_{al} + \frac{N_{al} l_{al}}{E_{al} A_{al}}$.

Înlocuind numeric în relaţia de natură geometrică se obţine:

$$2{,}5\left[16{,}5\cdot 10^{-6}\cdot(-10)\cdot 1000 + \frac{N_{cu}\cdot 1000}{1{,}15\cdot 10^{5}\cdot 650}\right] = 23{,}6\cdot 10^{-6}\cdot 30\cdot 1200 + \frac{N_{cu}\cdot 1200}{0{,}62\cdot 10^{5}\cdot 1300}$$

sau

$$0{,}334 N_{cu} - 0{,}149 N_{al} = 10146.$$

Rezolvând sistemul format din această ecuaţie şi ecuaţia aspectului static se determină eforturile secţionale provocate de variaţi de temperatură: N_{cu} = 36975 N, N_{al} = 14790 N. Cu aceste valori tensiunile din temperatură în cele două bare sunt: σ_{cu} = 58 N/mm^2, σ_{al} = 12 N/mm^2.

Probleme suplimentare

P.3.15. Grinda cu zăbrele din figura 3.24 este solicitată de forţa *P* = 60 kN. Toate barele sunt confecţionate din oţel S235 care are limita

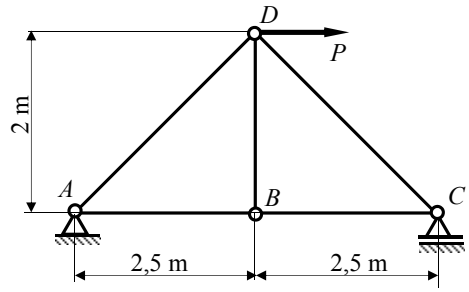


Fig.3.24.

de elasticitate minimă R_e = 235 N/mm^2. Pentru un coeficient de siguranță c = 1,6 să se determine aria necesară pentru barele *AD* şi *BC*.

P.3.16. O bară de oțel are secțiunea A = 100 mm^2 şi este solicitată axial de un sistem de forțe aşa cum este arătat în figura 3.25.. Să se determine alungirea totală a barei. Pentru oțel E = 2,05·10^5 N/mm^2.

P.3.17. O placă plană din oțel de formă trapezoidală are grosimea constantă şi egală cu 13 mm

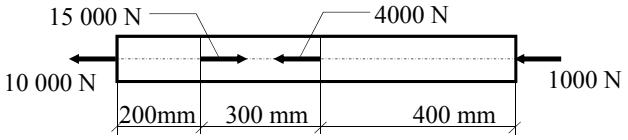


Fig. 3.25.

(fig. 3.26) şi este solicitată axial de o forță de 40 000 N. Să se determine alungirea totală a plăcii. Pentru oțel E = 2,05·10^5 N/mm^2.

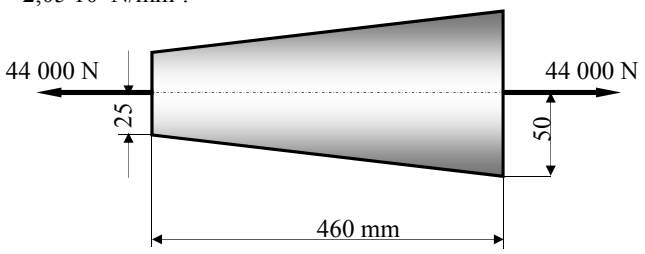


Fig. 3.26.

P.3.18. Grinda cu zăbrele din figura 3.27 este solicitată de două forțe F = 17 kN aplicate după diagonala grinzii. Toate barele sunt din oțel cu E = 2,05·10^5 N/mm^2 şi au aceeaşi secțiune A = 520 mm^2. Să se determine creşterea distanței dintre nodurile *A* şi *C* în funcție de lungimea *l*.

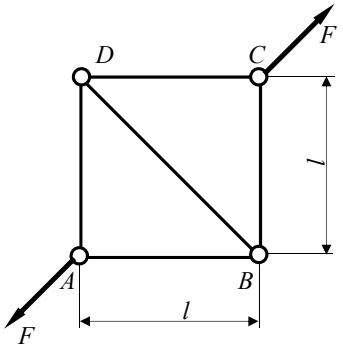


Fig. 3.27.

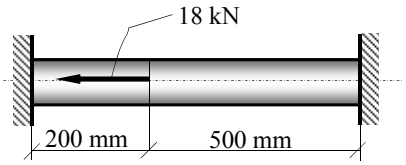


Fig. 3.28.

P.3.19. O bară având aria secţiunii egală cu 1290 mm^2 este încastrată între doi pereţi rigizi şi acţionată de o forţă axială de 18 kN, aşa cum se poate vedea în figura 3.28. Să se determine reacţiunile pereţilor şi alungirea porţiunii din dreapta forţei. Se va considera $E = 2{,}05 \cdot 10^5$ N/mm^2.

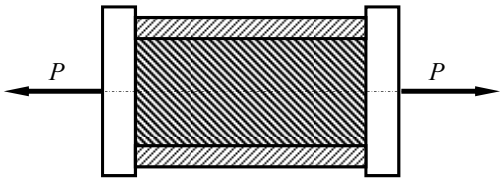


Fig. 3.29.

P.3.20. O platbandă de cupru este montată între două platbande de oţel prin intermediul a două placi perfect rigide, aşa cum este prezentat în figura 3.29. Ansamblul este solicitat axial de o forţă P. Toate cele trei platbande au lăţimea de 100 mm. Platbandele din oţel au grosimea de 6,5 mm, iar platbanda de cupru 20 mm. Ştiind că pentru oţel R_m = 560 N/mm^2 şi $E = 2{,}05 \cdot 10^5$ N/mm^2, iar pentru cupru, R_m = 200 N/mm^2 şi E = 1,15 N/mm^2, să se determine valoarea maximă a forţei P pe

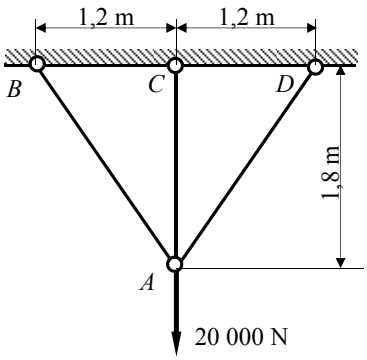


Fig. 3.30.

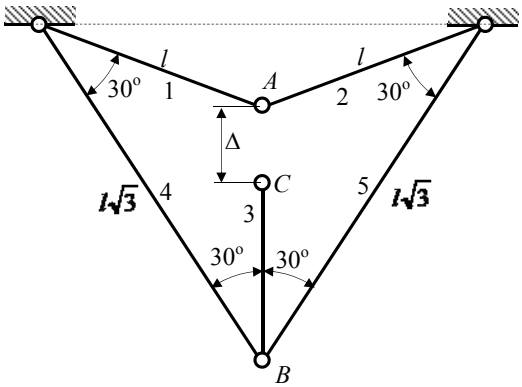


Fig. 3.31.

care o poate suporta ansamblul dacă se consideră un coeficient de siguranţă c = 2.

P.3.21. Trei bare articulate între ele sunt solicitate de o forţă verticală de 20 000 N (fig. 3.30). Barele sunt montate fără tensiuni iniţiale, înainte de aplicarea forţei în A. Încărcare este aplicată lent şi în acelaşi timp temperatura barelor este majorată cu 15°C. Să se determine tensiunile în bare. Barele AB şi AD sunt din cupru şi au aria secţiunii transversale 260 mm^2, iar bara AC este din oţel şi are aria secţiunii 200 mm^2. Pentru oţel $E = 2{,}05 \cdot 10^5$ N/mm^2 şi $\alpha = 11 \cdot 10^{-6}$ /°C, iar pentru cupru $E = 1{,}15 \cdot 10^5$ N/mm^2 şi $\alpha = 16{,}5 \cdot 10^{-6}$ /°C.

P.3.22. La montajul barelor din figura 3.31 s-a constatat că punctele A şi C nu coincid, distanţa pe verticală dintre ele fiind Δ. Asamblarea se efectuează forţat astfel încât punctele A şi C să coincidă. Să se determine eforturile secţionale în bare provocate de eroarea de fabricaţie. Toate barele sunt din acelaşi material şi au aceeaşi secţiune.

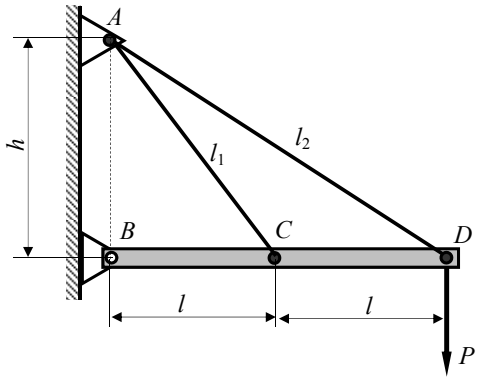


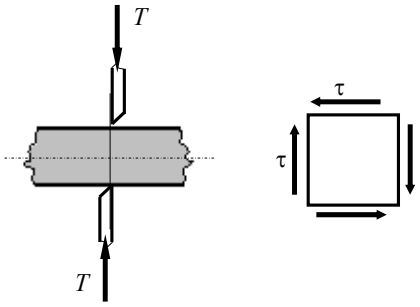
Fig. 3.32.

P.3.23. Bara *BCD*, perfect rigidă, este susținută de două cabluri, aşa cum se vede în figura 3.32. Cele două cabluri sunt montate fără tensiuni inițiale. Se neglijează greutățile proprii, iar cele două cabluri au aceeaşi secțiune *A* şi acelaşi modul de elasticitate *E*. Să se determine tensiunile în fiecare cablu după aplicarea forței *P*.

3.2. FORFECAREA SIMPLĂ A BARELOR DREPTE

S-a văzut (parag. 2.2) că între momentul încovoietor şi forţa tăietoare există relaţia $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = T$ ceea ce face ca solicitarea de forfecare să fie însoţită de încovoiere, forfecarea pură apărând numai într-o singură secţiune, acolo unde momentul încovoietor este nul.

Se consideră că o bară este solicitată la forfecare simplă atunci când forfecarea este solicitarea predominantă a barei. Se poate face această ipoteză în cazul pieselor la care se constată că ruperea sau deformaţiilor mari, permanente, apar datorită forfecării, ca de exemplu bara din figura 3.33, *a* asupra căreia acţionează



a) b)

Fig. 3.33.

două cuţite normale pe axa sa. Forţele de acţionare a cuţitelor, notate cu *T*, sunt egale cu forţa tăietoare ce apare în secţiunea din bară determinată de planul cuţitelor. În cazul în care forţele *T* depăşesc o anumită limită bara este forfecată complet. Materialul din care este confecţionată bara se opune tendinţei de forfecare ceea ce înseamnă că în secţiune apar tensiuni tangenţiale τ (fig. 3.33, *b*). Conform principiului dualităţii tensiunilor tangenţiale, în planele normale pe secţiunea de forfecare apar tensiuni tangenţiale egale cu cele din secţiune şi simetric orientate faţă de muchia comună (fig. 3.33, *b*). Pe feţele exterioare ale barei tensiunile tangenţiale sunt nule, deoarece pe aceste feţe nu acţionează forţe tangenţiale la suprafaţa barei. Rezultă că în secţiunea de forfecare tensiunile tangenţiale τ nu sunt distribuite uniform. În cazul pieselor la care secţiunea de forfecare este mică şi în general pentru elementele de îmbinare (nituri, buloane, pene, cordoane de sudură etc.) se consideră că tensiunile tangenţiale au o

distribuție uniformă pe secțiune. În această situație se poate considera, într-un calcul aproximativ, că valoarea tensiunii tangențiale este:

$$\tau = \frac{T}{A} \tag{3.27}$$

unde T este forța tăietoare din secțiune şi A este aria secțiunii de forfecare.

3.2.1. Calculul îmbinărilor prin nituri ale barelor solicitate la eforturi axiale

Niturile sunt elemente de prindere, folosite la asamblarea a două sau mai multe plăci metalice denumite platbande, aşa cum se poate vedea în figura 3.34. Aceste elemente de asamblare sunt bare mici cu secțiune circulară, având un cap aproximativ semisferic şi o tijă uşor tronconică (fig. 3.34). După ce au fost încălzite la „roşu aprins”, ele sunt introduse în găurile – care au aproximativ acelaşi diametru – făcute în piesele care urmează să fie asamblate (în general

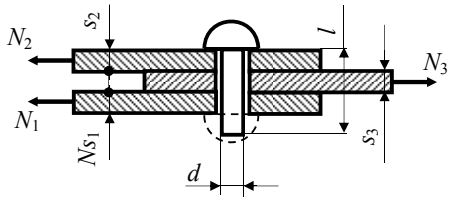
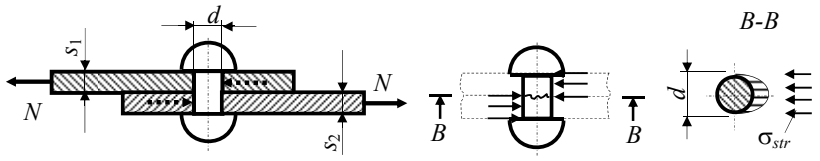


Fig. 3.34.

platbande). Cu ajutorul a două piese groase denumite buterolă şi contra-buterolă şi a unui ciocan pneumatic se formează celălalt cap. După răcire, nitul, datorită contracției, strânge între ele piesele asamblate în dreptul găurilor în care a fost montat. Ca urmare a faptului că piesele îmbinate sunt solicitate axial, se produce o interacțiune între pereții găurilor şi tija nitului, pe toată suprafața acestora (fig. 3.35, *a*). Ca urmare tija nitului este solicitată atât la încovoiere, cât şi la forfecare (fig. 3.35, *b*), secțiunea cea mai periculoasă fiind în planul de separație al pieselor ce au fost asamblate prin intermediul nitului.

Calculul de rezistență al nitului constă într-o predimensionare constructivă şi verificarea capacității lui portante.

Predimensionarea constă în alegerea diametrului nitului (dintre dimensiunile standardizate), ea făcându-se empiric în funcție de grosimea pieselor care se asamblează (a pieselor de strâns). În tabelul 3.3 sunt date recomandările



a) b) c)

Fig. 3.35.

standardului STAS 763 – 66 referitoare la alegerea diametrului nitului.

Neglijând frecarea care apare după asamblarea prin nituire a pieselor, se consideră că niturile cedează fie prin forfecare în secțiunea *B–B* (fig. 3.35, *b*), fie prin strivire (fig. 3.35, *c*).

Tabelul 3.3.

Grosimea minimă a pieselor de strâns *s* [mm]	≤ 5		5–9	7–11	10–14	13–19	≥ 20
Diametrul nitului *d* [mm]	11	14	17	20	23	26	29

Deoarece diametrul nitului este relativ mic, se consideră că în secțiunea de forfecare tensiunile tangențiale au o distribuție uniformă. *Rezistența nitului la forfecare*, adică forța de forfecare capabilă a lui, se determină cu relația:

$$R_{nit}^{f} = \frac{\pi d^2}{4} \cdot i \cdot \tau_a \tag{3.28}$$

în care: d este diametrul nitului, i – numărul secțiunilor de forfecare (în cazul îmbinării din figura 3.34, $i = 2$, iar în cazul îmbinării din figura 3.35, *a*, $i = 1$), τ_a=0,8σ_a – rezistența admisibilă la forfecare.

Pentru solicitarea de strivire, se convine că forța maximă pe care o poate transmite un nit, adică *rezistența lui la strivire*, pentru ca materialul să nu se strivească, în ipoteza unei distribuții uniforme a acesteia pe suprafața diametrală a nitului (fig. 3.45, *c*), este:

$$R_{nit}^{str} = d \cdot g \cdot \sigma_a^{str} \tag{3.29}$$

unde g este grosimea minimă însumată a pieselor asamblate care lucrează în acelaşi sens (pentru îmbinarea din figura 3.34, $s_1 + s_2 \geq g$= min [$s_1 + s_2$, s_3], iar σ_a^{str} este rezistența la strivire a materialului nitului care poate fi luată $\sigma_a^{str} = 2\sigma_a$.

Rezistența nitului se defineşte astfel:

$$R_{nit} = \min\,[\,R_{nit}^{f}\ ;\ R_{nit}^{str}\,]. \tag{3.30}$$

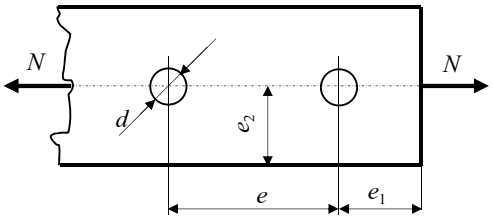


Fig. 3.36.

Calculul îmbinărilor prin nituri constă, în afara determinării diametrului acestora, în determinarea numărului necesar de nituri. Presupunând o încărcare uniformă a tuturor niturilor, numărul de nituri n se determină cu relația:

$$n \geq \frac{N_{cap}}{R_{nit}}, \tag{3.31}$$

unde N_{cap} este efortul capabil al pieselor îmbinate.

Distanțele minime dintre niturile unei îmbinări solicitată la întindere sunt standardizate. De exemplu, pentru îmbinarea din figura 3.36 distanțele prevăzute sunt: $e = 3d$; $e_1 = 2d$; $e_2 = 1{,}5d$.

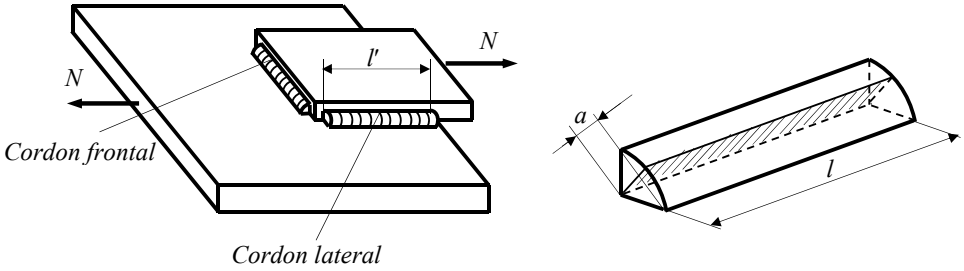
3.2.2. Calculul îmbinărilor prin sudură

Sudarea prin topire a două piese metalice se realizează prin topirea materialului acestora (numit material de bază) în zona unde se realizează îmbinarea şi topirea unui material suplimentar (numit material de adaos). Căldura necesară topirii este furnizată de un arc electric format între un electrod (care constituie materialul de adaos) şi piesele de îmbinat. Prin topire între piese se realizează o baie de material topit care, în urma răcirii, se transformă, prin cristalizare, într-o cusătură sudată (cordon de sudură).

După poziția cordoanelor de sudură față de sensul forței care le solicită se disting: cordoane laterale şi cordoane frontale (fig. 3.37, *a*).

Elementele de calcul ale unui cordon de sudură sunt: grosimea a şi lungimea $l = l' - 2a$, unde l' reprezintă lungimea reală a cordonului de sudură (se consideră că la fiecare capăt al cordonului, grosimea acestuia nu este egală cu a ca urmare a amorsării, respectiv stingerii arcului electric şi deci pe această lungime cordonul nu prea sarcină).

Pentru sudura de colț grosimea sudurii este a conform cu figura 3.37, *b* şi ea poate fi cel mult $a = 0{,}7g$, unde g este cea mai mică grosime a pieselor care se sudează.



a) b)

Fig. 3.37.

Cordonul de sudură este solicitat la forfecare şi secţiunea minimă este cea determinată de grosimea a şi lungimea de calcul l a acestuia (zona haşurată reprezentată în fig. 3.37, *b*). Rezistenţa unui astfel de cordon de sudură este:

$$R_{sud} = a \cdot l_s \cdot \tau_a^{sud} \geq N_{cap}, \tag{3.32}$$

unde $\tau_a^{sud} = 0{,}65\sigma_a$ reprezintă rezistenţa la forfecare a cordonului de sudură, iar N_{cap} este efortul secţional axial capabil pe care îmbinarea îl preia.

Condiţia (3.32) se poate folosi pentru dimensionarea cordonului de sudură numai dacă cele două necunoscute, a şi l_s se exprimă în funcţie de un singur parametru. De obicei, se alege $a \in [0{,}3\text{mm}; 0{,}7g]$ (unde $g = \min [s_1; s_2]$, s_1 şi s_2 fiind grosimile pieselor care se sudează) şi din condiţia (3.32) se calculează lungimea l_s.

Lungimea reală a cordonului de sudură l'_s se determină cu relaţia:

$$l'_s = l_s + 2a, \tag{3.33}$$

deoarece se consideră că, la capete, cordonul de sudură nu are grosimea nominală a, din cauza „arderii” materialului.

Probleme rezolvate

P.3.24. Un singur nit este folosit pentru solidarizarea a două platbande aşa cum este arătat în figura 3.38. Dacă diametrul nitului este d = 20 mm, iar forţa F = 38 kN să se determine tensiunea de forfecare.

Valoarea tensiunii de forfecare se calculează cu formula (3.27) $\tau = T/A$, în care $T = F$, iar A este aria secţiunii nitul. Rezultă:

$$\tau = \frac{37000}{\pi \frac{20^2}{4}} = 118 \text{ N/mm}^2.$$

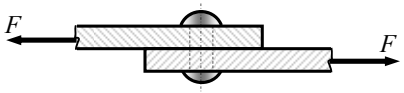


Fig. 3.38.

Deoarece tensiunea tangențială admisibilă este $\tau_a = 0{,}8\sigma_a = 0{,}8 \cdot 150 = 120$ N/mm^2, se constată că nitul nu se va distruge prin forfecare deoarece tensiunea tangențială maximă care se dezvoltă $\tau = 118$ N/mm^2 este mai mică decât tensiunea admisibilă.

P.3.25. În figura 3.39 este prezentat un aparat utilizat la determinarea rezistenței la forfecare a epruvetelor cilindrice. Epruveta cilindrică confecționată din metalul pentru care se determină rezistența la forfecare este prinsă între plăcile A_1A_2 şi B_1B_2. Asupra ei se aplică o forță P prin intermediul plăcii C. Să se determine forța P necesară forfecării unei epruvete cu diametrul $d = 20$ mm, confecționată dintr-un material a cărui tensiune de forfecare admisibilă este $\tau_a = 90$ N/mm^2.

Având în vedere că numărul secțiunilor de forfecare este $i = 2$, aplicând formula (3.28) forța necesară forfecării epruvetei este:

$$P \geq T_{cap} = A \cdot i \cdot \tau_a = \frac{\pi \cdot 20^2}{4} \cdot 2 \cdot 90 = 56550 \text{ N}.$$

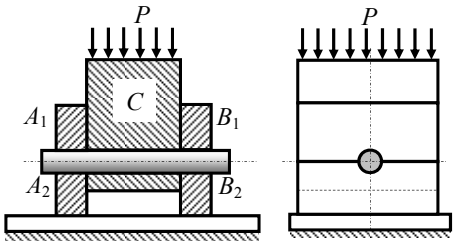


Fig. 3.39.

P.3.26. Barele BD şi CD (fig. 3.40, *a*), alcătuite din câte două platbande din oțel, sunt solicitate de forța $P = 180$ kN. Oțelul din care sunt confecționate platbandele are rezistența admisibilă $\sigma_a = 150$ N/mm^2 şi $E = 2{,}05 \cdot 10^5$ N/mm^2. Prinderea platbandelor se face prin nituri. Să se dimensioneze barele pentru $h = 10b$ şi să se determine numărul necesar de nituri.

Sistemul din figura 3.40, *a* este simetric, atât geometric cât şi mecanic. Din această cauză eforturile secționale în cele două bare sunt egale. Din izolarea nodului D şi din ecuația de proiecție a tuturor forțelor pe verticală se obține:

$$N_{BD} = N_{CD} = \frac{P}{2\cos 60^0} = \frac{180}{2\cos 60^0} = 180 \text{ kN}.$$

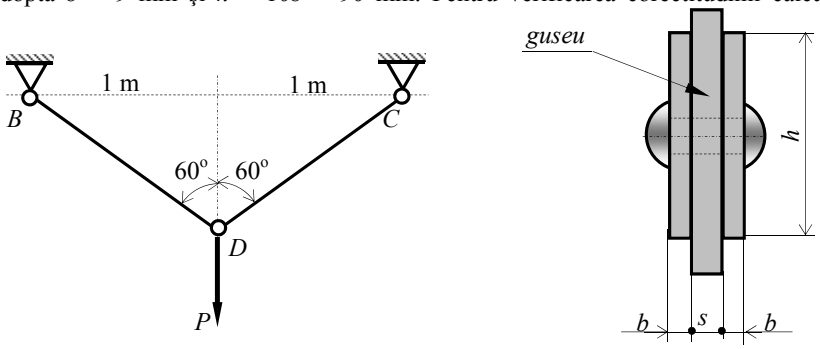
Barele fiind solicitate la întindere pentru dimensionare se foloseşte relația (3.10). Se calculează mai întâi aria necesară:

$$A_{nec} = \frac{P}{\sigma_a} = \frac{180000}{150} = 1200 \text{ mm}^2.$$

Deoarece fiecare bară este alcătuită din două platbande $A_{\text{dim}} = 2bh$ şi fiindcă s-a adoptat $h = 10b$, rezultă $A_{\text{dim}} = 20b^2$. Prinderea platbandelor făcându-se prin nituri, secțiunile barelor au slăbiri fapt pentru care $A_{\text{dim}} = 1{,}15\, A_{nec}$, egalitate din care rezultă valoarea lui b:

$$b = \sqrt{\frac{1{,}15 \cdot 1200}{20}} = 8{,}3 \text{ mm}.$$

Se adoptă b = 9 mm şi h = 10b = 90 mm. Pentru verificarea corectitudinii calculelor se



a) b)

Fig. 3.40.

foloseşte relaţia (3.11) în care aria netă efectivă a barei este $A_n^{ef} = 2b(h-d)$, d reprezentând diametrul nitului. Pentru determinarea lui d se foloseşte tabelul 3.3 alegându-se d = 20 mm. Rezultă $A_n^{ef} = 2 \cdot 9 \cdot (90-20) = 1260$ mm^2. Condiţia de verificare (3.11)

$$\sigma_{\max}^{ef} = \frac{180000}{1260} = 143 \text{ N/mm}^2 < \sigma_a = 150 \text{ N/mm}^2$$

este îndeplinită.

Pentru determinarea numărului de nituri necesar se calculează mai întâi rezistenţa nitului la forfecare cu (3.28) şi la strivire cu (3.29). Se obţine:

$$R_{nit}^{f} = \frac{\pi \cdot 20^2}{4} \cdot 2 \cdot (0{,}8 \cdot 150) = 75398 \text{ N},$$

deoarece nitul are două secţiuni de forfecare;

$$R_{nit}^{str} = 20 \cdot 10 \cdot (2 \cdot 150) = 60000 \text{ N}$$

deoarece s-a adoptat o grosime a guseului $s = b + 1$ mm = 10 mm.

Numărul de nituri se determină astfel:

$$n \geq \frac{N_{cap}}{R_{nit}} = \frac{\sigma_a A_n^{ef}}{R_{nit}} = \frac{150 \cdot 1260}{60000} = 3{,}15 .$$

Se adoptă n = 4 nituri.

P.3.27. O roată de curea este fixată pe un arbore de diametru d = 40 mm prin intermediul unei pene longitudinale aşa cum se poate vedea în figura 3.41. Forţele F_1 şi F_2, din cele două ramuri ale curelei, dezvoltă un moment de torsiune M_t = 1 kNm. Pana are dimensiunile în secţiune 6 mm x 8 mm, iar lungimea de 80 mm. Să se afle tensiunile de forfecare şi de strivire din pană.

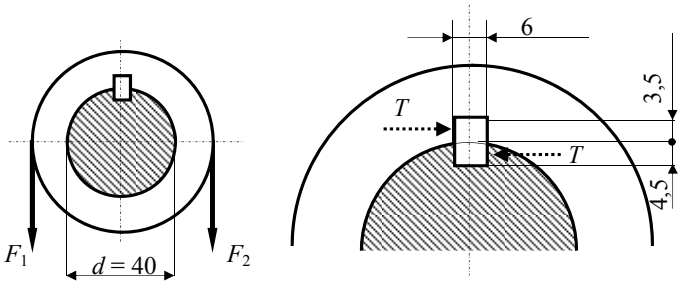


Fig. 3.41.

Datorită momentului de torsiune M_t asupra penei acționează o forță distribuită a cărei rezultantă este

$$T = \frac{2M_t}{d} = \frac{2 \cdot 10^6}{40} = 50000 \text{ N}.$$

Această forță solicită pana la forfecare şi la strivire. Aria secțiunii de forfecare este (v. fig. 3.42) $A_f = 6 \cdot 80 = 480$ mm^2 şi, în consecință, tensiunea de forfecare va avea valoarea:

$$\tau = \frac{T}{A_f} = \frac{50000}{480} = 104 \text{ N/mm}^2.$$

Deoarece suprafața minimă pe care se distribuie forța produsă de momentul M_t este $A_s = 3{,}5 \cdot 80 = 280$ mm^2 tensiunea de strivire din pană are valoarea

$$\sigma = \frac{T}{A_s} = \frac{50000}{280} = 179 \text{ N/mm}^2.$$

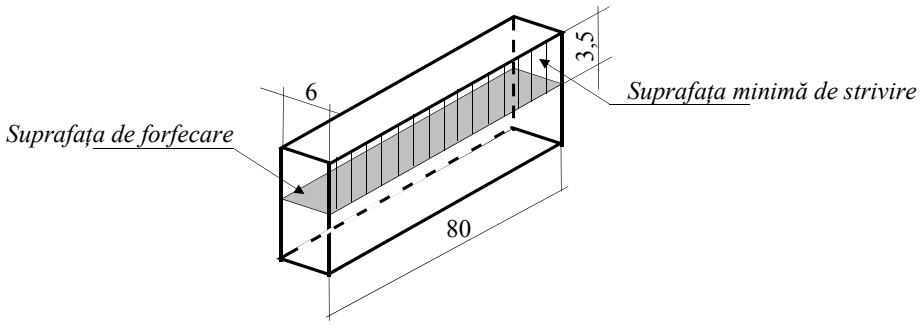


Fig. 3.42.

P.3.28. Două placi sunt solidarizate prin intermediul a două cordoane de sudură aşa cum se poate vedea în figura 3.43. Forța F = 160 kN se consideră că este aplicată la jumătatea distanței

dintre cordoanele de sudură. Să se dimensioneze cordoanele de sudură. Se va considera $\sigma_a = 150$ N/mm^2.

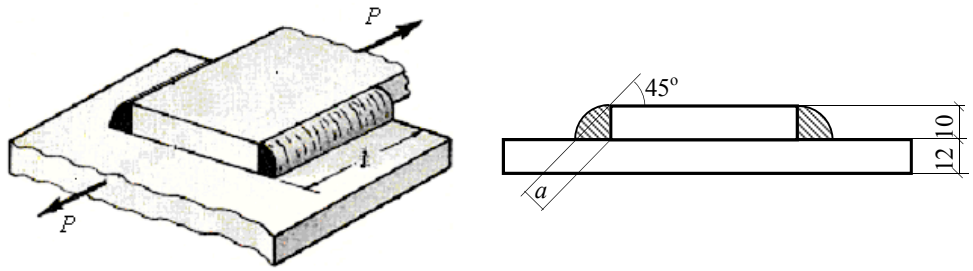


Fig. 3.43.

Deoarece forța F este aplicată la jumătatea distanței dintre cordoanele de sudură, acestea vor fi solicitate în mod egal cu forța:

$$N = \frac{F}{2} = \frac{160}{2} = 80 \text{ kN},$$

şi, în consecință, vor avea aceeaşi lungime.

Pentru calculul dimensiunilor cordoanelor de sudură se alege $a = 0{,}7g = 0{,}7 \cdot 10 = 7$ mm, deoarece $g = \min [10; 12] = 10$ mm (v. fig. 3.43). Lungimea cordonului de sudură se determină cu relația (3.32):

$$l_s = \frac{N}{a \cdot \tau_a^{sud}} = \frac{80000}{7 \cdot (0{,}65 \cdot 150)} = 117 \text{ mm}.$$

Lungimea reală a cordoanelor de sudură conform (3.33) este:

$$l_s' = 117 + 2 \cdot 7 = 131 \text{ mm}.$$

P.3.29. Barele unei grinzi cu zăbrele sunt alcătuite din câte două corniere cu brațele inegale. Prinderea barelor la noduri se face prin sudură. În bara cea mai solicitată efortul axial este $N = 140$ kN. Să se dimensioneze această bară şi să se calculeze prinderea. Rezistența admisibilă a materialului din care sunt confecționate cornierele este $\sigma_a = 150$ N/mm^2.

Bara este solicitată la întindere fapt pentru care dimensionarea se face cu formula (3.10):

$$A_{nec} = \frac{N}{\sigma_a} = \frac{140000}{150} = 933{,}33 \text{ mm}^2 = A_{dim} = 2 \cdot A_{corn}.$$

Aria necesară pentru o singură cornieră este $A_{corn} = 933{,}33/2 = 466{,}67$ mm^2. Se alege o cornieră L 40x60x5 care are aria secțiunii $A_{br} = 479$ mm^2 şi $e = 19{,}6$ mm. Condiția de verificare (3.11)

$$\sigma_{\max}^{ef} = \frac{140000}{2 \cdot 479} = 146 \text{ N/mm}^2 < \sigma_a.$$

este îndeplinită.

La noduri, efortul axial din fiecare bară este preluat de guseu prin intermediul cordoanelor de sudură, după cum se poate vedea în figura 3.44, *a*. Ca măsură suplimentară de siguranță calculul

prinderii prin sudură se face cu efortul capabil $N_{cap} = A^{ef} \cdot \sigma_a = 2 \cdot 479 \cdot 150 = 143700$ N în loc de efortul $N = 140000$ N. Valorile eforturilor N_1 şi N_2, preluate de cordoanele de sudură, se determină din condiția ca într-un punct de pe axa cornierei torsorul celor două eforturi să fie echivalent cu o singură forță dirijată după axă, de mărime egală cu $N_{cap}/2$ şi de sens contrar cu aceasta. Această condiție conduce la următoarele ecuații:

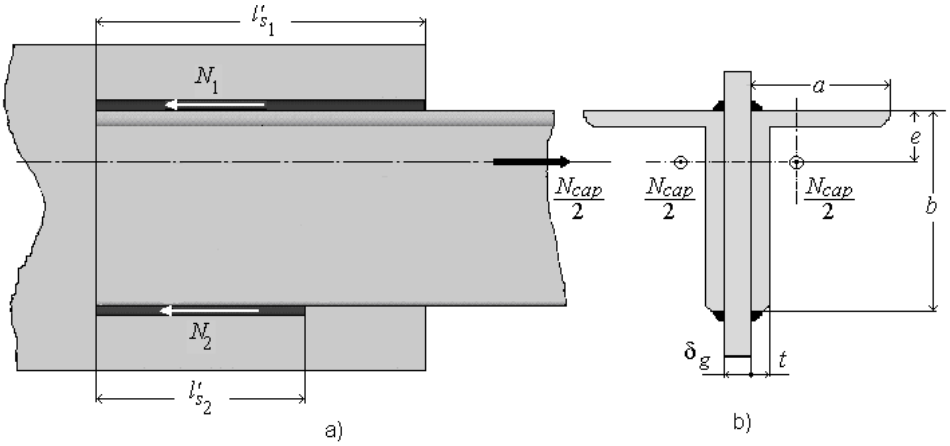


Fig. 3.44.

$$\begin{cases} N_1 + N_2 = \dfrac{N_{cap}}{2} \\ N_1 \cdot e - N_2 (b - e) = 0 \end{cases}$$

din care rezultă:

$$N_1 = \frac{N_{cap}}{2} \frac{b-e}{b} = \frac{143700}{2} \cdot \frac{60 - 19{,}6}{60} = 48379 \text{ N};$$

$$N_2 = \frac{N_{cap}}{2} \frac{e}{b} = \frac{143700}{2} \cdot \frac{19{,}6}{60} = 23471 \text{ N}.$$

Cu relația (3.32) se poate determina lungimea fiecărui cordon de sudură.

Pentru primul cordon de sudură se alege $a_1 = 0{,}7 \cdot 8 = 5{,}6$ mm deoarece $g = \min [\delta_g; a] = [8; 40] = 8$ mm (vezi fig. 3.50,b). Lungimea cordonului de sudură este:

$$l_{1s} = \frac{N_1}{a_1 \tau_a^{sud}} = \frac{48379}{5{,}6 \cdot (0{,}65 \cdot 150)} = 88{,}6 \text{ mm}.$$

Lungimea reală a primului cordon de sudură conform (3.33) este:

$$l'_{1s} = 88{,}6 + 2 \cdot 5{,}6 \approx 100 \text{ mm}.$$

Analog, pentru cordonul doi de sudură se alege $a_1 = 0{,}7 \cdot 5 = 3{,}5$ mm deoarece $g = \min[\delta_g; t] = [8; 5] = 5$ mm (vezi fig. 3.44, *b*). Rezultă:

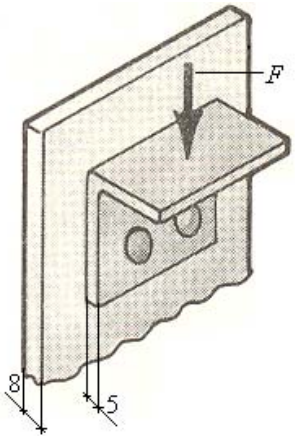


Fig. 3.45.

$$l_{1s} = \frac{N_2}{a_2 \tau_a^{sud}} = \frac{23471}{3{,}5 \cdot (0{,}65 \cdot 150)} = 68{,}8 \text{ mm}.$$

Lungimea reală a cordonului de sudură conform (3.33) este:

$$l'_{2s} = 68{,}8 + 2 \cdot 3{,}5 \approx 76 \text{ mm}.$$

P.3.30. În cadrul construcțiilor metalice pentru transmiterea solicitărilor structurilor orizontale la cele verticale se folosesc cleme metalice de forma celei prezentate în figura 3.45. Cunoscând că cele două nituri au diametrul d = 14 mm şi rezistența admisibilă σ_a = 150 N/mm^2, să se determine forța maximă F care poate fi preluată şi transmisă de clema metalică.

Se va considera că planul forței F se află foarte apropiat de planul de forfecare al niturilor. Forța maximă care poate fi preluată de clema metalică este:

$$F \leq N_{cap} = n \cdot R_{\text{nit}},$$

în care n = 2 este numărul de nituri iar rezistența unui nit R_{nit} se determină cu relația (3.30). Rezistența la forfecare a unui nit, conform (3.28):

$$R_{nit}^{f} = \frac{\pi \cdot 14^2}{2} \cdot 1 \cdot (0{,}8 \cdot 150) = 18472{,}6 \text{ N}$$

deoarece fiecare nit are o singură secțiune de forfecare.

Grosimea clemei metalice fiind mai mică decât grosimea guseului, rezistența la strivire a unui nit, conform cu (3.29):

$$R_{nit}^{str} = 14 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 150) = 21000 \text{ N}.$$

Rezultă

$$R_{nit} = \min[18472{,}6; 21000] = 18472{,}6 \text{ N}.$$

Forța maximă pe care o poate transmite clema metalică este:

$$F = 2 \cdot 18472{,}6 = 36945{,}2 \text{ N} \approx 37 \text{ tf}.$$

P.3.31. O bară din profil U10 (fig. 3.46) cu aria secțiunii transversale A = 1350 mm^2, solicitată de o forță P = 200 kN, este sudată de un guseu prin două cordoane de sudură de lungime l = 220 mm şi grosime a = 5 mm. Să se verifice profilul şi cordoanele de sudură dacă σ_a = 150 N/mm^2.

Condiția de rezistență a profilului U10 solicitat la tracțiune este îndeplinită pentru că:

$$\sigma_{\max}^{ef} = \frac{P}{A} = \frac{200000}{1350} = 148 \text{ N/mm}^2 < \sigma_a = 150 \text{ N/mm}^2.$$

Deoarece fiecare cordon de sudură preia un efort egal cu $P/2$ tensiunea maximă tangențială (de forfecare) care se dezvoltă în cordoanele de sudură este:

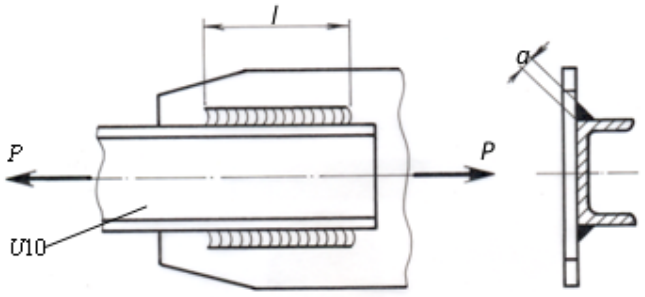


Fig. 3.46.

$$\tau_{sud} = \frac{200000}{2 \cdot 5 \cdot 220} = 90{,}9 \text{ N/mm}^2.$$

Cele două cordoane de sudură sun corect dimensionate deoarece:

$$\tau_{sud} = 90{,}9 \text{ N/mm}^2 < \tau_a^{sud} = 0{,}65 \cdot 150 = 97{,}5 \text{ N/mm}^2.$$

Probleme suplimentare

P.3.32. Să se verifice şurubul îmbinării din figura 3.53, cu $\sigma_a = 150$ N/mm^2.

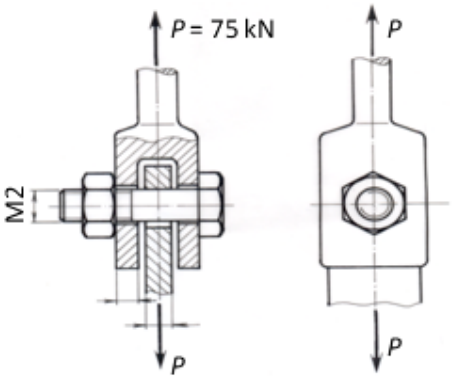


Fig. 3.47.

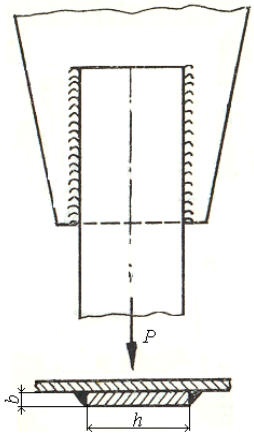


Fig. 3.48.

P.3.33. O platbandă solicitată axial cu forța P = 240 kN este prinsă de un guseu prin intermediul a două cordoane de sudură aşa cum este prezentat în figura 3.48. Ştiind că raportul dimensiunilor secțiunii este h/b = 10 şi că σ_a = 150 N/mm^2, să se dimensioneze platbanda şi cordoanele de sudură.

3.3. CARACTERISTICILE GEOMETRICE ALE SECŢIUNILOR PLANE

Determinarea tensiunilor şi deformaţiilor necesare calculelor de rezistenţă la bare implică cunoaşterea unor caracteristici geometrice care depind de forma şi dimensiunile secţiunii transversale ale acestora, ca de exemplu: aria, centrul de greutate, momente statice, momente de inerţie, raze de inerţie etc.

3.3.1. Momente statice

Pentru suprafaţa plană oarecare din figura 3.49, raportată la sistemul de axe rectangulare $y_1O_1z_1$, se alege un element de arie dA în punctul P de coordonate (y_1, z_1).

Momentele statice ale acestei suprafeţe faţă de axele O_1z_1, respectiv O_1y_1 sunt definite de expresiile:

$$S_{z_1} = \int_{(A)} y_1 \mathrm{d}A \ ; \ S_{y_1} = \int_{(A)} z_1 \mathrm{d}A . \quad (3.34)$$

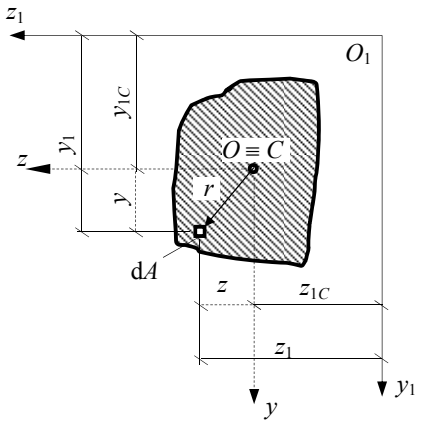


Fig. 3.49.

Deoarece coordonatele (y_{1C}, z_{1C}) [17] ale centrului de greutate C al suprafeţei considerate se determină cu relaţiile:

$$y_{1C} = \frac{\int_{(A)} y_1 \mathrm{d}A}{A}; \qquad z_{1C} = \frac{\int_{(A)} z_1 \mathrm{d}A}{A}; \quad (3.35)$$

momentele statice se pot exprima şi astfel:

$$S_{y_1} = A \cdot z_{1C} \ ; \ S_{z_1} = A \cdot y_{1C} . \quad (3.36)$$

Sistemul de axe rectangulare yOz, cu originea în centrul de greutate al suprafeţei se numeşte *sistem central de axe*, iar axele respective, *axe centrale*.

Momentele statice ale suprafeţei considerate, în raport cu sistemul central de axe yOz, sunt nule deoarece $y_C = z_C = 0$.

3.3.2. Momente de inerţie

Pentru aceeaşi suprafaţă oarecare (fig. 3.49) se definesc următoarele momente de inerţie geometrice:

– momentele de inerţie în raport cu axa y, respectiv z:

$$I_y = \int_{(A)} z^2 \mathrm{d}A \ ; \ I_z = \int_{(A)} y^2 \mathrm{d}A, \tag{3.37}$$

denumite momente de inerţie axiale;

– momentul de inerţie centrifugal:

$$I_{zy} = \int_{(A)} zy \mathrm{d}A; \tag{3.38}$$

– momentul de inerţie în raport cu punctul O:

$$I_O = \int_{(A)} r^2 \mathrm{d}A. \tag{3.39}$$

Deoarece $r^2 = y^2 + z^2$ se deduce că:

$$I_O = I_y + I_z, \tag{3.40}$$

relaţie valabilă oricare ar fi sistemul de referinţă yOz.

Aceste momente de inerţie geometrice au ca unităţi de măsură: $[\, I \,] = \mathrm{L}^4$.

Dacă axele sistemului de referinţă yOz trec prin centrul de greutate al suprafeţei atunci I_y şi I_z se numesc *momente de inerţie axiale centrale*.

3.3.2.1. Momentele de inerţie axiale centrale ale unei suprafeţe circulare

Folosind coordonatele polare r şi φ, elementul de suprafaţă este $\mathrm{d}A = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$ (fig. 3.50). În acest caz momentul de inerţie polar este:

$$I_O = \int_{(A)} r^2 \mathrm{d}A = \iint r^3 \mathrm{d}A = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{D/2} r^3 \mathrm{d}r = \frac{\pi D^4}{32}, \tag{3.41}$$

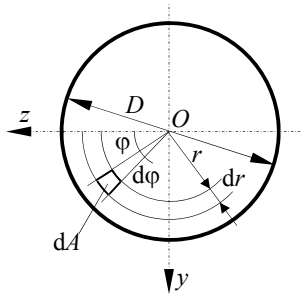


Fig.3.50.

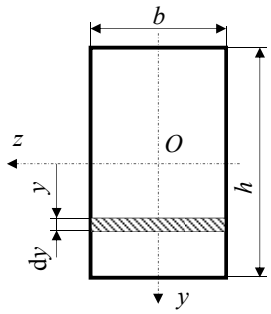


Fig. 3.51.

unde D este diametrul suprafeței circulare.

Deoarece axele Oz şi Oy sunt axe de simetrie, există relația $I_y = I_z$ şi deci, în baza egalității (3.40):

$$I_y = I_z = \frac{I_O}{2} = \frac{\pi D^4}{64}. \tag{3.42}$$

3.3.2.2. Momentele de inerţie axiale centrale ale unei suprafeţe dreptunghiulare

Pentru calculul momentului de inerție axial I_z al dreptunghiului din figura 3.51, la distanța y de axa Oz s-a luat un element de suprafață $\mathrm{d}A = b\mathrm{d}y$. Aplicând a doua relație (3.37) rezultă:

$$I_z = \int_{(A)} y^2 \mathrm{d}A = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 b \mathrm{d}y = b\left.\frac{y^3}{4}\right|_{-h/2}^{+h/2} = \frac{bh^3}{12}. \tag{3.43}$$

Procedând analog în raport cu axa Oy (elementul de arie $\mathrm{d}A$ fiind ales de această data paralel cu axa Oy), $\mathrm{d}A = h\mathrm{d}z$, se obține:

$$I_y = \frac{hb^3}{12}. \tag{3.44}$$

Deoarece axele Oy şi Oz sunt axe de simetrie, prin extrapolarea proprietăților momentelor de inerție masice utilizate în mecanica teoretică, momentul de inerție centrifugal $I_{zy} = 0$

3.3.3. Variaţia momentelor de inerţie la translaţia axelor

Se consideră suprafața oarecare A din figura 3.52 raportată la sistemul de axe yOz care are originea în centrul de greutate al acesteia.

Se propune determinarea momentele de inerție axiale ale suprafeței considerate în raport cu axele O_1z_1 şi O_1y_1 , paralele cu axele Oz, respectiv Oy, în funcție de momentele de inerție I_z, I_y şi I_{zy}, presupuse cunoscute.

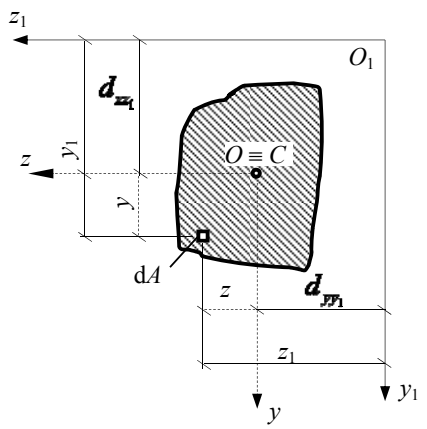


Fig. 3.52.

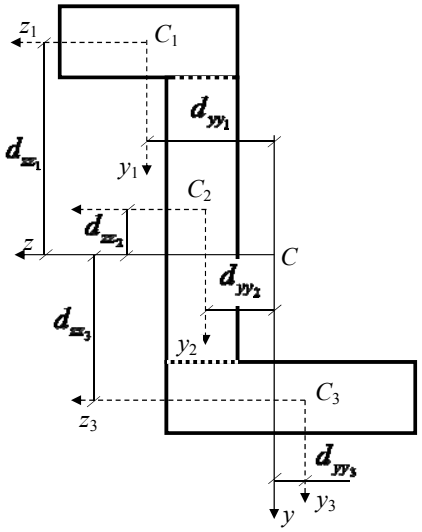


Fig. 3.53.

Cu notațiile din figura 3.52 se poate scrie $y_1 = y + d_{zz_1}$ şi deci:

$$I_{z_1} = \int_{(A)} y_1^2 \mathrm{d}A = \int (y + d_{zz_1})^2 dA = \int_{(A)} y^2 \mathrm{d}A + 2d_{zz_1} \int_{(A)} y \mathrm{d}A + d_{zz_1}^2 \int_{(A)} \mathrm{d}A$$

din care rezultă

$$I_{z_1} = I_z + Ad_{zz_1}^2 \tag{3.45}$$

deoarece $\int_{(A)} y \mathrm{d}A = S_z = 0$, axă Oz fiind axă centrală .

Analog

$$I_{y_1} = I_y + Ad_{yy_1}^2 . \tag{3.46}$$

Pentru momentul de inerţie centrifugal se poate scrie:

$$I_{z_1y_1} = \int_{(A)} y_1 z_1 \mathrm{d}A = \int_{(A)} (y + d_{zz_1})(z + d_{yy_1})\mathrm{d}A =$$

$$= \int_{(A)} yz\mathrm{d}A + d_{zz_1}\int_{(A)} z\mathrm{d}A + d_{yy_1}\int_{(A)} y\mathrm{d}A + d_{yy_1}d_{zz_1}\int_{(A)} \mathrm{d}A$$

şi, deci:

$$I_{z_1y_1} = I_{zy} + Ad_{yy_1}d_{zz_1} \tag{3.47}$$

Relaţiile (3.45), (3.46) şi (3.47) sunt utile la calculul momentelor de inerţie ale figurilor compuse. De exemplu pentru suprafaţa plană din figura 3.53 momentele de inerţie se determină cu relaţiile:

$$\begin{aligned} I_z &= \sum_1^3 (I_{z_i}^i + A_i d_{zz_i}^2) \\ I_y &= \sum_1^3 (I_{y_i}^i + A_i d_{yy_i}^2) \\ I_{zy} &= \sum_1^3 (I_{z_iy_i}^i + A_i d_{zz_i} d_{yy_i}) \end{aligned} \tag{3.48}$$

Se poate constata că pentru suprafaţa din figura 3.53, momentele de inerţie centrifugale ale celor trei dreptunghiuri, în care aceasta a fost discretizată, sunt nule, $I_{z_iy_i} = 0$, deoarece axele C_iz_i, C_iy_i sunt axe de simetrie.

3.3.4. Variaţia momentelor de inerţie la rotaţia axelor

Fie suprafaţa A şi sistemul de axe yOz faţă de care se cunosc momentele de inerţie (fig. 3.54). Ne propunem să determinăm momentele de inerţie faţă de sistemul de axe y_1Oz_1 rotit cu unghiul α faţă de sistemul de axe yOz. Se precizează că $\alpha \in [0, 2\pi]$ şi are sensul pozitiv indicat în figura 3.54.

Fie P centrul de greutate al elementului de suprafaţă dA, iar $\bar{r}$ vectorul lui de poziţie. Deoarece:

$$\bar{r} = y\bar{j} + z\bar{k} = y_1\bar{j}_1 + z_1\bar{k}_1 ,$$

între coordonatele (y, z) şi (y_1, z_1) există relațiile:

$$\begin{cases} y_1 = y\cos\alpha + z\sin\alpha \\ z_1 = -y\sin\alpha + z\cos\alpha \end{cases} \qquad (3.49)$$

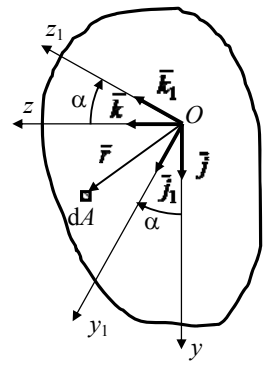


Fig. 3.54.

În baza relațiilor (3.49) şi (3.37) se poate scrie:

$$I_{z_1} = \int_{(A)} y_1^2 \mathrm{d}A = \int_{(A)} (y\cos\alpha + z\sin\alpha)^2 \mathrm{d}A =$$

$$= \cos^2\alpha \int_{(A)} y^2 \mathrm{d}A + \sin^2\alpha \int_{(A)} z^2 \mathrm{d}A + 2\cos\alpha\sin\alpha \int_{(A)} yz\mathrm{d}A,$$

de unde rezultă:

$$I_{z_1} = I_z \cos^2\alpha + I_y \sin^2\alpha + 2I_{yz}\sin\alpha\cos\alpha,$$

sau:

$$I_{z_1} = \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{I_z - I_y}{2}\cos 2\alpha + I_{yz}\sin 2\alpha \qquad (3.50)$$

Pentru axa Oy_1 se deduce în mod similar:

$$I_{y_1} = \frac{I_z + I_y}{2} - \frac{I_z - I_y}{2}\cos 2\alpha - I_{yz}\sin 2\alpha \qquad (3.51)$$

Pentru momentul de inerție centrifugal se poate scrie:

$$I_{z_1y_1} = \int_{(A)} y_1 z_1 \mathrm{d}A = \int_{(A)} (y\cos\alpha + z\sin\alpha)(-y\sin\alpha + z\cos\alpha)\mathrm{d}A =$$

$$= -\sin\alpha\cos\alpha \int_{(A)} y^2 \mathrm{d}A + \sin\alpha\cos\alpha \int_{(A)} z^2 \mathrm{d}A + \cos^2\alpha \int_{(A)} yz\mathrm{d}A - \sin^2\alpha \int_{(A)} yz\mathrm{d}A,$$

şi deci

$$I_{z_1y_1} = -\frac{I_z}{2}\sin 2\alpha + \frac{I_y}{2}\sin 2\alpha + I_{zy}\cos 2\alpha,$$

sau

$$I_{z_1y_1} = -\frac{I_z - I_y}{2}\sin 2\alpha + I_{zy}\cos 2\alpha \qquad (3.52)$$

Relațiile (3.50), (3.51) şi (3.52) permit determinarea momentelor de inerție în raport cu oricare pereche de axe rectangulare y_1Oz_1 în funcție de I_z, I_y, I_{zy} şi unghiul α.

Se constată că momentele de inerție $I_{z_1}, I_{y_1}, I_{z_1y_1}$ sunt funcții de (2α) şi deci ele vor putea avea şi valori extreme, minime sau maxime.

De exemplu, pentru a determina valoarea unghiului α pentru care I_{z_1} şi I_{y_1} admit o valoare extremă, se derivează relațiile (3.50) şi (3.51) în funcție de (2α).

Se obține:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}I_{z_1}}{\mathrm{d}(2\alpha)} &= -\frac{I_z - I_y}{2}\sin 2\alpha + I_{zy}\cos 2\alpha = I_{z_1y_1} \\ \frac{\mathrm{d}I_{y_1}}{\mathrm{d}(2\alpha)} &= \frac{I_z - I_y}{2}\sin 2\alpha - I_{zy}\cos 2\alpha = -I_{z_1y_1} \end{aligned} \tag{3.53}$$

Din relațiile (3.53) se constată că momentele de inerție axiale I_{z_1} şi I_{y_1} admit valori extreme atunci când momentul de inerție centrifugal $I_{z_1y_1}$ se anulează adică:

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2I_{zy}}{I_z - I_y} \tag{3.54}$$

Se constată că pentru $\alpha \in [0, 2\pi]$ relația (3.54) admite două soluții $2\alpha_0$ şi $2\alpha_0 + \pi$.

Rezultă că există două direcții cărora le corespund două axe, perpendiculare între ele (conjugate), față de care momentele de inerție axiale I_{z_1} şi I_{y_1} au valori extreme, iar $I_{z_1y_1} = 0$.

Axele față de care momentul de inerție centrifugal este nul, iar momentele de inerție axiale au valori extreme se numesc *axe principale de inerție*, iar momentele de inerție axiale respective, *momente de inerție axiale principale*.

Valoarea momentelor de inerție principale se obține înlocuind relația(3.54) în (3.50) şi (3.51). Rezultă:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{I_z + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{zy}^2} \\ I_2 &= \frac{I_z + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{zy}^2} \end{aligned} \tag{3.55}$$

Din însumarea celor două momente de inerție axiale principale I_1 şi I_2 rezultă

$$I_1 + I_2 = I_z + I_y = I_o \tag{3.56}$$

care exprimă invarianța sumei momentelor de inerție axiale la rotația axelor.

Din relațiile (3.55) se constată că $I_1 > I_2$, cu alte cuvinte I_1 este momentul de inerție axial maxim, iar I_2 momentul de inerție minim.

Pentru a determina direcțiile axelor principale de inerție *I*, *II* se derivează de două ori relația (3.51) în funcție de (2α). Ținând seama de (3.54) se obține:

$$\frac{\mathrm{d}^2 I_{y_1}}{\mathrm{d}(2\alpha)^2} = \frac{I_z - I_y}{2}\cos 2\alpha + I_{zy}\sin 2\alpha = \left[\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{zy}^2\right]\cos^2 2\alpha_0 \frac{\tan\alpha_0}{I_{zy}}, \tag{3.57}$$

al cărui semn este dat de raportul $\dfrac{\tan\alpha_0}{I_{zy}}$.

Pentru valoarea maximă I_1 trebuie îndeplinită condiția $\dfrac{\tan\alpha_0}{I_{zy}} < 0$ adică, dacă $I_{zy} < 0$ atunci $\tan\alpha_0 > 0 \Rightarrow \alpha < \pi/2$ şi deci prima direcție principală este indicată de α_0, iar dacă $I_{zy} > 0$ atunci $\tan\alpha_0 < 0 \Rightarrow \alpha > \pi/2$, prima direcție principală fiind indicată de $\alpha_0 + \pi/2$.

Dacă axele principale de inerție trec prin centrul de greutate al suprafeței atunci ele se numesc axe centrale principale de inerție.

Din cele prezentate anterior rezultă că dacă o suprafață admite o axă de simetrie atunci acea axă este axă centrală principală de inerție. Orice axă perpendiculară pe o axă de simetrie este axă principală de inerție, iar dacă axa trece şi prin centrul de greutate al secțiuni, atunci ea este axă centrală principală de inerție.

Probleme rezolvate

P.3.34. Să se determine momentul de inerție al unui triunghi oarecare în raport cu o axă care coincide cu baza lui.

Să raportăm triunghiul la un sistem de referință aşa cum este prezentat în figura 3.55. Momentul de inerție al triunghiului în raport cu baza orizontală este:

$$I_z = \int_{(A)} y^2 \mathrm{d}A.$$

La depărtarea y de bază se consideră un element de suprafață dA = sdy. Din triunghiuri asemenea se poate scrie $s/b = (h - y)/h$. Făcând substituțiile necesare rezultă:

$$I_z = \int_0^h y^2 \frac{b}{h}(h - y)\mathrm{d}y = \frac{b}{h}\left[h\int_0^h y^2 \mathrm{d}y - \int_0^h y^3 \mathrm{d}y\right] = \frac{1}{12}bh^3.$$

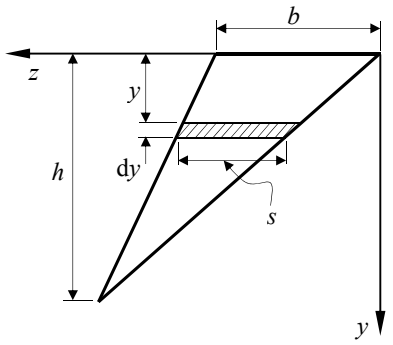


Fig. 3.55.

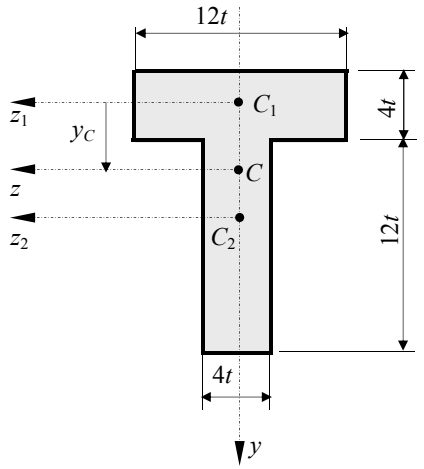


Fig. 3.56.

P.3.35. Pentru secțiunea din figura 3.56 să se determine momentele de inerție axiale centrale principale.

Deoarece axa y este axă de simetrie pentru secțiunea considerată, ea este automat axă centrală principală de inerție. Cum axa z este perpendiculară pe axa y şi trece prin centrul de greutate al secțiunii este şi ea axă centrală principală de inerție. Pentru calculul momentelor de inerție I_y şi I_z trebuie calculată poziția centrului de greutate al secțiunii adică y_C. Pentru aceasta se împarte secțiunea în două suprafețe dreptunghiulare cu centrele de greutate în C_1, respectiv C_2. În conformitate cu notațiile din figura 3.56 rezultă:

$$y_C = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} = \frac{4t \cdot 12t \cdot (2t + 6t)}{4t \cdot 12t + 4t \cdot 12t} = 4t\,.$$

Aplicând teorema lui Steiner privind variația momentelor de inerție la translația axelor, exprimată de relațiile (3.48), rezultă:

$$I_z = \left[\frac{(4t)^3 \cdot 12t}{12} + 4t \cdot 12t \cdot (4t)^2\right] + \left[\frac{(12t)^3 \cdot 4t}{12} + 4t \cdot 12t \cdot (4t)^2\right] = 2176t^4$$

$$I_y = \left[\frac{(12t)^3 \cdot 4t}{12}\right] + \left[\frac{(4t)^3 \cdot 12t}{12}\right] = 640t^4\,.$$

Deoarece axele y şi z sunt axe principale de inerție momentul de inerție centrifugal $I_{zy} = 0$.

P.3.36. Pentru secțiunea din figura 3.57 să se determine momentele de inerție centrale principale şi direcțiile axelor principale de inerție.

Pentru calculul momentelor principale de inerție este necesară determinarea mai întâi a momentelor de inerție I_y, I_z şi I_{zy} în raport cu axele centrale z şi y ce trec prin centrul de greutate al secțiunii.

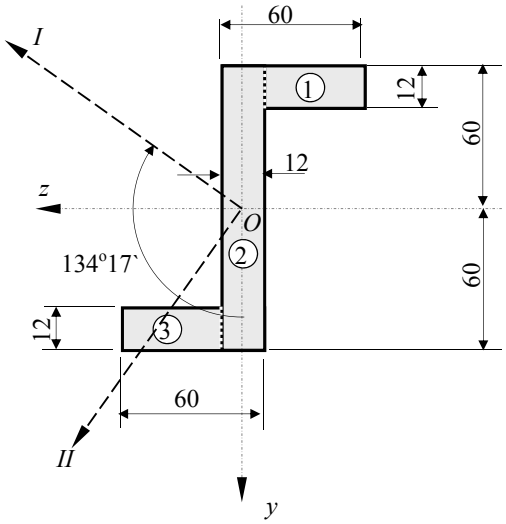


Fig. 3.57.

Se poate constata uşor că axele *z* şi *y* sunt axe centrale deoarece centrul de greutate al secţiunii este în punctul *O*.

Secţiunea se poate împărţi în trei arii dreptunghiulare 1, 2 şi 3 aşa cum este arătat în figura 3.57. În baza relaţiilor (3.48) se obţine:

$$I_z = 2\cdot\left[\frac{12^3\cdot(60-12)}{12}+12\cdot(60-12)\cdot(60-6)^2\right]+\left[\frac{120^3\cdot 12}{12}\right]=5{,}101056\cdot 10^6\ \text{mm}^4;$$

$$I_y = 2\cdot\left[\frac{(60-12)^3\cdot 12}{12}+(60-12)\cdot 12\cdot(24+6)^2\right]+\left[\frac{12^3\cdot 120}{12}\right]=1{,}275264\cdot 10^6\ \text{mm}^4;$$

$$I_{zy} = 12\cdot(60-12)\cdot(24+6)\cdot(60-6)+12\cdot(60-12)\cdot\left[-(24+6)\right]\cdot\left[-(60-6)\right]=1{,}86624\cdot 10^6\ \text{mm}^4.$$

Momentele de inerţie centrale principale se determină cu relaţiile (3.55):

$$I_{1,2} = \left[\frac{5{,}101056+1{,}275264}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{5{,}101056-1{,}275264}{2}\right)^2+(1{,}8662)^2}\right]\cdot 10^6,$$

de unde rezultă:

$I_1 = 5{,}860616\cdot 10^6\text{mm}^4$; $\qquad I_2 = 0{,}515704\cdot 10^6\text{mm}^4$.

Orientarea axelor principale de inerţie se determină cu relaţia (3.54):

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2\cdot 1{,}86624\cdot 10^6}{(5{,}101056-1{,}275264)\cdot 10^6} = 0{,}9840588.$$

Rezultă:

$\alpha_0 = 44^o17'$; $134^o17'$.

Deoarece $I_{zy} > 0$ direcția principală I este dată de unghiul $134^o17'$ pentru care $\tan\alpha_0<0$. Direcțiile principale de inerție sunt precizate în figura 3.57.

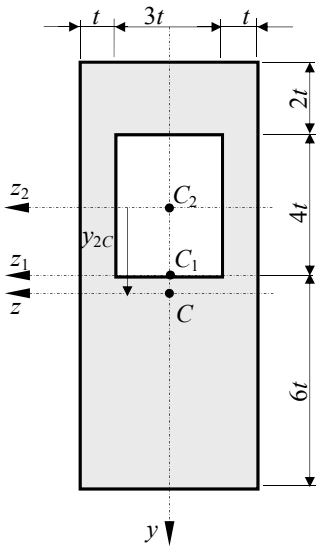


Fig. 3.58.

P.3.37. Să se determine momentele de inerție centrale principale pentru secțiunea din figura 3.58.

Secțiunea fiind simetrică în raport cu axa y centrul de greutate se află pe această axă. Este necesar să se determine numai y_C. Pentru aceasta se consideră secțiunea ca fiind alcătuită din dreptunghiul mare cu centrul în C_1 din care se scade dreptunghiul mic cu centrul în C_2. Rezultă:

$$y_{2C} = \frac{2t \cdot 5t \cdot 12t}{5t \cdot 12t - 3t \cdot 4t} = 2{,}5t$$

Aplicând relațiile (3.48) se obține:

$$I_z = \left[\frac{(12t)^3 \cdot 5t}{12} + 5t \cdot 12t \cdot (2{,}5t - 2t)^2\right] - \left[\frac{(4t)^3 \cdot 3t}{12} + 3t \cdot 4t \cdot (2{,}5t)^2\right] = 644t^4,$$

$$I_y = \frac{(5t)^3 \cdot 12t}{12} - \frac{(3t)^3 \cdot 4t}{12} = 116t^4.$$

Momentul de inerție centrifugal I_{zy} este nul deoarece axele z şi y sunt axe centrale principale de inerție.

P.3.38. Să se determine momentele de inerție față de axele Cy şi Cz pentru secțiunea formată din trei cercuri cu diametru d, dispuse ca în figura 3.59.

Centrul de greutate al secțiunii se află pe axa y, axă de simetrie, la 2/3 de vârful C_1 al triunghiului $C_1C_2C_3$ şi la 1/3 de baza lui.

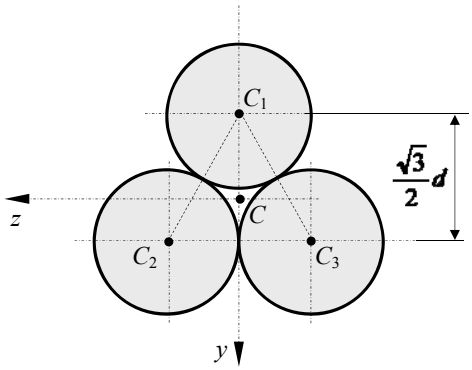


Fig. 3.59.

Cu relațiile (3.48) se obține:

$$I_z = \left[\frac{\pi d^4}{64} + \frac{\pi d^2}{4}\left(\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}d\right)^2\right] + 2\left[\frac{\pi d^4}{64} + \frac{\pi d^2}{4}\left(\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}d\right)^2\right] = \frac{11}{64}\pi d^4,$$

$$I_y = \frac{\pi d^4}{64} + 2\left[\frac{\pi d^4}{64} + \frac{\pi d^2}{4}\left(\frac{d}{2}\right)^2\right] = \frac{11}{64}\pi d^4.$$

Egalitatea celor două momente de inerţie axiale se explică prin faptul că cele trei cercuri sunt situate în poziţii identice faţă de trei axe centrale.

Probleme suplimentare

P.3.39. Pentru secţiunea din figura 3.60 să se determine momentele de inerţie centrale principale.

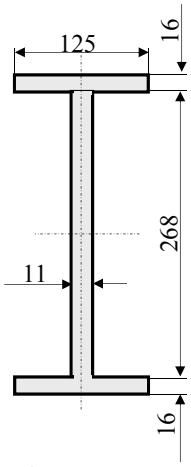


Fig. 3.60.

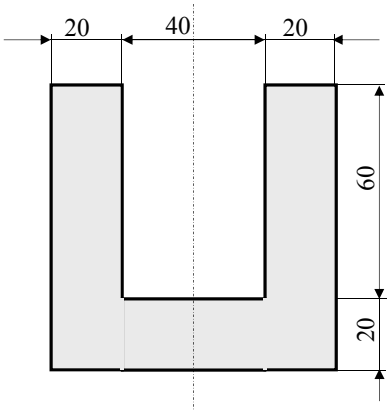


Fig. 3.61.

P.3.40. Pentru secţiunea din figura 3.61 să se determine momentul de inerţie în raport cu o axă orizontală care trece prin centrul de greutate.

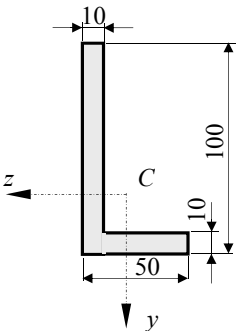


Fig. 3.62.

P.3.41. Pentru profilul cornier L 100 x 50 x 10, din figura 3.62, considerat ca format din dreptunghiuri, să se calculeze:

a) momentele de inerţie în raport cu axele *yCz* ce trec prin centrul de greutate;

b) poziţia axelor principale şi valoarea momentelor principale de inerţie.

3.4. ÎNCOVOIEREA BARELOR DREPTE CU SECŢIUNE CONSTANTĂ

Încovoierea este solicitarea simplă a unei bare drepte sau a unei porțiuni dintr-o bară dreaptă atunci când în toate secțiunile transversale ale acesteia există numai efortul secțional M_y sau M_z.

Deoarece între momentul încovoietor M şi forța tăietoare T există relația de legătură $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = T$, (vezi par. 2.2), rezultă că, atunci când momentul încovoietor variază în lungul barei, în secțiunea acesteia există şi forță tăietoare.

a) b)

Fig. 3.63.

Deci, o bară, sau o porțiune dintr-o bară, este solicitată numai la încovoiere, adică la *încovoiere pură*, atunci când momentul încovoietor este constant în lungul barei (fig. 3.63).

În caz contrar, bara este solicitată la încovoiere şi forfecare, solicitare care poartă numele de *încovoiere simplă*.

3.4.1. Încovoierea pură şi dreaptă

În cazul încovoierii pure şi drepte, în toate secțiunile transversale ale barei apare numai un moment care este dirijat după o axă principală de inerție, aşa cum se poate observa în figura 3.64 unde momentul încovoietor M_z este dirijat după axa Oz perpendiculară pe axa Oy care este axă de simetrie a secțiunii şi deci axă principală de inerție.

3.4.1.1. Distribuţia tensiunilor pe secţiunea dreaptă a barei

Considerând că momentul încovoietor este orientat după axa *Oz* (fig. 3.64) relațiile de echivalență (1.29) sunt:

$$
\begin{aligned}
N &= \int_{(A)} \sigma_x \mathrm{d}A = 0; & M_x &= \int_{(A)} \left(\tau_{xy} \cdot z - \tau_{xz} \cdot y\right) \mathrm{d}A = 0; \\
T_z &= \int_{(A)} \tau_{xy} \mathrm{d}A = 0; & M_y &= -\int_{(A)} \sigma_x \cdot z \mathrm{d}A = 0; \\
T_y &= \int_{(A)} \tau_{xz} \mathrm{d}A = 0; & M_z &= \int_{(A)} \sigma_x \cdot y \mathrm{d}A \neq 0.
\end{aligned}
\tag{3.58}
$$

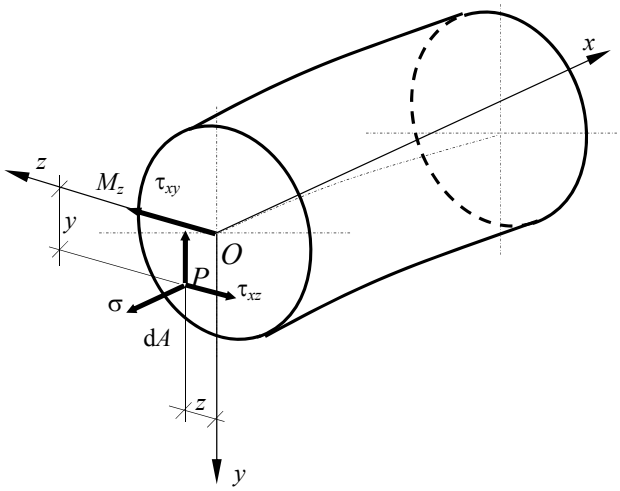


Fig.3.64.

Deoarece distribuția tensiunilor pe secțiune nu se cunoaşte se apelează la aspectul geometric pentru a determina relațiile dintre deformații şi deplasări, în baza ipotezei secțiunilor plane.

Pentru aceasta se vor trasa pe suprafața exterioară a barei nedeformate două curbe directoare ce reprezintă urmele a două secțiuni drepte imaginare prin bară, infinit apropiate şi, între ele, segmente paralele cu axa barei, reprezentând elemente de lungime d*x* din fibrele de la suprafața exterioară a barei (fig. 3.65, *a*).

După solicitarea barei cu momentele *M* la capetele ei (fig. 3.65, *b*) se constată următoarele:

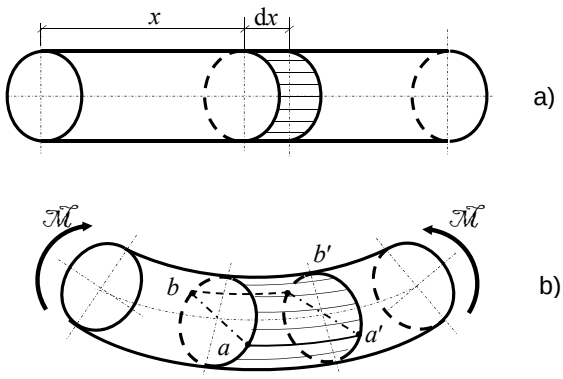


Fig.3.65.

a) Fibrele de lungime d*x* de la exteriorul barei s-au deformat diferit, astfel încât:

– fibrele *a–a′* şi *b–b′* situate de o parte şi de alta a barei rămân nedeformate;

– fibrele situate deasupra dreptelor *ab*, respectiv *a′b′* se scurtează, iar fibrele situate sub acestea se alungesc;

– unghiurile drepte dintre direcţia fibrelor şi tangentele la curbele directoare, rămân drepte şi după deformare.

Din cele prezentate rezultă:

$$\varepsilon_0 = f(y_0, z_0) \neq 0\,;\ \gamma_0 = g(y_0, z_0) = 0\,, \tag{3.59}$$

unde (y_0, z_0) sunt coordonatele unui punct de pe suprafaţa secţiunii drepte, situat pe o curbă directoare (deci la exteriorul barei), faţă de un sistem de axe oarecare al secţiunii.

b) În baza ipotezei lui Bernoulli, cele observate la exteriorul barei se extind asupra fibrelor din interiorul elementului de bară de lungime d*x* (fig. 3.66):

– toate fibrele care au un capăt pe dreapta *ab* şi celălalt capăt pe dreapta *a′b′* rămân nedeformate, lungimea lor fiind aceeaşi şi anume d*x*;

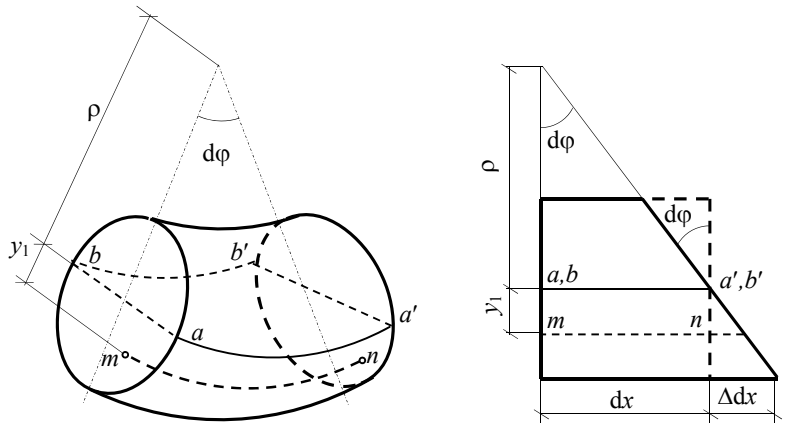
– o fibră *m-n*, situată la depărtarea y_1 de dreapta *ab* se alungeşte proporţional cu această depărtare;

– unghiurile drepte dintre direcţia fibrelor şi planul secţiunii drepte rămân drepte şi după deformare.

Pe baza acestor concluzii, în conformitate cu notaţiile din figura 3.66, se poate scrie:

$$\varepsilon = \frac{\overline{mn'} - \overline{mn}}{\overline{mn}} = \frac{(\mathrm{d}x + \Delta\mathrm{d}x) - \mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \frac{\Delta\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = y_1\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = y_1\omega\ \ ;\ \ \gamma = 0\,, \tag{3.60}$$

unde dφ este unghiul cu care se rotesc, una faţă de cealaltă, două secţiuni situate la depărtarea d*x*, în jurul unei axe paralelă cu dreapta *ab*; $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$ se numeşte *încovoiere specifică* şi reprezintă unghiul cu care se rotesc, una faţă de cealaltă, două secţiuni situate la o depărtare egală cu unitatea. Pentru toate punctele unei secţiuni ω = const.



a) b)

Fig. 3.66.

Aspectul fizic constă în legea simplă a lui Hooke exprimată de relațiile (3.4), care în cazul de față capătă forma:

$$\sigma = E\cdot\varepsilon = E\cdot\omega\cdot y_1. \;\; ; \;\; \tau = G\cdot\gamma = 0. \tag{3.61}$$

Din a doua relație (3.61) se deduce că $\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$, ceea ce conduce la concluzia că a doua, a treia şi a patra egalitate din (3.58) se verifică.

Din prima relație (3.61) rezultă că în punctele situate pe dreapta *ab* pentru care $y_1 = 0$, tensiunile normale σ sunt nule.

Dreapta *ab* este numită *axa neutră* a secțiunii şi este definită sub unul din următoarele moduri :

– locul geometric al punctelor de pe secțiune care reprezintă capetele fibrelor care nu se alungesc şi nu se scurtează;

– intersecția planului secțiunii după deformarea barei cu planul secțiunii înainte de deformarea acesteia;

– succesiunea punctelor de pe secțiunea dreaptă a barei în care tensiunile σ sunt nule.

Suprafața *abb′a′*, generată de axele neutre ale diferitelor secțiuni ale barei, reprezintă *suprafața neutră* a acesteia.

Înlocuind expresia lui σ din (3.61) în prima egalitate din (3.58) se obține:

$$N = E\omega \int_{(A)} y_1 \mathrm{d}A = 0 .$$

Integrala $\int\limits_{(A)} y_1 \mathrm{d}A = S_n$ reprezintă momentul static al secţiunii barei în raport cu dreapta *ab*, deci în raport cu axa neutră. Pentru ca $S_n = 0$ trebuie ca axa neutră să treacă prin centrul de greutate al secţiunii.

Înlocuind expresia lui σ din (3.61) în a cincia egalitate din (3.58) se obţine:

$$M_y = -E\omega \int\limits_{(A)} y_1 z \mathrm{d}A = 0 .$$

Integrala $\int\limits_{(A)} y_1 z \mathrm{d}A = I_{ny}$ reprezintă momentul de inerţie centrifugal al secţiunii în raport cu axa neutră şi axa *y*. Pentru ca $I_{ny} = 0$ axa neutră trebuie să fie conjugată cu axa *y* care este axă de simetrie a secţiunii (vezi ipoteza iniţială).

Deoarece axa neutră trebuie să treacă prin centrul de greutate al secţiunii şi în acelaşi timp să fie perpendiculară pe axa *y*, rezultă că ea coincide cu axa *z* şi deci $y_1 = y$.

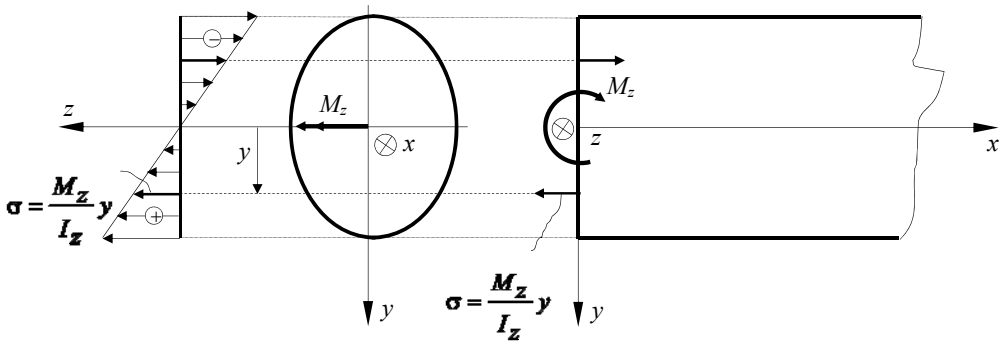


Fig. 3.67.

În această situaţie, înlocuind expresia lui σ din (3.61) în ultima egalitate din (3.58) se obţine:

$$M_z = E\omega \int\limits_{(A)} y_1 y \mathrm{d}A = E\omega \int\limits_{(A)} y^2 \mathrm{d}A = E\omega I_z ,$$

unde I_z reprezintă momentul de inerţie axial al secţiunii în raport cu axa *Oz*.

Ţinând seama de prima relaţie (3.61), rezultă:

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} \cdot y \tag{3.62}$$

formulă care defineşte repartiţia tensiunilor σ pe secţiunea unei bare solicitată la încovoiere pură şi care poartă numele de formula lui Navier.

Din (3.62) se deduce că tensiunea σ variază liniar pe secțiune, proporțional cu depărtarea *y* față de axa neutră, care coincide cu axa *z*, fiind nulă în punctele de pe aceasta (fig.3.67).

3.4.1.2. Calculul de rezistenţă

În conformitate cu formula lui Navier (3.62), pentru materialele care se comportă identic la întindere sau compresiune, punctul cel mai solicitat de pe secțiune este punctul cel mai depărtat de axa neutră, axa *z*, unde:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_z|}{I_z} \cdot |y_{\max}| = \frac{|M_z|}{W_z}. \tag{3.63}$$

În relația (3.63)

$$W_z = \frac{I_z}{|y_{\max}|} \tag{3.64}$$

este *modulul de rezistență la încovoiere* al secțiunii. El reprezintă o caracteristică geometrică a secțiunii şi se măsoară în unități de lungime la puterea a treia (de obicei în mm^3).

Condiția de rezistență pentru întreaga bară se pune în punctul cel mai depărtat de axa *z* în secțiunea în care momentul încovoietor este maxim, adică:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_z^{\max}|}{W_z} \le \sigma_a. \tag{3.65}$$

Relația (3.65) poate fi folosită pentru:

– *dimensionarea* barei atunci când se cunosc solicitarea, deci se cunoaşte valoarea lui $M_z^{\max}$, şi materialul din care aceasta este confecționată, adică rezistența admisibilă σ_a:

$$W_z^{nec} = \frac{|M_z^{\max}|}{\sigma_a} = W_z^{\dim}, \tag{3.66}$$

unde W_z^{nec} reprezintă modulul de rezistență la încovoiere necesar pentru ca bara să reziste la momentul încovoietor $M_z^{\max}$, iar $W_z^{\dim}$ este modulul de rezistență la încovoiere în funcție de dimensiunile secțiunii barei.

– *verificarea* dimensiunilor secţiunii barei atunci când se cunosc solicitarea, forma şi dimensiunile secţiunii barei precum şi rezistenţa admisibilă:

$$\sigma_{\max}^{ef} = \frac{\left|M_z^{\max}\right|}{W_z^{ef}} \le \sigma_a \tag{3.67}$$

unde W_z^{ef} reprezintă modulul de rezistenţă la încovoiere efectiv al secţiunii barei; verificarea barei se va face după fiecare dimensionare, ca măsură suplimentară de siguranţă în ceea ce priveşte corectitudinea calculelor.

– determinarea *efortului capabil*, adică a momentului de încovoiere maxim $M_z^{\max}$ atunci când se cunosc forma şi dimensiunile secţiunii barei precum şi rezistenţa admisibilă:

$$\left|M_z^{\max}\right| \le M_z^{cap} = \sigma_a W_z^{ef} . \tag{3.68}$$

Dacă momentul încovoietor este dirijat după axa y atunci în formulele (3.63) ÷ (3.68) M_z se înlocuieşte cu M_y, I_z cu I_y, iar $\left|y_{\max}\right|$ cu $\left|z_{\max}\right|$.

3.4.2. Încovoierea simplă şi dreaptă

Atunci când în toate secţiunile barei există pe lângă efortul secţional M_z şi forţa tăietoare T_z bara este supusă la solicitarea de încovoiere simplă şi dreaptă. Încovoierea simplă şi dreaptă este de fapt o solicitare compusă de încovoiere şi forfecare, în care încovoierea este solicitarea predominantă. Acest tip de solicitare se întâlneşte la barele lungi în raport cu dimensiunile secţiunii lor.

3.4.2.1. Distribuţia tensiunilor σ şi τ pe secţiunea dreaptă a barei

Pentru bare la care lungimea l şi înălţimea h îndeplinesc condiţia $\frac{h}{l} \le \frac{1}{4}$ se admite că influenţa forţei tăietoare, cu privire la dezvoltarea deformaţiilor specifice ε este mică şi că poate fi neglijată, ea manifestându-se doar în cazul deformaţiilor specifice unghiulare.

În consecinţă, distribuţia tensiunilor normale σ pe secţiunea dreaptă, dată de formula lui Navier, relaţia (3.62), este valabilă şi în cazul încovoierii simple şi drepte.

Pentru efectuarea calculului de rezistenţă este necesar mai întâi să se studieze

influența forței tăietoare în ceea ce privește punctul cel mai solicitat de pe secțiune, ca și punctul cel mai periculos din cuprinsul întregii bare.

Influența forței tăietoare cu privire la tensiunile tangențiale τ_{xy} și τ_{xz} pe secțiunea dreaptă. Distribuția tensiunilor tangențiale pe secțiunea dreaptă a fost rezolvată de Jurawski pentru cazul barelor ale căror secțiuni sunt simetrice în raport cu axa y (fig. 3.68).

Jurawski a considerat că *în toate punctele barei situate la aceeaşi distanță de axa neutră (axa z) tensiunile tangențiale τ_{xy} sunt egale*.

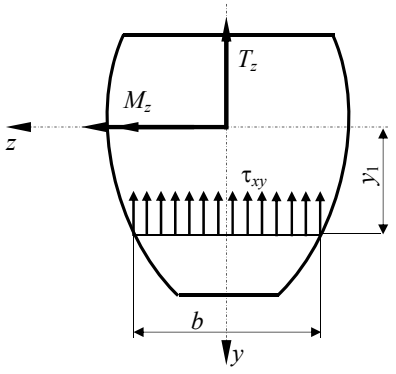


Fig. 3.68.

În aceste condiții, izolând din bară un element de lungime dx (fig. 3.69) şi intersectând acest element cu un plan longitudinal ABB_1A_1, paralel cu axa neutră a secțiunii, se obține elementul de volum $ABCA_1B_1C_1$ pe fețele căruia acționează tensiunile indicate în figura 3.70.

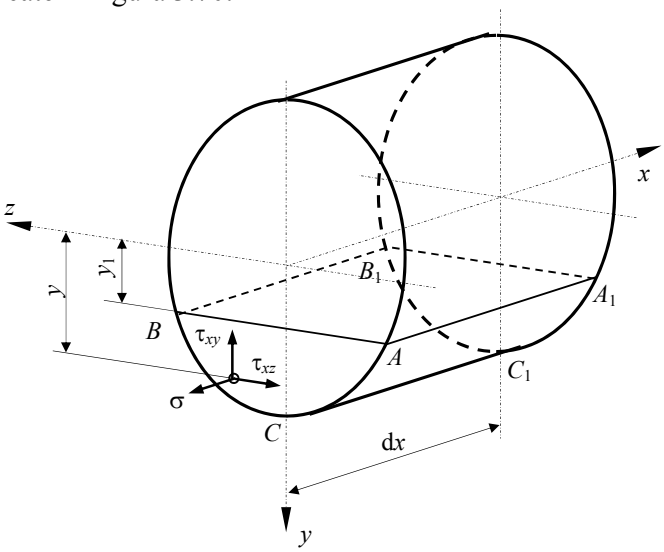


Fig. 3.69.

În baza ipotezei lui Jurawski şi a dualității tensiunilor tangențiale, pe fața longitudinală ABB_1A_1 a elementului tensiunile τ_{xy} (= τ_{yx}) se distribuie uniform dacă se neglijează creşterea acestora $\partial\tau_{xy}$ odată cu creşterea lui x cu ∂x (fig. 3.70).

Sub acțiunea forțelor generate de tensiuni elementul de volum considerat trebuie să fie în echilibru. În consecință, proiectând pe direcția x toate forțele care acționează asupra elementului $ABCA_1B_1C_1$, rezultă:

$$\int_{A_1B_1C_1}\left(\sigma+\frac{\partial\sigma}{\partial x}\cdot \mathrm{d}x\right)\cdot \mathrm{d}A-\int_{ABC}\sigma\cdot \mathrm{d}A-\tau_{xy}\cdot b\cdot \mathrm{d}x=0\,, \tag{3.69}$$

în care b este lățimea secțiunii la distanța y_1 de axa neutră, adică este lățimea secțiunii în punctul în care se calculează τ_{xy}.

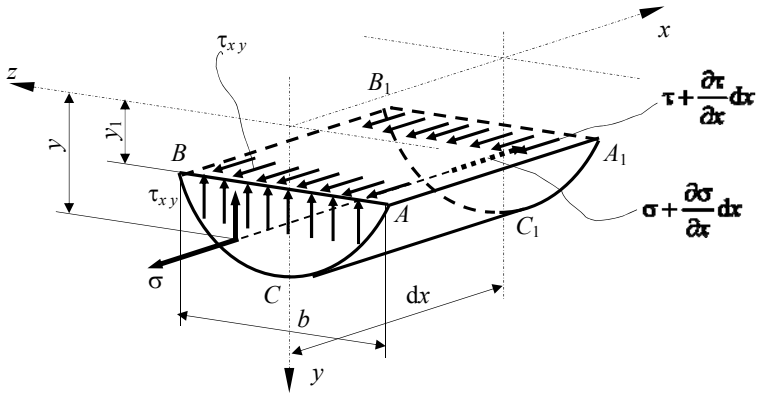


Fig. 3.70.

Deoarece formula lui Navier este valabilă şi în cazul încovoierii simple şi drepte, se poate scrie:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}M_z}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{y}{I_z}=T_z\cdot\frac{y}{I_z}\,. \tag{3.70}$$

În ecuația (3.69) termenii asemenea se pot reduce pentru că suprafețele (ABC) şi ($A_1B_1C_1$) sunt egale, şi se poate simplifica cu dx, deoarece integrarea se face pe suprafețe din secțiunea dreaptă a barei. După introducerea expresiei (3.70) în (3.69) astfel prelucrată se obține:

$$\frac{T_z}{I_z}\int_{ABC} y\cdot \mathrm{d}A-\tau_{xy}\cdot b=0 \tag{3.71}$$

Se observă că:

$$\int_{ABC} y\cdot \mathrm{d}A=S_n^{(ABC)}=S_z \tag{3.72}$$

este momentul static al suprafeței (*ABC*) în raport cu axa neutră (axa *z*). Înlocuind (3.72) în (3.71) rezultă:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{T_z \cdot S_z}{b \cdot I_z}, \tag{3.73}$$

care este formula lui Jurawski, în care termenii au următoarele semnificații:

T_z – forța tăietoare din secțiune, variază numai cu *x*;

I_z – momentul de inerție al secțiunii în raport cu axa *z* (axa neutră);

b – lățimea secțiunii în punctul în care se calculează τ_{xy}; se obține prin ducerea în acel punct a unei drepte paralele la axa neutră;

S_z – momentul static, în raport cu axa neutră (axa *z*), al părții din secțiune care tinde să lunece; se poate considera ca parte din secțiune care tinde să lunece este una din cele două părți ale secțiunii, obținute prin tăierea acesteia cu o dreaptă paralelă cu axa neutră dusă prin punctul în care se calculează τ_{xy}.

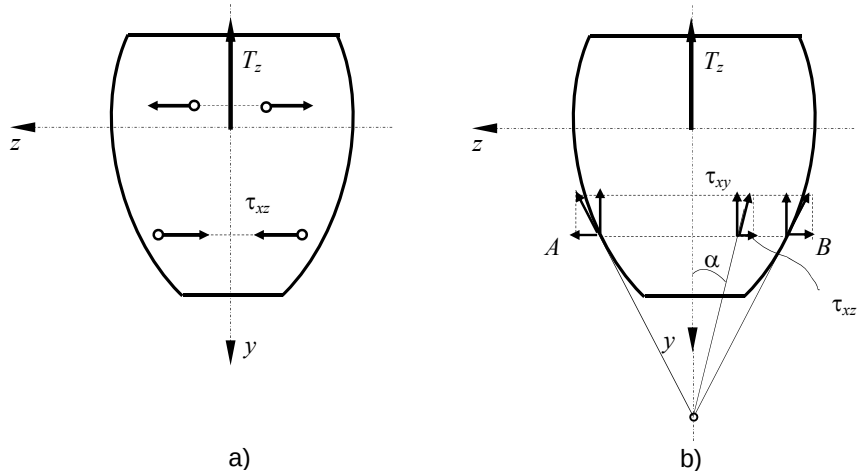


Fig. 3.71

Se face observația că, în secțiunea transversală, τ_{xy} variază în funcție de *b* şi S_z, iar în lungul barei în funcție de T_z.

Deoarece pe secțiune există numai eforturile T_z şi M_z, tensiunile tangențiale τ_{xz} pentru secțiunile simetrice trebuie să se echilibreze deoarece:

$$T_z = \int_A \tau_{xz} \cdot \mathrm{d}A = 0 .$$

Din motive de simetrie, de o parte şi de alta a axei *y*, aceste tensiuni trebuie să fie simetrice (fig. 3.71, *a*)

Deoarece la exteriorul barei nu există tensiuni tangenţiale, nu vor exista nici tensiuni τ normale pe direcţia tangentei la periferia secţiunii drepte. În consecinţă, la periferia secţiunii drepte tensiunile tangenţiale sunt tangente la secţiune. Aşadar, în punctele *A* şi *B* de la periferia secţiunii, situate pe o dreaptă paralelă cu axa neutră, tensiunile τ sunt tangente la periferia secţiunii, direcţiile lor intersectându-se într-un punct de pe axa *y* (fig. 3.71, *b*). Acceptând ipoteza că direcţiile tensiunilor τ în punctele de pe dreapta *AB* sunt concurente în acelaşi punct de pe axa *y* se poate scrie:

$$\tau_{xz} = -\tau_{xy} \cdot \tan\alpha \tag{3.74}$$

Această expresie nu are suport ştiinţific dar nici implicaţii practice supărătoare.

3.4.2.2. Tensiuni pe secţiuni înclinate la bare solicitate la încovoiere simplă

În paragraful 1.5.2. s-a prezentat forma particulară pe care o ia tensorul tensiunilor $\mathbf{T}_\sigma$ în cazul barelor ca urmare a acceptării ipotezei că acestea sunt alcătuite din fibre longitudinale care nu se apasă şi nu lunecă între ele în direcţie normală pe axa barei.

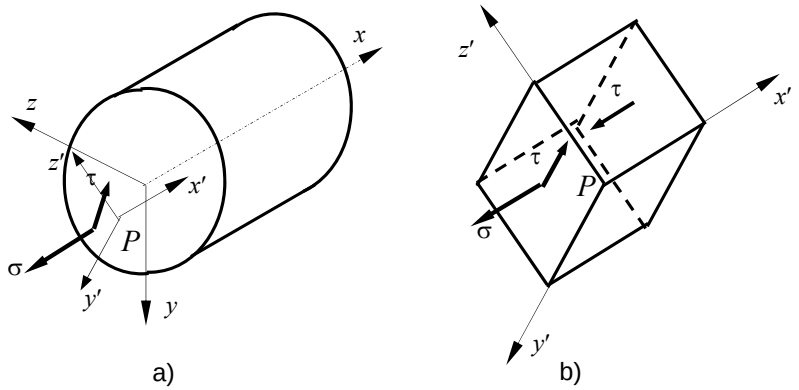


Fig. 3.72.

În consecinţă, dacă dintr-un punct *P* al barei se detaşează o particulă elementară având una din feţe în planul secţiunii şi celelalte două în plane longitudinale (unul paralel cu tensiunea tangenţială τ din planul secţiunii drepte şi celălalt normal pe acesta), tensiunile din planul paralel cu τ din planul secţiunii drepte, sunt nule (fig. 3.72).

Rezultă că în toate planele perpendiculare pe axa z' tensiunile sunt nule. Starea de tensiuni în care tensiunile pe plane paralele cu planul dat sunt nule este o *stare plană de tensiuni*. Deci în orice punct al barei starea de tensiuni este o stare plană.

Pentru evidențierea tensiunilor pe secțiuni înclinate în starea plană de tensiuni se va considera mai întâi o stare plană de tensiuni în care apar σ_x, σ_y şi $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, aşa cum se poate vedea în figura 3.73, urmând ca ulterior, rezultatele obținute să se particularizeze pentru cazul barelor solicitate la încovoiere simplă.

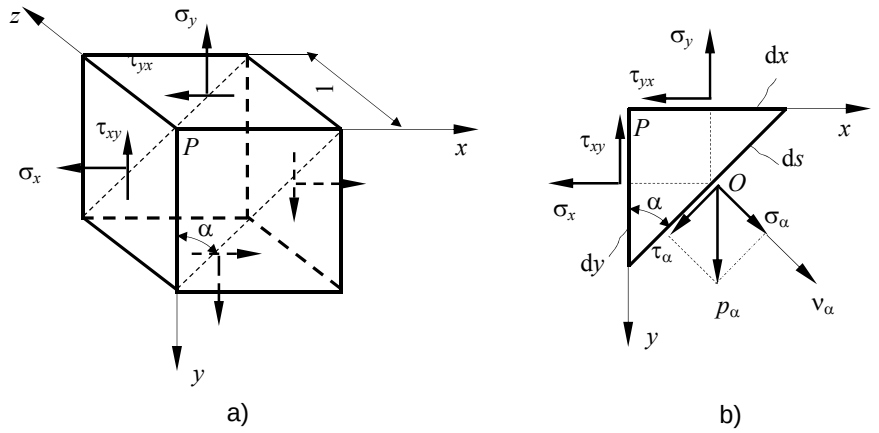


Fig. 3.73.

Problema poate fi enunțată astfel: cunoscând starea de tensiuni plană ce se dezvoltă într-un punct P din interiorul unui corp să se determine tensiunile ce apar într-un plan de normală ν_α ce trece prin punctul P. Aceasta este echivalent cu determinarea tensiunilor σ_α şi τ_α în funcție de tensiunile σ_x, σ_y şi τ_{xy} (fig. 3.73, *b*).

Elementul de volum considerat şi de grosime egală cu unitatea, sub acțiunea forțelor generate de tensiuni este în echilibru. În consecință, se pot scrie trei ecuații de echilibru (sistemul de forțe produse de tensiuni este un sistem de forțe coplanar).

Astfel, din ecuația de moment în raport cu punctul O (fig. 3.73, *b*):

$$(\tau_{xy} \cdot 1 \cdot \mathrm{d}y) \cdot \left(\frac{1}{2}\mathrm{d}x\right) - (\tau_{yx} \cdot 1 \cdot \mathrm{d}x) \cdot \left(\frac{1}{2}\mathrm{d}y\right) = 0$$

se obține egalitatea:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \tag{3.75}$$

care exprimă legea dualității tensiunilor tangențiale.

Proiectând toate forțele generate de tensiuni pe direcția lui σ_α se obține:

$$\sigma_\alpha \cdot 1 \cdot ds - (\sigma_x \cdot 1 \cdot dy) \cdot \cos\alpha - (\sigma_y \cdot 1 \cdot dx) \cdot \sin\alpha - (\tau_{xy} \cdot 1 \cdot dy) \cdot \sin\alpha - (\tau_{yx} \cdot 1 \cdot dx) \cdot \cos\alpha = 0,$$

iar din proiecția pe direcția lui τ_α rezultă:

$$\tau_\alpha \cdot 1 \cdot ds + (\sigma_x \cdot 1 \cdot dy) \cdot \sin\alpha - (\sigma_y \cdot 1 \cdot dx) \cdot \cos\alpha - (\tau_{xy} \cdot 1 \cdot dy) \cdot \cos\alpha - (\tau_{yx} \cdot 1 \cdot dx) \cdot \sin\alpha = 0.$$

Dacă se are în vedere că $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, iar între laturile elementului de volum există egalitățile $dx = ds \cdot \sin\alpha$, $dy = ds \cdot \cos\alpha$, din cele două ecuații de proiecții rezultă:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha \\ \tau_\alpha &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha \end{aligned} \tag{3.76}$$

Din relațiile (3.76) rezultă că tensiunile σ_α şi τ_α sunt funcții de (2α). Prin derivarea în raport cu (2α) a lui σ_α rezultă

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d(2\alpha)} = \tau_a\,. \tag{3.77}$$

În consecință, valorile extreme ale tensiunii σ_α, denumite *tensiuni principale*, se vor dezvolta în plane în care τ_α este nul. Aceste plane se numesc *plane principale de tensiune*, iar normalele acestor plane *direcții principale de tensiuni*.

Din condiția $\tau_\alpha = 0$ rezultă:

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \tag{3.78}$$

care, pentru $\alpha \in [0,2\pi]$ are două soluții $2\alpha_0$ şi $2\alpha_0 + \pi$. În concluzie există două direcții principale de tensiuni: α_0 şi $\alpha_0 + \frac{\pi}{2}$, perpendiculare între ele.

Dacă se introduce (3.78) în expresia lui σ_α după ce aceasta s-a explicitat în funcție de $\tan(2\alpha)$ se obțin tensiunile principale:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\,. \tag{3.79}$$

S-a convenit ca întotdeauna $\sigma_1 > \sigma_2$, deci:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$
$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \qquad (3.80)$$

Pentru a stabili care din unghiurile α_0 sau $\alpha_0 + \pi/2$ corespunde lui σ_1 se calculează derivata expresiei (3.77) şi se pune condiția de maxim. Se obține:

$$\frac{d^2 \sigma_\alpha}{d(2\alpha)^2} = -\left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2\right] 2\cos^2\alpha \frac{\tan\alpha}{\tau_{xy}} < 0$$

Pentru îndeplinirea acestei condiții trebuie ca

$$\frac{\tan\alpha}{\tau_{xy}} > 0 \qquad (3.81)$$

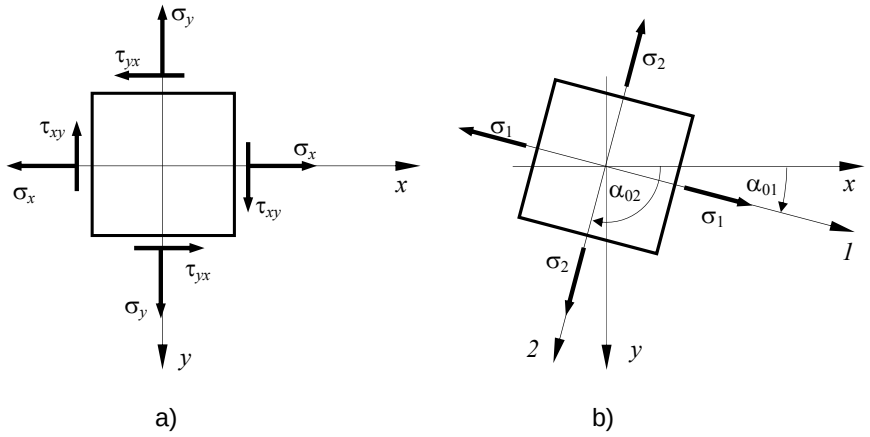


Fig. 3.74.

În consecință, dacă $\tau_{xy} > 0$ direcția lui σ_1, notată cu α_{01}, corespunde unghiului $\alpha_0 < \pi/2$, care are $\tan\alpha_0 > 0$; dacă $\tau_{xy} < 0$, α_{01} corespunde unghiului $\alpha_0 + \pi/2$, care are $\tan\alpha_0 < 0$.

În figura 3.74, pentru elementul ales, s-au trasat planele principale, tensiunile principale şi direcţiile principale de tensiuni.

În cazul în care bara este solicitată la încovoiere simplă se constată că $\sigma_x = \sigma$, $\sigma_y = 0$, iar într-un punct oarecare de pe secţiunea dreaptă a barei $\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 = \tau^2$. Rezultă că tensiunile principale, în acest caz sunt:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \end{aligned} \tag{3.82}$$

Se constată că $\sigma_1 \cdot \sigma_2 < 0$.

3.4.3. Deformarea barelor drepte solicitate la încovoiere

În baza ipotezei secţiunilor plane configuraţia punctelor care alcătuiesc o bară dreaptă în starea deformată este complet cunoscută, în raport cu un sistem de axe x, y, z, solidar legat de forma nedeformată a barei (axa x fiind direcţia axei barei nedeformate, axele y şi z fiind axele centrale principale de inerţie ale secţiunii), dacă se cunosc deplasările $u(x)$, $v(x)$ şi $w(x)$ ale unui punct curent de pe axa barei şi rotirile $\varphi(x)$, $\psi(x)$ şi $\theta(x)$ ale secţiunii drepte în care s-a considerat punctul

3.4.3.1. Ecuaţia diferenţială a fibrei medii deformate

Forma deformată a axei unei bare supuse la încovoiere se numeşte *fibră medie deformată* şi reprezintă o curbă continuă.

Dacă încovoierea este produsă de forţe cuprinse în planul xOy (fig. 3.75, *a*) punctele de pe axa barei au deplasări atât după axa x, $u(x)$, cât şi deplasări transversale, după axa y, $v(x)$. Deoarece $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \varepsilon = 0$ este alungirea specifică în axa barei, orice punct C de pe axa barei are numai deplasarea $CC' = v(x)$ (fig. 3.75, *a*).

Considerând că deformaţiile sunt mici în raport cu dimensiunile barei, din figura 3.75, *b* rezultă:

$$\tan\varphi \cong \varphi = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}. \tag{3.83}$$

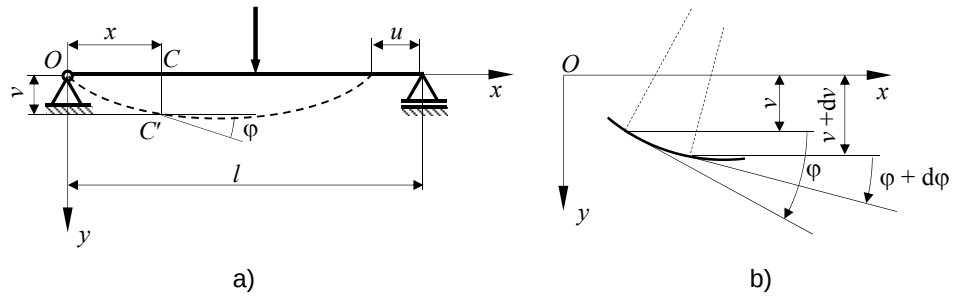


Fig. 3.75.

Prin derivarea expresiei anterioare cu în raport cu x, rezultă:

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = -\omega \tag{3.84}$$

deoarece, aşa cum se poate constata din figura 3.76, un moment de încovoiere M_z pozitiv produce o rotire relativă negativă $\mathrm{d}\varphi$ a două secţiuni ale barei situate la depărtarea $\mathrm{d}x$.

Înlocuind în relaţia (3.84) expresia încovoierii specifice $\omega = \dfrac{M_z}{EI_z}$ se obţine:

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{M_z}{EI_z} \tag{3.85}$$

relaţie care reprezintă *ecuaţia diferenţială de ordinul II a fibrei medii deformate*.

Dacă se cunoaşte expresia momentului încovoietor ca funcţie de variabila x, $M_z = M_z(x)$ ecuaţia (3.85) se integrează şi se obţine funcţia $v = v(x, C_1, C_2)$. Constantele de integrare C_1, C_2 se determină din condiţii la limită, care reprezintă valori ale deplasării (săgeţii) v sau rotirii φ în punctele în care bara prezintă legături.

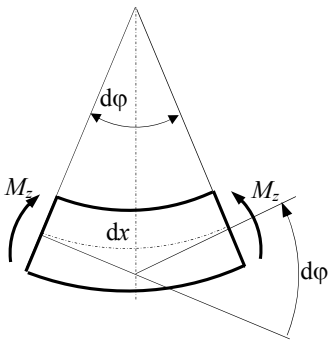


Fig. 3.76.

În cazul în care funcţia $M_z(x)$ nu poate fi exprimată din condiţii de echilibru, cazul sistemelor static nedeterminate, la care numărul forţelor de legătură simple este mai mare decât numărul ecuaţiilor de echilibru ce pot fi scrise, se folosesc relaţiile diferenţiale dintre eforturile

secționale şi solicitări (2.5):

$$\frac{\mathrm{d}T_z}{\mathrm{d}x} = -q_y \quad ; \quad \frac{\mathrm{d}M_z}{\mathrm{d}x} = T_z \quad ; \quad \frac{\mathrm{d}^2 M_z}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}T_z}{\mathrm{d}x} = -q_y \tag{3.86}$$

şi ecuația (3.85) se transformă în:

$$\frac{\mathrm{d}^4 v}{\mathrm{d}x^4} = \frac{q_y}{EI}, \tag{3.87}$$

care reprezintă *ecuația diferențială de ordinul IV a fibrei medii deformate*.

În cazul în care se cunoaşte intensitatea sarcinii normale ca o funcție de x, $q_y = q_y(x)$, prin integrarea ecuației (3.87) de patru ori se obține funcția $v = v(x, C_1, C_2, C_3, C_4)$. Pentru determinarea constantelor de integrare se pun condiții în deplasări (săgeți şi rotiri) şi în eforturile secționale M_z şi T_z, întrucât acestea se pot exprima în funcție de v, prin relațiile:

$$M_z = -EI\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}; \tag{3.88}$$

$$T_z = -EI\frac{\mathrm{d}^3 v}{\mathrm{d}x^3}. \tag{3.89}$$

Exemple privind integrarea directă a ecuațiilor diferențiale de ordinul IV, respectiv II, a fibrei medii deformate sunt prezentate în cadrul problemelor rezolvate de la sfârşitul acestui capitol.

3.4.3.2. Metode pentru integrarea ecuaţiei diferenţiale a fibrei medii deformate. Metoda parametrilor în origine

În cele ce urmează se prezintă o metodă de integrare a ecuației diferențiale de ordinul IV a fibrei medii deformate. Pentru aceasta se consideră un tronson de bară $O - A$, cu moment de inerție constant, pe care $q_y = 0$ (fig. 3. 77). În această situație ecuația (3.87) devine:

$$\frac{\mathrm{d}^4 v}{\mathrm{d}x^4} = 0.$$

Prin integrarea succesivă a acestei ecuații rezultă:

$$\frac{\mathrm{d}^3 v}{\mathrm{d}x^3} = C_1; \ \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = C_1 x + C_2; \ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = C_1\frac{x}{2} + C_2 x + C_3; \ v == C_1\frac{x^2}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

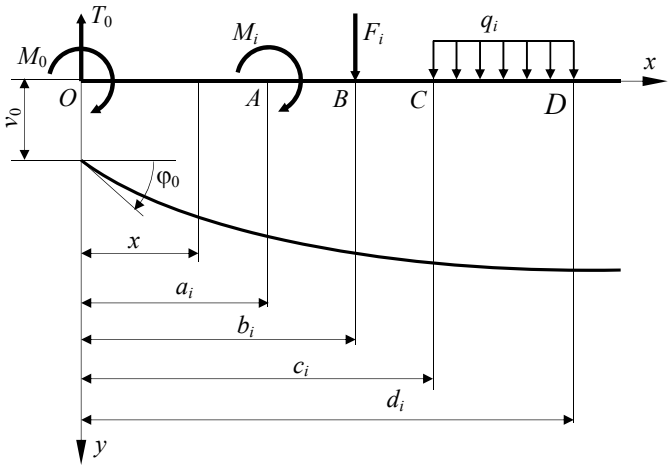


Fig. 3.77.

În secțiunea O, unde $x = 0$ condițiile la limită sunt:

$$v = v_0; \qquad \varphi = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \varphi_0$$

$$M_z = -EI_z \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = M_0; \qquad T_z = -EI_z \frac{\mathrm{d}^3 v}{\mathrm{d}x^3} = T_0 .$$

Din aceste condiții se obțin constantele de integrare:

$$C_1 = -\frac{T_0}{EI_z}; \;\; C_2 = -\frac{M_0}{EI_z}; \;\; C_3 = \varphi_0; \;\; C_4 = v_0 .$$

care introduse în expresia lui v permit obținerea ecuației fibrei medii deformate pe intervalul $O - A$ în funcție de parametrii în origine:

$$v = v_0 + \varphi_0 x - \frac{M_0}{EI_z}\frac{x^2}{2} - \frac{T_0}{EI_z}\frac{x^3}{6} . \tag{3.90}$$

Pentru $x > a_i$ (fig. 3.77) trebuie introdusă soluția particulară corespunzătoare lui M_i, care este soluția (3.90) pentru o bară dreaptă cu originea în A având ca singur parametru $M_0 = M_i$:

$$v(M_i) = -\frac{M_i}{EI_z}\frac{[x-a_i]^2}{2}.$$

Analog, pentru $x > b_i$ trebuie introdusă soluția particulară corespunzătoare lui F_i, care este soluția (3.90) considerând originea în B şi singurul parametru în origine $T_0 = -F_i$:

$$v(F_i) = +\frac{F_i}{EI_z}\frac{[x-b_i]^3}{6}.$$

În cazul unei sarcini uniform distribuite q_i (intervalul $C - D$ din fig. 3.77) soluția particulară are forma:

$$v(q_i) = \frac{q_i}{EI_z}\frac{[x-c_i]^4}{24} - \frac{q_i}{EI_z}\frac{[x-d_i]^4}{24}.$$

Însumând soluția omogenă (3.90) cu soluțiile particulare se obține ecuația fibrei medii deformate pentru o bară dreaptă cu diferite încărcări M_i, F_i, q_i:

$$\begin{aligned} v = v_0 + \varphi_0 x - \frac{M_0}{EI_z}\frac{x^2}{2} - \frac{T_0}{EI_z}\frac{x^3}{6} - \sum_i \frac{M_i}{EI_z}\frac{[x-a_i]^2}{2} + \\ + \sum_i \frac{F_i}{EI_z}\frac{[x-b_i]^3}{6} + \sum_i \frac{q_i}{EI_z}\frac{[x-c_i]^4}{24} - \sum_i \frac{q_i}{EI_z}\frac{[x-d_i]^4}{24} \end{aligned} \tag{3.91}$$

Pentru o secțiune oarecare a barei din soluția generală (3.91) se rețin numai termenii ale căror paranteze $x - a_i$, $x - b_i$, $x - c_i$ şi $x - d_i$ sunt pozitive.

Se face observația că, în ecuația fibrei medii deformate (3.91) intervin numai patru constante de integrare, indiferent de numărul intervalelor de variație continuă a încărcărilor. La sistemele static determinate, la care M_0 şi T_0 sunt cunoscute, nu rămân doar două constante de integrare, v_0 şi φ_0, care se determină pe baza condițiilor de rezemare a barei.

Derivând în raport cu x relația (3.91) se obține expresia generală a rotirilor:

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi_0 - \frac{M_0}{EI_z}x - \frac{T_0}{EI_z}\frac{x^2}{2} - \sum_i \frac{M_i}{EI_z}[x-a_i] + \\ + \sum_i \frac{F_i}{EI_z}\frac{[x-b_i]^2}{3} + \sum_i \frac{q_i}{EI_z}\frac{[x-b_i]^3}{6} - \sum_i \frac{q_i}{EI_z}\frac{[x-d_i]^3}{6} \end{aligned} \tag{3.92}$$

Şi în acest caz, pentru o secțiune curentă a barei, se rețin numai termenii ale căror paranteze sunt pozitive.

Această metodă de integrare a ecuației diferențiale de ordinul IV este mai avantajoasă decât integrarea directă care introduce câte patru constante pentru fiecare interval de variație continuă a încărcării.

Probleme rezolvate

P.3.42. O consolă este solicitată la capătul liber de un cuplu concentrat $\mathcal{M}$ = 24 kNm. Bara este din oțel cu rezistența admisibilă σ_a = 150 N/mm^2 şi are secțiunea dreptunghiulară b x h cu $h = 2b$ (fig. 3.78). Să se dimensioneze secțiunea barei.

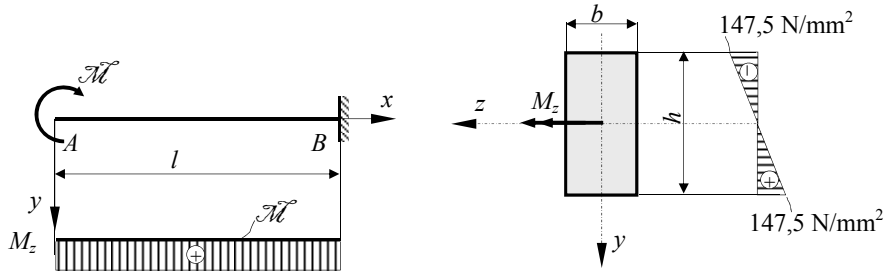


Fig. 3.78.

Bara este solicitată la încovoiere pură deoarece în toate secțiunile ei se dezvoltă numai momentul de încovoiere $M_z = \mathcal{M}$ după cum se poate observa din diagrama M_z din figura 3.78. În consecință în toate secțiunile barei vor exista numai tensiuni normale σ a căror intensitate se determină cu formula lui Navier (3.62).

Dimensionarea secțiunii barei se face cu relația (3.66):

$$W_z^{nec} = \frac{M_z^{\max}}{\sigma_a} = \frac{M}{\sigma_a} = \frac{24 \cdot 10^6}{150} = 160 \cdot 10^3 \text{ mm}^3.$$

Pentru o secțiune dreptunghiulară $W_z^{\dim} = \dfrac{bh^2}{6}$ şi, deoarece $h = 2b$, din egalitatea $W_z^{nec} = W_z^{\dim}$ rezultă;

$$b = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot (160 \cdot 10^3)}{2}} = 62{,}14 \text{ mm}.$$

Dacă se adoptă b = 62,5 mm rezultă h = 2·62,5 = 125 mm.

Verificarea calculelor se face cu relația (3.67):

$$\sigma_{\max}^{ef} = \frac{24 \cdot 10^6}{\frac{62{,}5 \cdot 125^2}{6}} = 147{,}5 \text{ N/mm}^2 < \sigma_a .$$

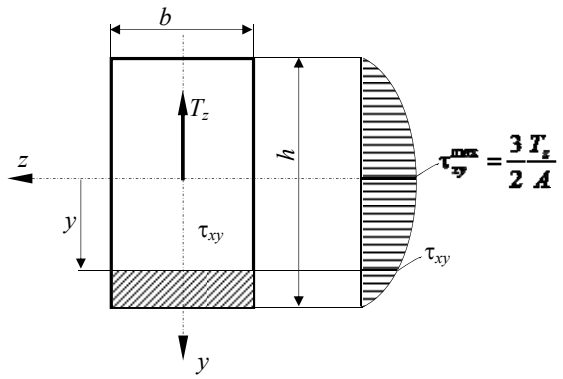


Fig. 3.79.

Distribuția tensiunilor σ este redată în figura 3.78.

P.3.43. Să se stabilească distribuția tensiunilor tangențiale τ_{xy} pe o secțiune dreptunghiulară din cadrul unei bare solicitată la încovoiere simplă.

Se consideră că într-o secțiune curentă a barei pe lângă momentul încovoietor M_z există şi forța tăietoare T_z (fig. 3.79).

În punctele situate la depărtare y de axa z tensiunea τ_{xy}, dată de formula lui Jurawski (3.73), este:

$$\tau_{xy} = \frac{T_z S_z}{b I_z},$$

unde, conform cu figura 3.79, S_z este momentul static al părții din secțiune care tinde să lunece, (aria haşurată):

$$S_z = b\left(\frac{h}{2} - y\right)\left[y + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y\right)\right] = \frac{b}{2}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right].$$

Având în vedere că $I_z = \frac{bh^3}{12}$, rezultă:

$$\tau_{xy} = \frac{T_z \cdot \frac{b}{2}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right]}{b \cdot \frac{bh^3}{12}} = \frac{6T_z}{bh^3}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right].$$

Pentru $y = \pm\frac{h}{2}$ se obține $\tau_{xy} = 0$. Tensiunea maximă $\tau_{xy}^{\max}$ se dezvoltă în punctele de pe axa neutră (axa z) pentru care $y = 0$, şi are valoarea:

$$\tau_{xy}^{\max} = \frac{3}{2}\frac{T_z}{bh} = \frac{3}{2}\frac{T_z}{A}.$$

După cum se poate observa τ_{xy} are o variație parabolică pe înălțimea secțiunii. În figura 3.79 este redată distribuția acestor tensiuni, ordonatele respective fiind obținute prin rabaterea cu 90° a valorilor τ_{xy} care au direcția şi sensul lui T_z.

P.3.44. Să se stabilească distribuția tensiunilor tangențiale τ_{xy} pe o secțiune circulară din cadrul unei bare solicitată la încovoiere simplă.

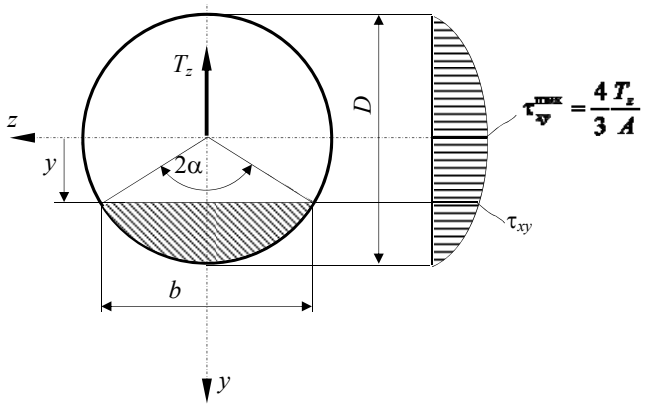


Fig. 3.80.

Considerând unghiul la centru 2α corespunzător lățimii b a secțiunii la depărtarea y de axa z, momentul static al zonei haşurate (partea din secțiune care tinde să lunece) este (fig. 3.80):

$$S_z = A \cdot y_C = \left[\alpha\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(2\frac{D}{2}\sin\alpha\right)\left(\frac{D}{2}\cos\alpha\right)\right] \times$$

$$\times \frac{\alpha\left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot \frac{2}{3}\frac{D}{2}\frac{\sin\alpha}{\alpha} - \frac{1}{2}\left(2\frac{D}{2}\sin\alpha\right)\left(\frac{D}{2}\cos\alpha\right) \cdot \frac{2}{3}\frac{D}{2}\cos\alpha}{\alpha\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(2\frac{D}{2}\sin\alpha\right)\left(\frac{D}{2}\cos\alpha\right)} = \frac{D^3}{12}\sin^3\alpha$$

Înlocuind valoarea lui S_z în relația (3.73) şi având în vedere că $b = 2\frac{D}{2}\sin\alpha = D\sin\alpha$, iar momentul de inerție $I_z = \frac{\pi D^4}{64}$ rezultă:

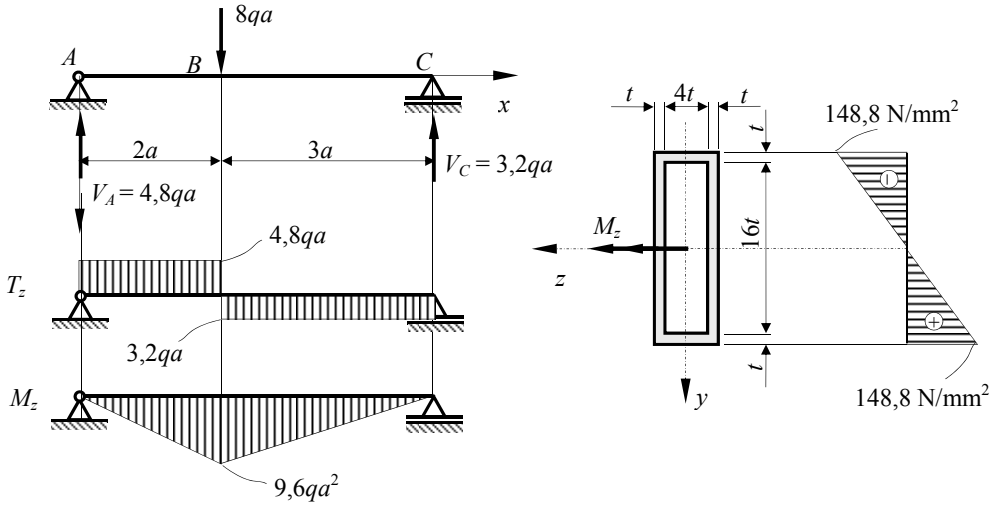
$$\tau_{xy} = \frac{3}{4}\frac{T_z}{A}\sin^2\alpha ,$$

în care A este aria secțiunii circulare de diametru D.

Se constată, şi în acest caz, că τ_{xy} are o variație parabolică pe înălțimea secțiunii, în punctele de pe axa neutră (axa z) pentru care $y = 0 \Leftrightarrow \alpha = 90^o$ valoarea ei fiind maximă (fig. 3.80):

$$\tau_{xy}^{\max} = \frac{4}{3}\frac{T_z}{A} .$$

P.3.45. Bara simplu rezemată din figura 3.81, a acționată de forța concentrată $8qa$, are secțiunea casetată. Rezistența admisibilă la încovoiere a oțelului din care este confecționată bara este $\sigma_a = 150$ N/mm^2. Ştiind că $a = 1$m şi $q = 12$ kN/m să se dimensioneze secțiunea barei.



a) b)

Fig. 3.81.

Diagramele de eforturi sunt prezentate în figura 3.86, a. Se constată ca bara este solicitată la încovoiere simplă (în planul secțiunii drepte a barei se dezvoltă eforturile secționale T_z şi M_z). Secțiunea periculoasă este în B unde momentul încovoietor are valoarea maximă $M_z^{\max} = 9{,}6qa^2 = 9{,}6\cdot(12)\cdot(1000)^2 = 115{,}2\cdot 10^6$ Nmm.

Dimensionarea secțiunii barei se face cu relația (3.66). Pentru aceasta se calculează mai întâi modulul de rezistență necesar:

$$W_z^{nec} = \frac{\left|M_z^{\max}\right|}{\sigma_a} = \frac{115{,}2 \cdot 10^6}{150} = 768 \cdot 10^3 \text{ mm}^3.$$

Modulul de rezistență al secțiunii barei în funcție de forma şi dimensiunile acesteia (fig. 3.81, *b*) este:

$$W_z^{\dim} = \frac{I_z}{\left|y_{\max}\right|} = \frac{\dfrac{(18t)^3(6t)}{12} - \dfrac{(16t)^3(4t)}{12}}{9t} = 172{,}3t^3 .$$

Din egalitatea $W_z^{\dim} = W_z^{nec}$ se determină valoarea lui *t*:

$$t = \sqrt[3]{\frac{768 \cdot 10^3}{172{,}3}} = 16{,}45 \text{ mm}$$

Se adoptă t = 16,5 mm şi se verifică corectitudinea calculelor cu relația (3.67):

$$\sigma_{\max}^{ef} = \frac{\left|M_z^{\max}\right|}{W_z^{ef}} = \frac{115{,}2 \cdot 10^6}{172{,}3 \cdot (16{,}5)^3} = 148{,}8 \text{ N/mm}^2.$$

Distribuția tensiunilor σ în secțiunea periculoasă (secțiunea *B*) este redată în figura 3.81, *b*.

P.3.46. O bară simplu rezemată este acționată de un cuplu concentrat $9qa^2$, după cum se poate vedea în figura 3.82, şi are secțiunea în formă de U cu dimensiunile precizate în figura 3.83, *a*. Cunoscând că a = 0,2 m şi q = 7 kN/m să se determine tensiunile maxime de întindere şi compresiune care se dezvoltă în bară.

Pentru trasarea diagramei momentului încovoietor se determină mai întâi forțele de legătură din *A* şi *C*. V_A şi V_C trebuie să formeze un cuplu care să rotească în sens invers decât cuplul concentrat şi trebuie să aibă mărimea egală cu:

$$V_A = V_C = \frac{9qa^2}{9a} = qa$$

Diagrama M_z este prezentată în figura 3.82 şi prezintă un salt în dreptul cuplului concentrat.

Bara fiind solicitată la încovoiere distribuția tensiunilor σ pe secțiune este dată de formula lui Navier (3.62). Rezultă că $\sigma_{\max}$ pe secțiune se va dezvolta în punctul cu $y_{\max}$, cel mai depărtat de axa *z*.

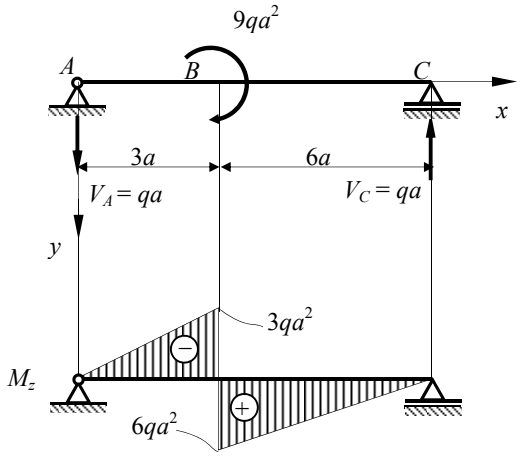


Fig. 3.82.

Deoarece secțiunea nu este simetrică în raport cu axa *z* trebuie mai întâi determinată poziția centrului de greutate. Considerând că

secțiunea se obține scăzând din dreptunghiul mare pe cel mic, distanța de la marginea superioară la centrul de greutate, adică y_C este:

$$y_C = \frac{(50 \cdot 120)(25) - (40 \cdot 100)(20)}{(50 \cdot 120) - (40 \cdot 100)} = 35 \text{ mm}$$

Se poate calcula acum momentul de inerție al secțiunii în raport cu axa z:

$$I_z = \left[\frac{50^3 \cdot 120}{12} + 50 \cdot 120 \cdot (35-25)^2\right] - \left[\frac{40^3 \cdot 100}{12} + 40 \cdot 100 \cdot (35-20)^2\right] = 416{,}67 \text{ mm}^4.$$

Dacă se consideră secțiunea din stânga lui B, cea în care $M_z = -3qa^2$, distribuția tensiunilor σ este redată în figura 3.83, *a*. În acest caz în toate punctele secțiunii situate deasupra axei z tensiunile σ sunt pozitive, iar în cele situate sub, axa z sunt negative. În consecință:

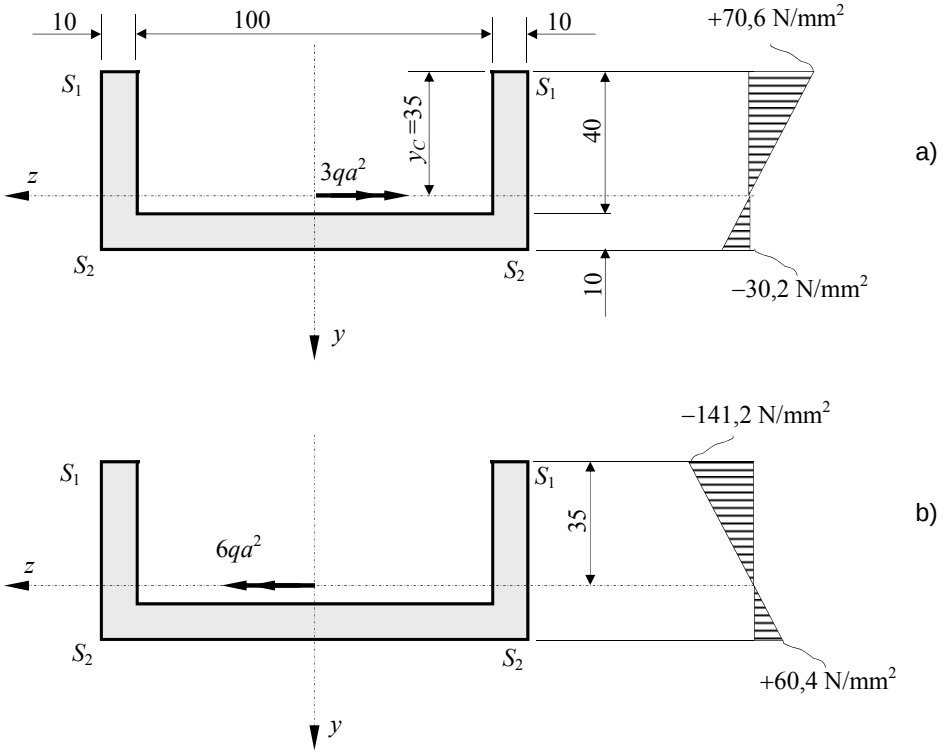


Fig. 3.83.

$$\sigma_{S1} = \frac{-3qa^2}{I_z} \cdot y_{S1} = \frac{-3 \cdot (7) \cdot (200)^2}{416{,}67} \cdot (-35) = +70{,}6 \text{ N/mm}^2;$$

$$\sigma_{S2} = \frac{-3qa^2}{I_z} \cdot y_{S2} = \frac{-3 \cdot (7) \cdot (200)^2}{416{,}67} \cdot (15) = -30{,}2 \text{ N/mm}^2.$$

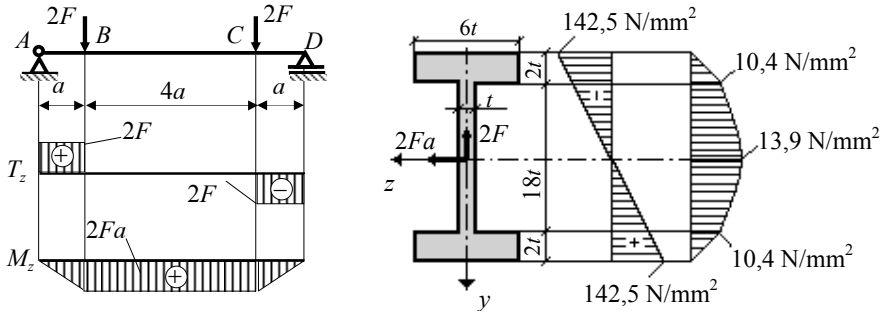
Dacă se consideră secțiunea din dreapta lui B, cea în care $M_z = +6qa^2$, distribuția tensiunilor σ este redată în figura 3.83, *b*. În acest caz în toate punctele secțiunii situate deasupra axei z tensiunile σ sunt negative, iar în cele situate sub axa z sunt pozitive. În consecință:

$$\sigma_{S1} = \frac{6qa^2}{I_z} \cdot y_{S1} = \frac{6 \cdot (7) \cdot (200)^2}{416{,}67} \cdot (-35) = -141{,}2 \text{ N/mm}^2;$$

$$\sigma_{S1} = \frac{6qa^2}{I_z} \cdot y_{S1} = \frac{6 \cdot (7) \cdot (200)^2}{416{,}67} \cdot (15) = +60{,}4 \text{ N/mm}^2;$$

Deci tensiunea maximă de întindere este $\sigma^{+}_{\max} = 70{,}6$ N/mm^2 şi se dezvoltă în punctele S_1 din secţiunea B stânga, iar tensiunea maximă de compresiune este $\sigma^{+}_{\max} = 141{,}2$ N/mm^2 şi se dezvoltă în punctele S_1 din secţiunea B dreapta.

P.3.47. Să se dimensioneze bara din figura 3.84, *a*, cu secţiunea în formă de I, dacă $F = 2$kN şi $a = 0{,}6$m, ştiind că rezistenţa admisibilă a materialului din care este confecţionată este $\sigma_a = 150$ N/mm^2. Să se traseze distribuţia tensiunilor σ şi τ_{xy} în secţiunea B stânga şi să se determine tensiunile principale maxime în această secţiune.



a) b)

Fig. 3.84.

Diagramele de eforturi sunt prezentate în figura 3.84, *a*. Se constată că bara este solicitată la încovoiere simplă deoarece în secţiunea transversală a sa se dezvoltă eforturile secţionale T_z şi M_z. Dimensionarea se face cu relaţia (3.66), calculându-se mai întâi modulul de rezistenţă necesar:

$$W_z^{\dim} = \frac{M_z^{\max}}{\sigma_a} = \frac{2Fa}{\sigma_a} = \frac{2\cdot(2\cdot 10^3)\cdot(10^3)}{150} = \frac{2{,}4\cdot 10^6}{150} = 16000 \text{ mm}^3.$$

Modulul de rezistenţă al secţiunii barei în funcţie de forma şi dimensiunile acesteia (vezi fig. 3.84, *b*) este:

$$W_z^{\dim} = \frac{I_z}{|y_{mx}|} = \frac{2\cdot\left[\frac{(2t)^3\cdot 6t}{12} + 2t\cdot 6t\cdot(10t)^2\right] + \frac{(18t)^3\cdot t}{12}}{11t} = \frac{2894t^4}{11t} = 263{,}09t^3 .$$

Punând condiţia ca $W_z^{\dim} = W_z^{nec}$ se determină valoarea lui t:

$$t = \sqrt[3]{\frac{16000}{263{,}09}} = 3{,}93 \text{ mm}.$$

Se adoptă $t = 4$ mm şi se verifică corectitudinea calculelor cu relaţia (3.67):

$$\sigma_{\max}^{ef} = \frac{2{,}4\cdot 10^6}{263{,}09\cdot 4^3} = 142{,}5 \text{ N/mm}^2 < \sigma_a = 150 \text{ N/mm}^2.$$

Având în vedere că în secțiunea B stânga momentul încovoietor are valoarea maximă distribuția tensiunilor σ este redată în figura 3.84, *b*.

Pentru distribuția tensiunilor τ_{xy} se constată că în secțiunea B stânga $T_z = 2F = 4\cdot 10^3$ N. În consecință T_z este în sens invers axei y, tensiunile τ_{xy} fiind pozitive şi în acelaşi sens cu T_z (vezi fig. 3.84, *b*). Calculul tensiunilor τ_{xy} se face cu formula lui Jurawski (3.73).

Astfel, în punctul de pe secțiune situat la racordarea inimii cu talpa superioară, respectiv inferioară, tensiunea τ_{xy} are valoarea:

$$\tau_{xy} = \frac{T_z \cdot S_z}{b \cdot I_z} = \frac{(4\cdot 10^3)(120\cdot 4^3)}{(4)(2894\cdot 4^4)} = 10{,}4 \text{ N/mm}^2,$$

deoarece momentul static al porțiunii din secțiune care tinde să lunece S_z este momentul static al tălpii superioare (sau inferioare) $S_z = 6t\cdot 2t\cdot 10t = 120\cdot t^3$.

Se consideră că pe înălțimea tălpilor tensiunile τ_{xy} au o variație liniară, de la valoarea zero în punctele de la exteriorul secțiunii, la valoarea 10,4 N/mm^2 în punctele de racordare talpă-inimă, aşa cum se poate vedea în figura 3.84, *b*. Pe înălțimea inimii, variația tensiunilor tangențiale τ_{xy} este dată tot de relația (3.73) şi în consecință ea este parabolică, valoarea maximă $\tau_{xy}^{\max}$ fiind atinsă în punctele secțiunii situate pe axa z. Pentru secțiunea considerată:

$$\tau_{xy}^{\max} = \frac{T_z \cdot S_z^{\max}}{b \cdot I_z} = \frac{(4\cdot 10^3)(160{,}5\cdot 4^3)}{(4)(2894\cdot 4^4)} = 13{,}9 \text{ N/mm}^2,$$

deoarece $S_z^{\max} = 6t\cdot 2t\cdot 10t + 9t\cdot t\cdot 4{,}5t = 160{,}5t^3$ reprezintă momentul static al unei jumătăți de secțiune. Se face precizarea că distribuția tensiunilor tangențiale τ_{xy} redată în figura 3.84, *b*, a fost obținută folosind în formula (3.73) aceeaşi grosime $b = t = 4$ mm a secțiunii atât în punctele situate pe tălpi, cât şi în punctele situate pe inimă.

În conformitate cu relația (3.82) tensiunile principale pe secțiunea unei bare solicitate la încovoiere simplă apar în punctele în care tensiunile σ şi τ au valori maxime. Astfel, în punctele situate la exteriorul secțiunii, pe talpa inferioară, respectiv superioară unde tensiunile τ sunt nule, tensiunile principale au valorile: $\sigma_1 = 142{,}5$ N/mm^2; $\sigma_2 = -\,142{,}5$ N/mm^2. În punctele de racordare a tălpii cu inima tensiunile normale σ au valoarea: $\sigma = \pm 142{,}5\cdot\frac{18t}{20t} = 128{,}25$ N/mm^2 şi, în consecință tensiunile principale sunt:

$$\sigma_1 = \frac{128{,}25}{2} + \sqrt{\left(\frac{128{,}25}{2}\right)^2 + (10{,}4)^2} = 129{,}1 \text{ N/mm}^2;$$

$$\sigma_2 = \frac{128{,}25}{2} - \sqrt{\left(\frac{128{,}25}{2}\right)^2 + (10{,}4)^2} = -0{,}84 \text{ N/mm}^2.$$

Rezultă că tensiunile principale maxime se dezvoltă în punctele situate la exteriorul secțiunii pe talpa inferioară, respectiv superioară, acolo unde σ este maxim şi τ este nul. În concluzie, în cazul încovoierii simple, condiția de rezistență (3.65) este acoperitoare, chiar dacă ea nu ia în considerare influența forței tăietoare prin intermediul tensiunilor tangențiale τ, deoarece:

$\sigma_1 = |\sigma_{max}| = 142{,}5\ \text{N/mm}^2.$

P.3.48. Pentru bara din figura 3.85, solicitată de momentul $\mathcal{M}$, să se determine ecuația fibrei medii deformate, săgeata şi rotirea secțiunii A.

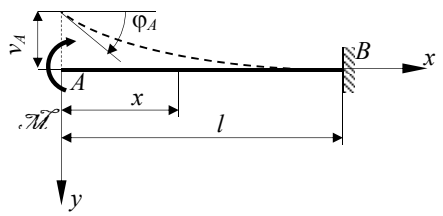


Fig. 3.85.

Într-o secțiune oarecare x a barei momentul încovoietor are valoarea $M_z = \mathcal{M}$. În acest caz ecuația diferențială de ordinul doi a fibrei medii deformate (3.85) capătă forma:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{\mathcal{M}}{EI_z}.$$

După integrare se obține:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{\mathcal{M}}{EI_z} \cdot x + C_1;$$
$$v = -\frac{\mathcal{M}}{EI_z} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2.$$

Punând condițiile la limită: $x = l \rightarrow \begin{cases} \varphi_B = 0 \\ v_B = 0 \end{cases}$ se obține sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} 0 = -\dfrac{\mathcal{M}}{EI_z} \cdot l + C_1 \\ 0 = -\dfrac{\mathcal{M}}{EI_z} \cdot \dfrac{l^2}{2} + C_1 l + C_2 \end{cases}$$

După rezolvarea sistemului rezultă:

$$C_1 = \frac{\mathcal{M}}{EI_z} \cdot l; \qquad C_2 = \frac{\mathcal{M}}{EI_z} \cdot \frac{l^2}{2}.$$

În consecință, ecuația fibrei medii deformate este:

$$v = -\frac{\mathcal{M}}{EI_z}\left(\frac{x^2}{2} - lx + \frac{l^2}{2}\right),$$

iar rotirile se determină cu relația:

$$\varphi = -\frac{\mathsf{M}}{EI_z}(x-l).$$

Folosind ecuaţia fibrei medii deformate se poate determina săgeata în orice secţiune a barei . În secţiunea A săgeata are valoarea:

$$v\big|_{x=0} = v_A = -\frac{\mathsf{M}}{EI_z}\cdot\frac{l^2}{2}$$

şi deci secţiunea se deplasează în sensul invers al axei y aşa cum se poate observa din figura 3.85.

Analog, folosind expresia rotirilor, se determină rotirea secţiunii A:

$$\varphi\big|_{x=0} = \varphi_A = \frac{\mathsf{M}}{EI_z}\cdot\frac{l}{2}.$$

P.3.49. Consola AB din figura 3.86, a este încastrată în punctul A şi este tangentă la un cilindru rigid de rază r. Să se determine săgeata punctului B atunci când bara este solicitată de forţa P.

Datorită solicitării barei cu forţa P aceasta se va deforma astfel încât o porţiune din ea AC va rămâne în contact cu cilindrul rigid, punctul C ajungând în C' (fig. 3.86, a). O secţiune curentă a

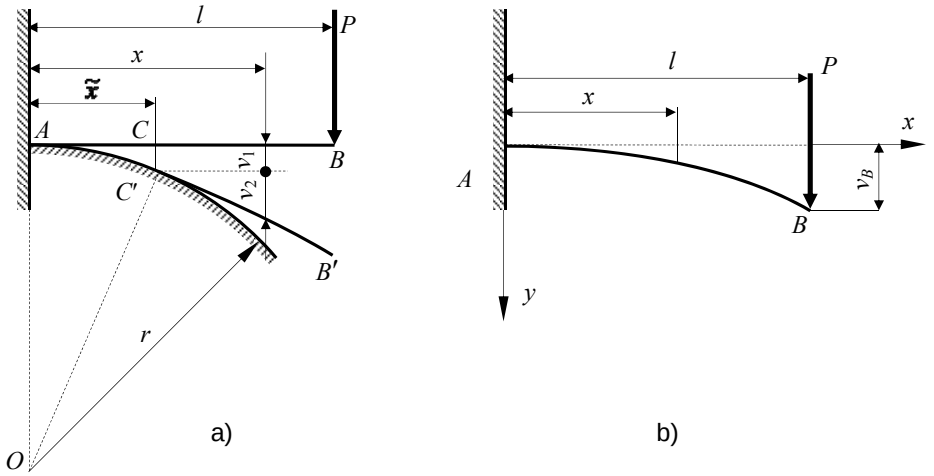


Fig. 3.86.

barei la depărtarea $x > \tilde{x}$ (fig. 3.86, a), pe lângă săgeata v_1 (corespunzătoare punctului C'), va avea o săgeata v_2 datorită rotirii secţiunii C şi o săgeata v_3 produsă de forţa P, dar pe o consolă încastrată de lungime $l - x$. Rezultă că săgeata unei secţiuni oarecare x a barei este:

$$v = v_1 + v_2 + v_3.$$

Pentru determinarea săgeţii punctului C se precizează că între curbura fibrei medii deformate şi săgeată există relaţia:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}}{\left[1+\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{3/2}}.$$

În această expresie dv/dx reprezintă panta, în orice punct, la curba fibrei medii deformate; în cazul micilor deformații ale barelor, această cantitate şi cu atât mai mult pătratul ei sunt mici în comparație cu unitatea şi se neglijează. Având în vedere această simplificare şi ținând seama de ecuația diferențială de ordinul doi a fibrei medii deformate, (3.85), se obține legătura dintre curbura fibrei medii deformate şi momentul de încovoiere:

$$\frac{1}{\rho}=-\frac{M_z}{EI_x}.$$

În secțiunea C momentul încovoietor este $M_z = P(l-\tilde{x})$, iar $\rho = r$ şi deci:

$$\frac{1}{r}=\frac{P(l-\tilde{x})}{EI_z}\Rightarrow \tilde{x}=l-\frac{EI_z}{P\cdot r}$$

În conformitate cu fig. 3.86, *a*, se poate scrie:

$$(r-v_1)^2+\tilde{x}^2=r^2$$

din care, prin neglijarea termenului v_1^2 se obține: $v_1=\dfrac{\tilde{x}^2}{2r}$.

Deplasarea v_2 se datorează rotirii secțiunii C. Având în vedere că unghiul AOC' este egal cu unghiul pe care axa deformată a barei îl face cu orizontala în C' se poate scrie (fig. 3.86, *a*):

$$\frac{v_2}{x-\tilde{x}}=\frac{\tilde{x}}{r}\Rightarrow v_2=\frac{\tilde{x}}{r}(x-\tilde{x}).$$

Pentru calculul lui v_3 să considerăm că deformațiile barei sub solicitarea forței P nu sunt împiedicate, adică bara se poate deforma liber ca şi când cilindrul de rază r nu ar exista, aşa cum se poate vedea în figura 3.86, *b*. Într-o secțiune oarecare C a barei momentul încovoietor are valoarea $M_z = -P(l-x)$. Înlocuind această valoare a momentului în ecuația diferențială de ordinul doi a fibrei medii deformate (3.85) şi integrând de două ori se obține:

$$v=\frac{Pl}{EI_z}\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{P}{EI_z}\cdot\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2.$$

Pentru determinarea celor două constante de integrare C_1 şi C_2 se pun condițiile:

$$x=0\rightarrow\begin{cases} v_A=0\Rightarrow C_2=0\\ \varphi_A=\left.\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=0\Rightarrow C_1=0\end{cases}$$

În consecință, ecuația fibrei medii deformate a consolei AB din fig. 3.86, *b*, solicitată de forța

P, este:

$$v = \frac{P}{EI_z} \cdot \frac{x^2}{2}\left(l - \frac{x}{3}\right).$$

Dacă se înlocuieşte l cu $l - \tilde{x}$ iar x cu $x - \tilde{x}$ se obține expresia lui v_3:

$$v_3 = \frac{P}{EI_z} \cdot \frac{(x-\tilde{x})^2}{2}\left(l - \tilde{x} - \frac{x-\tilde{x}}{3}\right).$$

Însumând cele trei valori se obține săgeata în secțiunea curentă x:

$$v = \frac{\tilde{x}}{2r} + \frac{\tilde{x}}{r}(x-\tilde{x}) + \frac{P}{EI_z} \cdot \frac{(x-\tilde{x})^2}{2}\left(l - \tilde{x} - \frac{x-\tilde{x}}{3}\right)$$

Pentru $x = l$ se obține săgeata punctului B:

$$v_B = \frac{\tilde{x}}{2r} + \frac{\tilde{x}}{r}(l-\tilde{x}) + \frac{P}{EI_z} \cdot \frac{(l-\tilde{x})^3}{3}.$$

Înlocuind în această expresie pe $\tilde{x} = l - \frac{EI_z}{P \cdot r}$ se obține:

$$v_B = \frac{l^2}{2r} - \frac{(EI_z)^2}{6P^2 r^3}.$$

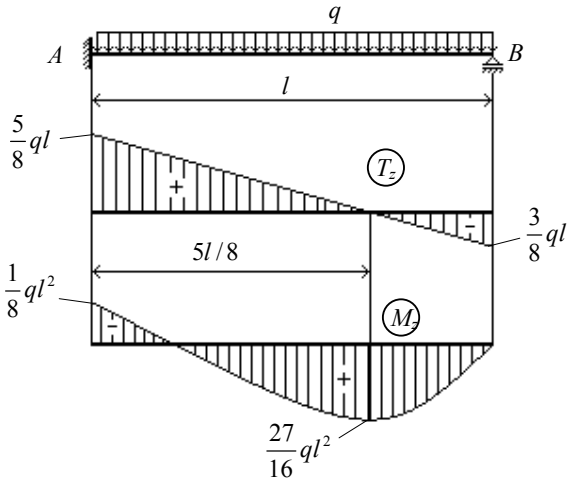


Fig. 3.87.

P.3.50. Se consideră grinda din figura 3.87, încastrată la un capăt şi simplu rezemată la celălalt, solicitată de o sarcină uniform distribuită de intensitate q. Să se traseze diagramele eforturilor secționale T_z şi M_z.

Pentru trasarea diagramelor de eforturi secționale este necesar să se determine forțele de legătură. Se constată însă că numărul acestora este 4 (trei în încastrarea A şi una în reazemul simplu B). Numărul ecuațiilor de echilibru ce pot fi scrise este 3. În consecință sistemul fiind o dată static nedeterminat (4 – 3 = 1), diagramele de eforturi secționale nu pot fi trasate deoarece din ecuațiile de echilibru nu pot fi determinate toate forțele de legătură.

Pentru rezolvarea problemei se va utiliza ecuația diferențială de ordinul IV a fibrei medii deformate (3.87) care, pentru cazul studiat este:

$$\frac{\mathrm{d}^4 v}{\mathrm{d}x^4} = \frac{q_y}{EI}.$$

Prin integrări succesive se obține:

$$EI_z \frac{\mathrm{d}^3 v}{\mathrm{d}x^3} = qx + C_1; \qquad EI_z \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = q\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2;$$

$$EI_z \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = q\frac{x^3}{6} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3; \qquad EI_z \cdot v = q\frac{x^4}{24} + C_1\frac{x3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4.$$

Pentru determinarea constantelor de integrare C_i (i = 1,2,3,4) se pun următoarele condiții la limită:

- în A pentru $x = 0 \rightarrow \begin{cases} v_A = 0 \Rightarrow C_4 = 0 \\ \varphi_A = 0 \Rightarrow C_3 = 0 \end{cases}$

- în B pentru $x = l \rightarrow \begin{cases} v_B = 0 \Rightarrow q\dfrac{l^4}{24} + C_1\dfrac{l^3}{6} + C_2\dfrac{l^2}{2} = 0 \\ M_B = 0 \Rightarrow q\dfrac{l^2}{2} + C_1 l + C_2 = 0 \end{cases}$

Prin rezolvarea sistemului se obține: $C_1 = -\frac{5}{8}ql$ şi $C_2 = \frac{1}{8}ql^2$.

În consecință, ecuația fibrei medii deformate este:

$$v = \frac{1}{24}\frac{ql^4}{EI}\left[\left(\frac{x}{l}\right)^4 - \frac{5}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \frac{3}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2\right].$$

Folosind relațiile (3.89) şi (3.88) se determină modul de variație al forței tăietoare T_z şi al momentului încovoietor M_z:

$$T_z = -\frac{1}{24}ql\left(24\frac{x}{l} - 15\right);$$

$$M_z = -\frac{1}{24}ql^2\left[12\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 15\left(\frac{x}{l}\right) + 3\right].$$

Pe baza acestor egalități s-au trasat diagramele din figura 3.87.

Momentul încovoietor are valoare maximă în secțiunea unde forța tăietoare se anulează. Din condiția $T_z = 0$ rezultă $x = 5l/8$, valoare care introdusă în expresia momentului încovoietor conduce la $M_{\max} = \frac{27}{16}ql^2$.

P.3.51. Pentru grinda simplu rezemată din figura 3.88 să se determine fibra medie deformată precizându-se rotirile pe reazeme şi săgeata în C.

Se aplică metoda parametrilor în origine. Alegând originea sistemului de referință în punctul A

şi cunoscând parametrii $M_0 = 0$ şi $T_0 = -2qa$, expresia (3.91) pentru încărcările din figura 3.88 devine:

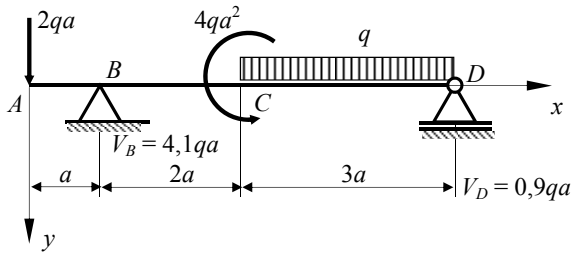


Fig. 3.88.

$$v = v_0 + \varphi_0 x + \frac{2qa}{EI_z}\frac{x^3}{6} - \frac{4{,}1qa}{EI_z}\frac{[x-a]^3}{6} + \frac{4qa^2}{EI_z}\frac{[x-3a]^2}{2} + \frac{q}{EI_z}\frac{[x-3a]^4}{24} -$$
$$- \frac{q}{EI_z}\frac{[x-6a]4}{24} - \frac{0{,}9qa}{EI_z}\frac{[x-6a]^3}{6}$$

Termenii cu paranteze drepte intervin numai pe intervalele în care valorile parantezelor sunt pozitive. În consecinţă, deoarece pentru bara considerată $x \le 6a$, ultimii doi termeni nu se mai iau în considerare.

Necunoscutele sunt v_0 şi φ_0.

Pentru determinarea lor se pun condiţiile la limită:

$$\begin{cases} \text{pentru } x = a \rightarrow v_B = 0; \\ \text{pentru } x = 6a \rightarrow v_D = 0; \end{cases}$$

din care rezultă:

$$\begin{cases} 0 = v_0 + \varphi_0 a - 0{,}3333\dfrac{qa^4}{EI_z} \\ 0 = v_0 + \varphi \cdot 6a + \dfrac{2qa}{EI_z}\dfrac{(6a)^3}{6} - \dfrac{4{,}1qa}{EI_z}\dfrac{(5a)^3}{6} + \dfrac{4qa^2}{EI_z}\dfrac{(3a)^2}{2} + \dfrac{q}{EI_z}\dfrac{(3a)^4}{24} \end{cases}$$

Din rezolvarea sistemului rezultă: $\varphi_0 = -1{,}525\dfrac{qa^3}{EI_z}$; $v_0 = 1{,}192\dfrac{qa^4}{EI_z}$.

Pentru determinarea rotirilor pe reazeme se foloseşte expresia (3.92), care, pentru încărcările

din figura 3.88, capătă forma:

$$\varphi = \varphi_0 x + \frac{2qa}{EI_z}\frac{x^2}{2} - \frac{4{,}1qa}{EI_z}\frac{[x-a]^2}{2} + \frac{4qa^2}{EI_z}[x-3a] + \frac{q}{EI_z}\frac{[x-3a]^3}{6}$$

Pentru $x = a$ rezultă:

$$\varphi_B = -1{,}525\frac{qa^3}{EI_z} + \frac{2qa}{EI_z}\frac{a^2}{2} = -0{,}525\frac{qa^3}{EI_z},$$

iar pentru $x = 6a$ se obține rotirea din punctul D:

$$\varphi_D = -1{,}525\frac{qa^3}{EI_z} + \frac{2qa}{EI_z}\frac{(6a)^2}{2} - \frac{4{,}1qa}{EI_z}\frac{(5a)^2}{2} + \frac{4qa^2}{EI_z}(3a) + \frac{q}{EI_z}\frac{(3a)^3}{6} = -0{,}275\frac{qa^3}{EI_z}$$

Folosind expresia fibrei medii deformate în care $x = 3a$, săgeata în punctul C este:

$$v_C = 1{,}192\frac{qa^4}{EI_z} - 1{,}525\frac{qa^3}{EI_z}3a + \frac{2qa}{EI_z}\frac{(3a)^3}{6} - \frac{4{,}1qa}{EI_z}\frac{(2a)^3}{6} = 0{,}1503\frac{qa^4}{EI_z}.$$

Probleme suplimentare

P.3.52. Consola din figura 3.89 de lungime l = 2 m, este solicitată de o sarcină uniform distribuită de intensitate q = 12 N/m. Să se dimensioneze secțiunea barei pentru σ_a = 150 N/mm^2 şi să se reprezinte variația tensiunilor σ şi τ_{xy} în secțiunea B.

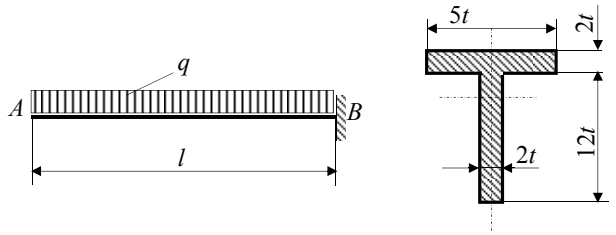


Fig 3.89.

P.3.53. O grindă simplu rezemată (fig. 3.90) de lungime l = 4 m este acționată de o sarcină uniform distribuită q = 15 N/m. Materialul din care este confecționată grinda are rezistența admisibilă σ_a = 150 N/mm^2. Să se dimensioneze grinda şi să se determine săgeata ei maximă.

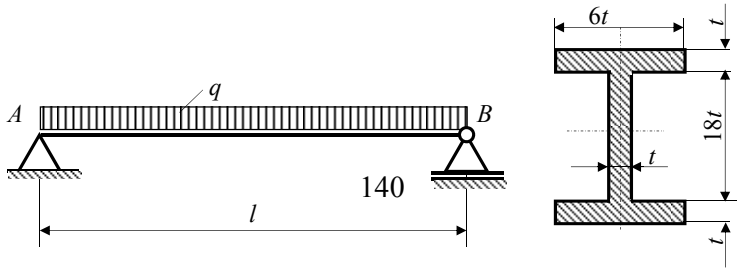


Fig. 3.90.

P.3.54. Bara din figura 3.91 are secțiunea dreptunghiulară şi este obținută dintr-un semifabricat cu secțiunea rotundă cu diametrul *D*. Ea este solicitată de o sarcină liniar distribuită cu intensitatea maximă q = 12 N/m, iar lungimea ei este l = 0,6 m. Ştiind că σ_a = 150 N/mm^2 se cer: *a*) diagramele de eforturi; *b*) dimensionarea barei stabilindu-se raportul optim dintre înălțimea *h* şi lățimea *b* a secțiunii; *c*) distribuția tensiunilor σ în secțiunea în care forța tăietoare se anulează.

P.3.55. . Pentru bara din figura 3.92 să se determine fibra medie deformată şi să se precizeze rotirile din *B* şi *C* şi v_{max}.

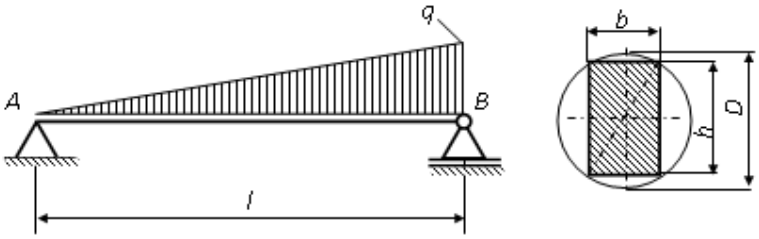


Fig. 3.91.

P.3.56. Pentru o grindă încastrată la capete (fig. 3.93), cu momentul de inerție constant, se cere să se traseze diagramele de eforturi şi săgeata maximă pentru o sarcină uniform distribuită pe toată deschiderea.

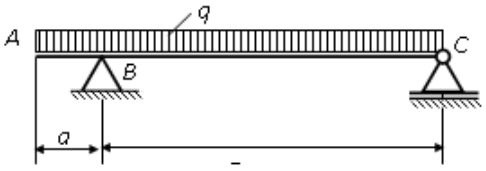


Fig. 3.92

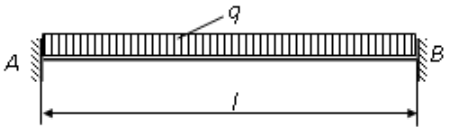
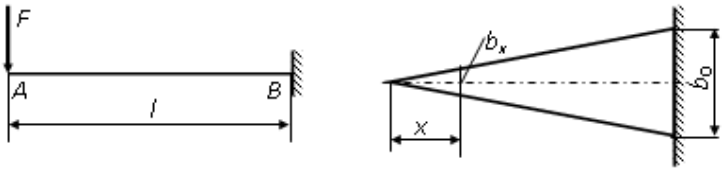


Fig. 3.93

P.3.57. Pentru consola din figura 3.94, *a* acționată de sarcina concentrată *F* se cer: *a*) fibra medie deformată cu precizarea valorilor v_A şi φ_A pentru cazul în care momentul de inerție al barei este constant şi egal cu I_0; *b*) săgeata şi rotirea cea mai mare în cazul în care lățimea secțiunii transversale variază liniar $b_x = b_0 \dfrac{x}{l}$ (fig. 3.94, *b*).



a) b)

Fig. 3.94.

3.5. TORSIUNEA BARELOR DREPTE CU SECŢIUNE CIRCULARĂ

O bară sau un tronson de bară este solicitată la răsucire (torsiune) atunci când în orice secțiune dreaptă a ei apare ca efort secțional numai un moment dirijat după axa x, M_x – notat uneori şi M_t (fig. 3.95). Pentru ca o bară să fie solicitată la torsiune trebuie ca cel puțin una din forțele care solicită bara să nu întâlnească axa acesteia.

În conformitate cu convenția de semne precizată în subcapitolul 1.3, momentul de răsucire este pozitiv când, pe fața din dreapta secțiunii, el este orientat în sensul axei x (de exemplu, în fig. 3.95, momentul $3Fb$, dat de cuplul de forțe $3F$, este pozitiv deoarece are vectorul orientat în sensul axei x).

Pentru reprezentarea grafică a momentului M_x se face următoarea convenție, diferită de convenția adoptată în cazul momentului de încovoiere, valorile pozitive se reprezintă deasupra axei barei, iar cele negative sub axa barei (fig. 3.95).

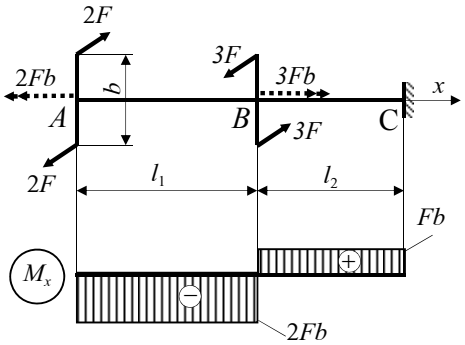


Fig. 3.95.

3.5.1. Distribuţia tensiunilor pe secţiunea dreaptă a barei

Deoarece în planul secțiunii drepte a barei torsorul eforturilor secționale se reduce numai la un vector M_x dirijat după axa barei relațiile de echivalență (1.29) devin:

$$
\begin{aligned}
N &= \int_{(A)} \sigma_x \mathrm{d}A = 0; & M_x &= \int_{(A)} (\tau_{xy} z - \tau_{xz} y)\mathrm{d}A \neq 0;\\
T_z &= \int_{(A)} \tau_{xy} \mathrm{d}A = 0; & M_y &= -\int_{(A)} \sigma_x z \mathrm{d}A = 0;\\
T_y &= \int_{(A)} \tau_{xz} \mathrm{d}A = 0; & M_z &= \int_{(A)} \sigma_x y \mathrm{d}A = 0.
\end{aligned}
\tag{3.93}
$$

Pentru a stabili modul de distribuție al tensiunilor se apelează la studiul aspectului geometric care furnizează relații între deformații specifice şi deplasări.

În acest scop se consideră o bară dreaptă cu secțiunea circulară (fig. 3.96, *a*) pe suprafața căreia se trasează două curbe directoare, la o distanța foarte mică una față de cealaltă, d*x*. Aceste curbe pot reprezenta intersecția dintre suprafața exterioară a barei şi două secțiuni drepte, infinit apropiate. Între cele două curbe directoare se trasează o serie de generatoare foarte apropiate între ele, care pot fi considerate segmente de lungime d*x* din fibrele situate la suprafața exterioară a barei (fig. 3. 96, *a*).

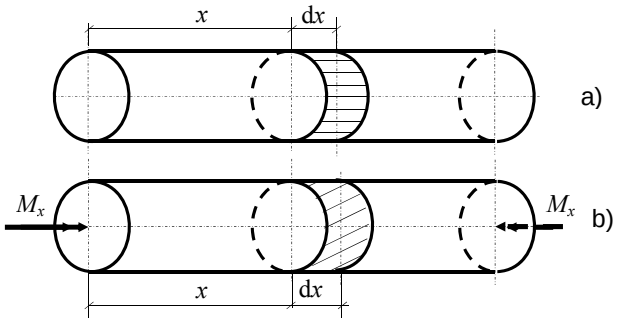


Fig.3.96.

După ce bara este solicitată de către un moment de răsucire pozitiv, M_x (fig. 3.96, *b*), se constată următoarele:

– cercurile rămân tot cercuri şi la aceeaşi distanță d*x*, fapt ce dovedeşte că secțiunea transversală rămâne plană

– toate generatoarele (care se identifică cu fibrele de la exteriorul barei) rămân paralele între ele, fiind înclinate cu acelaşi unghi față de tangentele corespunzătoare la curbele directoare.

Rezultă că la exteriorul barei:

$$\varepsilon_0 = 0. \; ; \; \gamma_0 = \text{ct.} \tag{3.94}$$

În baza observațiilor anterioare în interiorul barei are loc un fenomen similar, fapt ce conduce la concluzia că cele două secțiuni, situate la depărtarea d*x*, s-au rotit rigid între ele cu un unghi dφ (fig. 3.97).

În conformitate cu figura 3.97 se poate scrie:

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= \frac{\overline{nn'}}{\mathrm{d}x} \\ \overline{nn'} &= r\mathrm{d}\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \gamma = r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \text{ct.} \tag{3.95}$$

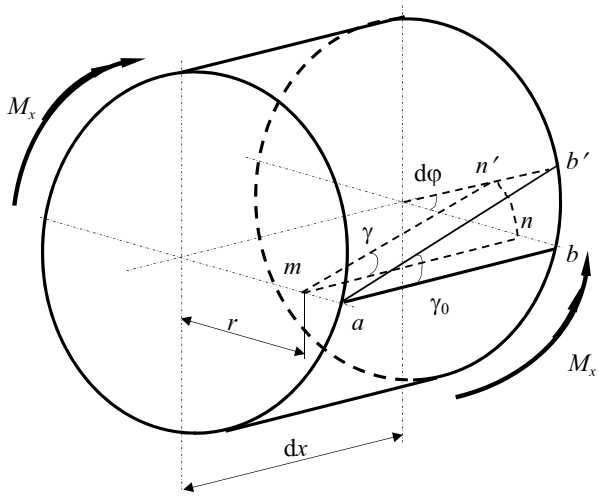


Fig. 3.97.

Relațiile aspectului fizic sunt cele furnizate de legea simplă a lui Hooke:

$$\sigma = E\cdot\varepsilon \ ; \ \tau = G\cdot\gamma \tag{3.96}$$

cu observația că tensiunea tangențială τ va fi tangentă la arcul $\overline{nn'}$, adică perpendiculară pe direcția razei (fig. 3.98). Rezultă:

$$\tau_{xy} = \tau\cdot\cos\alpha \ ; \ \tau_{xz} = -\tau\cdot\sin\alpha. \tag{3.97}$$

Egalitățile $\varepsilon = 0$ şi $\sigma = E\cdot\varepsilon$ conduc la concluzia că prima, a cincea şi a şasea egalitate din (3.93) sunt identic satisfăcute.

Având în vedere relația $\tau = G\gamma$ şi expresia deformației specifice unghiulare dată de relația (3.95), a doua egalitate (3.93) se scrie astfel:

$$T_y = \int_{(A)} \tau\cos\alpha \mathrm{d}A = G\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\int_{(A)} r\cos\alpha \mathrm{d}A = G\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\int_{(A)} z\mathrm{d}A = 0$$

deoarece $z = r\cos\alpha$ (fig. 3.98), iar $\int_{(A)} z\mathrm{d}A = S_y = 0$ reprezintă momentul static al secțiunii în raport cu axa y care este axă centrală.

Analog:

$$T_z = -\int_{(A)} \tau\sin\alpha \mathrm{d}A = \left(-G\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\int_{(A)} r\sin\alpha \mathrm{d}A = \left(-G\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\int_{(A)} y\mathrm{d}A = 0\,.$$

În condițiile precizate, egalitatea a patra din (3.93) capătă forma:

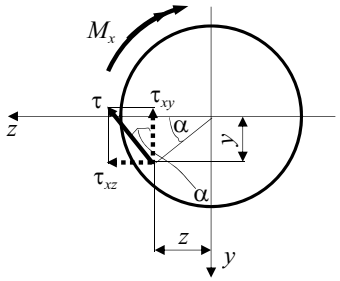


Fig. 3.98.

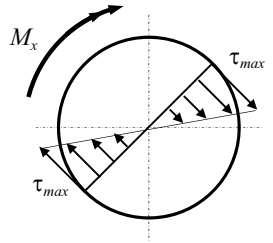


Fig. 3.99.

$$M_x = \int_{(A)} (z \cdot \tau \cos\alpha + y \cdot \tau \sin\alpha) \mathrm{d}A = \int_{(A)} \tau (r \cos^2 \alpha + r \sin^2 \alpha) \mathrm{d}A = \int_{(A)} \tau r \mathrm{d}A$$

sau, având în vedere aspectul fizic şi cel geometric,

$$M_x = G \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} \int_{(A)} r^2 \mathrm{d}A = G \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} I_p , \tag{3.98}$$

în care I_p este momentul de inerţie polar al secţiunii circulare în raport cu centrul ei de greutate. Raportul $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$ reprezintă rotirea a două secţiuni ale barei, situate la depărtarea dx una faţă de alta, şi poartă numele de *răsucire specifică*. Din relaţiile (3.95) şi (3.98) rezultă că:

$$\tau = \frac{M_x}{I_p} \cdot r , \tag{3.99}$$

relaţie care determină variaţia tensiunii tangenţiale τ pe secţiunea circulară a unei bare solicitate la torsiune. Se constată că pe secţiunea dreaptă tensiunile τ variază liniar (fig. 3.99), punctele cele mai solicitate fiind toate punctele de la periferia secţiunii unde τ atinge valoarea maximă pe secţiune:

$$\tau_{\max,\mathrm{sec}t} = \frac{M_x}{I_p} r_{\max} . \tag{3.100}$$

3.5.2. Calculul de rezistenţă

Tensiunea tangenţială maximă din cuprinsul barei se va găsi în secţiunea periculoasă, secţiune în care momentul de torsiune are valoarea maximă $M_x^{\max}$ şi care se identifică pe baza diagramei M_x.

Condiția de rezistență pentru o bară dreaptă cu secțiune circulară solicitată la torsiune are forma:

$$\tau_{\max} = \frac{\left|M_x^{\max}\right|}{W_p} \le \tau_a, \tag{3.101}$$

unde $W_p = \dfrac{I_p}{r_{\max}}$ reprezintă modulul de rezistență la torsiune al secțiunii circulare.

În cazul secțiunii circulare pline, pentru care $I_p = \pi d^4/32$ şi $r_{\max} = d/2$:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}, \tag{3.102}$$

iar pentru cazul secțiunii inelare, la care $I_p = \pi D^4/32 - \pi d^4/32$ şi $r_{\max} = D/2$:

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right]. \tag{3.103}$$

Relația (3.101) se foloseşte atât pentru dimensionare, caz în care dimensiunile secțiunii barei se determină din egalitatea:

$$W_p^{nec} = \frac{\left|M_x^{\max}\right|}{\tau_a} = W_p^{\dim}, \tag{3.104}$$

cât şi pentru verificarea unor secțiuni. De asemenea, pe baza relației (3.101) se poate determina efortul secțional capabil al unei bare cu secțiune circulară solicitată la torsiune:

$$M_x^{\max} \le M_x^{cap} = \tau_a W_p^{ef}. \tag{3.105}$$

Observație. Când barele solicitate la torsiune sunt piese în mişcare de rotație în jurul axului lor ele poartă numele de *arbori* şi reprezintă organe de maşini. Solicitarea la torsiune a acestora se face prin intermediul unor transmisii (prin lanț, curele sau diverse angrenaje) care transmit un cuplu de la un motor, ce poate dezvolta o putere P, cu un anumit număr de rotații pe minut n. Dacă puterea P a motorului este exprimată în kW, cuplul motor transmis prin intermediul arborelui se calculează cu relația:

$$M_x = 9{,}55 \cdot 10^3 \frac{P[\text{kW}]}{n[\text{rot/min}]}\,[\text{N}\cdot\text{m}]. \tag{3.106}$$

3.5.3. Tensiuni pe secţiuni înclinate la bare solicitate la torsiune

Fie un tub subțire solicitat la torsiune ca în figura 3.100, *a*. Pe fețele unui inel detaşat din tub se dezvoltă tensiuni tangențiale τ, al căror sens de rotire în jurul axei de simetrie a tubului este acelaşi cu cel al momentului de torsiune M_x (fig. 3.100, *b*). Dacă se detaşează un element *abcd* din inelul considerat, pe fețele lui se dezvoltă numai tensiuni tangențiale τ după cum se poate vedea în figura 3.100, *c*.

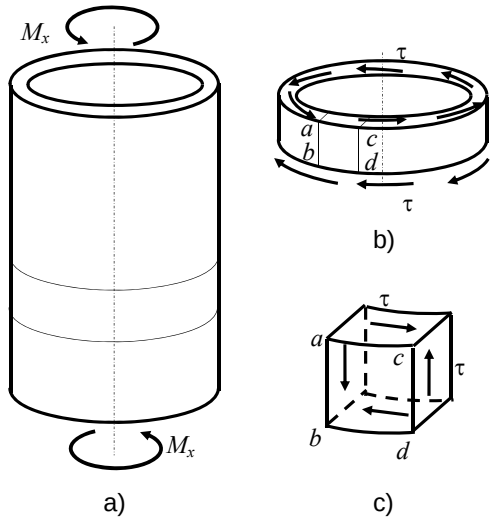


Fig.3.100.

Se constată că starea de tensiuni din tubul subțire solicitat la torsiune este o stare plană de tensiuni – în planele perpendiculare pe normalele la axul de rotație nu se dezvoltă tensiuni.

Să considerăm elementul *abcd* orientat față de un sistem de referință *xOyz* şi de grosime egală cu unitatea aşa ca în figura 3.101, *a*.

Pentru determinarea tensiunilor pe un plan înclinat cu unghiul α față de *Oy* se exprimă echilibrul elementului de volum din figura 3.101, *b*.

Proiectând pe direcția lui σ_α şi a lui τ_α toate forțele generate de tensiuni, se obține:

$$\sigma_\alpha \cdot 1 \cdot ds - \tau_{xy} \cdot 1 \cdot dy \cdot \sin\alpha - \tau_{yx} \cdot 1 \cdot dx \cdot \cos\alpha = 0$$

$$\tau_\alpha \cdot 1 \cdot ds - \tau_{xy} \cdot 1 \cdot dy \cdot \cos\alpha - \tau_{yx} \cdot 1 \cdot dx \cdot \sin\alpha = 0.$$

Deoarece $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $dx = ds \cdot \sin\alpha$ şi $dy = ds \cdot \cos\alpha$ din cele două ecuații rezultă:

$$\sigma_\alpha = \tau_{xy} \cdot \sin 2\alpha; \tag{3.107}$$

$$\tau_\alpha = \tau_{xy} \cdot \cos 2\alpha. \tag{3.108}$$

Se observă că pe plane înclinate cu $\alpha = \pm 45^o$ tensiunile au valorile:

$$\sigma_{45^o} = \pm\tau_{xy} \quad ; \quad \tau_{45^o} = 0 .$$

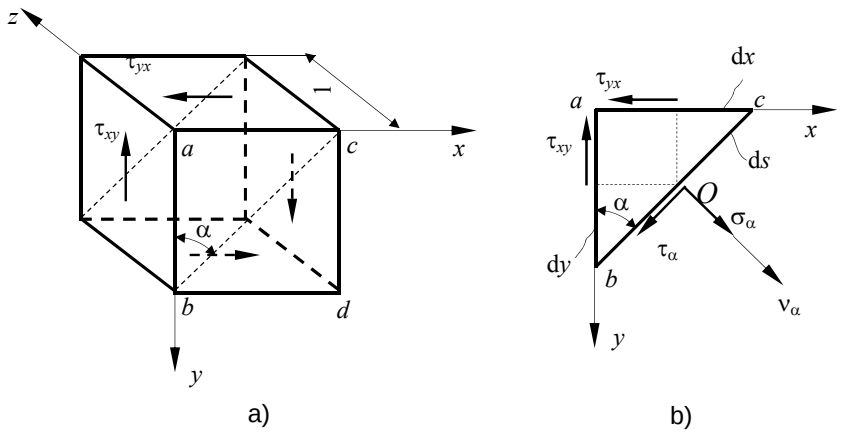


Fig. 3.101.

Acelaşi rezultat se obține dacă în expresia tensiunilor principale (3.79) se face $\sigma_x = \sigma_y = 0$ (corespunzător solicitării de forfecare pură)

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_{xy}. \tag{3.109}$$

Se constată că, în cazul solicitării de forfecare pură, tensiunile principale sunt egale şi de semne contrare şi se dezvoltă în plane dispuse la 45° (fig. 3.102, *b*).

3.5.4. Deformarea barelor drepte cu secţiune circulară solicitate la torsiune

După cum s-a demonstrat anterior, datorită solicitării la torsiune, două secțiuni ale barei, infinit vecine, se rotesc rigid una față de alta, în jurul axei barei, cu unghiul:

$$\mathrm{d}\varphi = \gamma \frac{\mathrm{d}x}{r} = \frac{M_x}{GI_p}\mathrm{d}x\,. \tag{3.110}$$

Se constată că un vector de rotație dirijat în sensul pozitiv al axei x produce rotiri pozitive. În consecință un moment de torsiune pozitiv, al cărui vector pe fața din stânga secțiunii este dirijat în sensul negativ al axei x, produce rotiri negative (orare). Rezultă că două secțiuni, 1 şi 2, ale unei bare, se rotesc între ele cu unghiul:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_{1-2} = -\int_1^2 \frac{M_x}{GI_p}\mathrm{d}x\,. \tag{3.111}$$

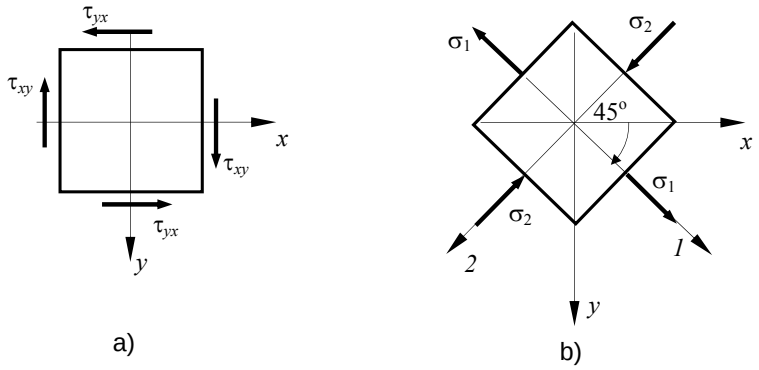


Fig. 3.102.

Dacă pe intervalul 1-2 bara are secțiune constantă atunci:

$$\varphi_{1-2} = -\frac{\Omega_{1-2}}{GI_p} \tag{3.112}$$

unde $\Omega_{1\text{-}2}$ reprezintă suprafața diagramei de moment M_x între secțiunile 1 şi 2.

Dacă pe intervalul 1-2 sunt m tronsoane cu secțiuni constante atunci:

$$\varphi_{1-2} = -\sum_{i=1}^{m} \frac{\Omega_i}{GI_{p,i}}, \tag{3.113}$$

unde Ω_i reprezintă aria diagramei momentului de torsiune pe tronsonul i, iar $I_{p,i}$ – momentul de inerție polar al tronsonului i.

În cazul organelor de maşini, pentru buna funcționare a subansamblului, maşinii sau instalației respective, este necesar ca deformarea arborilor să nu depăşească anumite limite. În aceste cazuri se impune o condiție de rigiditate sub forma:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)_{\max} = \frac{\left|M_x^{\max}\right|}{GI_p} \le \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)_a, \tag{3.114}$$

unde $\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)_a$ reprezintă *răsucirea specifică admisibilă*, care se prescrie în funcție de condițiile cinematice impuse de buna funcționare a subansamblului maşinii sau instalației respective.

Deoarece barele solicitate la torsiune au, în general deformații mari, de cele mai multe ori condiția de rigiditate (3.114) poate fi mai restrictivă decât condiția de rezistență (3.101). Din această cauză cele două condiții trebuie verificate obligatoriu.

3.5.5. Sisteme static nedeterminate la torsiune

O bară dublu încastrată la torsiune, care poate avea secțiunea variabilă, şi solicitată de cupluri de forțe ce au vectorii momentele dirijate după axa barei constituie un sistem static nedeterminat la torsiune (fig. 3.103, *a*).

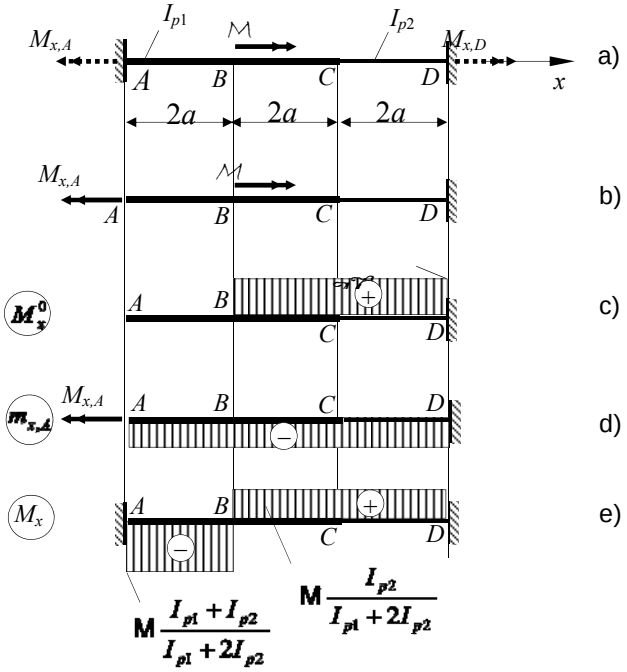


Fig. 3.103.

Sistemul este static nedeterminat deoarece pentru determinarea momentelor $M_{x,A}$ şi $M_{x,D}$ (fig. 3.103. *a*) aspectul static furnizează o singură ecuație şi anume ecuația de momente în raport cu axa barei (axa *x*):

$$-M_{x,A} + \mathcal{M} + M_{x,D} = 0. \qquad \text{(a)}$$

Pentru ridicarea nedeterminării şi trasarea diagramei momentului de torsiune M_x se adoptă sistemul static determinat din figura 3.103, *b*, *numit forma de bază*, obținut din sistemul real prin suprimarea încastrării la torsiune din *A*. În locul legăturii suprimate se introduce momentul $M_{x,A}$ a cărui mărime urmează să o determinăm (direcția este cunoscută, iar sensul este ales arbitrar).

Sistemul static determinat din figura 3.103, *b*, adică forma de bază, se încarcă

pe rând cu cuplul $\mathcal{M}$ şi cu momentul $M_{x,A}$ trasându-se diagramele M_x^0 (fig.3.103,*c*) şi $m_{x,A}$ (fig. 3.103, *d*). Forma de bază solicitată de $\mathcal{M}$ şi de $M_{x,A}$, aplicând principiul suprapunerii efectelor, trebuie să se comporte ca sistemul real din figura 3.103, *a*. Această condiție este echivalentă cu a scrie:

$$\varphi_A^0 + \varphi'_A = 0, \tag{b}$$

în care φ_A^0 este rotirea la torsiune în secțiunea *A* produsă de $\mathcal{M}$ pe forma de bază, iar φ'_A, rotirea la torsiune în secțiunea *A* produsă de $M_{x,A}$ tot pe forma de bază.

Folosind diagramele momentelor de torsiune din figura 3.103, *c* si *d*, relația (3.111) capătă formele:

$$\varphi_D^0 - \varphi_A^0 = -\int_A^D \frac{M_x^0 \mathrm{d}x}{GI_p}; \qquad \varphi'_D - \varphi'_A = -\int_A^D \frac{m_{x,A}\mathrm{d}x}{GI_p}. \tag{c}$$

Cum şi în punctul *D* bara este încastrată şi în consecință $\varphi_D^0 = \varphi'_D = 0$, relațiile (c) devin:

$$\begin{aligned} \varphi_A^0 &= \frac{\mathcal{M}\cdot 2a}{GI_{p1}} + \frac{\mathcal{M}\cdot 2a}{GI_{p2}}; \\ \varphi'_A &= -\frac{M_{x,A}\cdot 4a}{GI_{p1}} - \frac{M_{x,A}\cdot 2a}{GI_{p2}} \end{aligned}. \tag{d}$$

Înlocuind expresiile lui φ_A^0 si φ'_A în ecuația (b) se obține:

$$\frac{M_{x,A}\cdot 2a}{GI_{p1}} + \frac{\left(-\mathcal{M} + M_{x,A}\right)\cdot 2a}{GI_{p1}} + \frac{\left(-\mathcal{M} + M_{x,A}\right)\cdot 2a}{GI_{p2}} = 0. \tag{e}$$

Din rezolvarea ecuației (e) rezultă:

$$M_{x,A} = \mathcal{M}\frac{I_{p1} + I_{p2}}{I_{p1} + 2I_{p2}}.$$

Odată nedeterminarea ridicată se poate trasa diagrama momentului de torsiune M_x, pe structura reală (fig. 3.103, *e*), încărcând sistemul static determinat ales cu cuplul *M* şi cu valoarea reală a momentului de legătură din încastrarea *A*, sau prin însumarea diagramelor M_x^0 si $m_{x,A}$, folosind valoarea obținută pentru $M_{x,A}$.

Pe baza diagramei M_x se poate calcula rotirea torsională a oricărei secțiuni a barei, folosind relația (3.111).

3.5.6. Calculul arcurilor elicoidale cu pasul mic

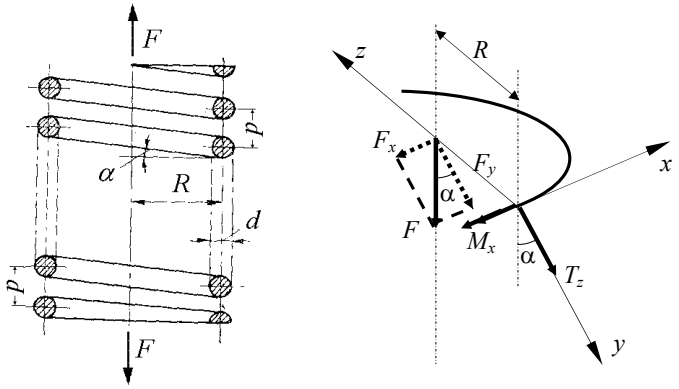
Arcurile elicoidale sunt elemente foarte des folosite în construcția de maşini şi sunt alcătuite dintr-o sârmă, de cele mai multe ori cu secțiune circulară, care are axa de forma unei elice cu pas constant. Elementele geometrice ale unui arc elicoidal sunt:

– raza R a cilindrului pe care este înfăşurată axa sârmei;

– diametrul d al secțiunii sârmei;

– numărul n de spire ale resortului;

– pasul elicei $p = 2\pi R \cdot \tan\alpha$ (fig. 3.104, *a*).



a) b)

Fig. 3.104.

3.5.6.1. Determinarea tensiunilor şi dimensionarea

Pentru a calcula eforturile secționale din spira resortului se definesc mai întâi axele intrinseci ale secțiunii astfel (fig. 3.104, *b*):

– axa x: tangentă la axa spirei în secțiunea considerată, în sensul de măsurare al arcelor;

– axa y: axa din planul secțiunii spirei conținută în planul tangent la suprafața cilindrului definit de axa spirei; axa y face unghiul α cu direcția generatoarei cilindrului înfăşurător;

– axa z: axa din planul secțiunii spirei perpendiculară pe planul tangent definit de axele x şi y; această axă intersectează axa arcului (adică a cilindrului înfăşurător) sub un unghi drept.

Se reduce apoi forța F (din urma secțiunii), în punctul unde axa z intersectează axa arcului şi se descompune, în acest punct, după direcțiile axelor x, y şi z. Deoarece axa z este perpendiculară pe axa arcului, deci şi pe direcția forței F, aceasta va avea doar componentele (fig. 3.104, *b*):

$$F_x = F\cdot\sin\alpha; \qquad F_y = F\cdot\cos\alpha.$$

Reducând acum aceste două forțe în axa spirei se obțin următoarele eforturi secționale:

$$N = F_x = F\cdot\sin\alpha; \qquad T_y = 0; \qquad T_z = -F_y = -F\cdot\cos\alpha;$$
$$M_x = -F_y\cdot R = -F\cdot R\cdot\cos\alpha; \quad M_y = -F_x\cdot R = -F\cdot R\cdot\sin\alpha; \quad M_z = 0.$$

Dacă unghiul $\alpha < 12^o$ arcul elicoidal se consideră cu pasul mic şi se pot face următoarele aproximații:

$$\sin\alpha \cong 0; \quad \cos\alpha \cong 1.$$

În baza acestor aproximații:

$$N \cong 0; \quad T_y \cong 0; \quad T_z \cong -F; \quad M_x \cong -F\cdot R; \quad M_y \cong 0; \quad M_z = 0.$$

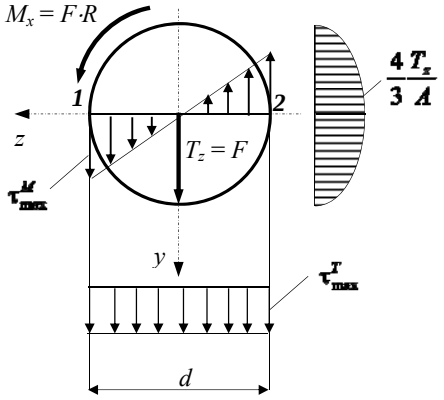


Fig. 3.105.

Rezultă că, în planul secțiunii drepte a spirei se dezvoltă numai eforturile secționale M_x şi T_z aşa cum se poate vedea în figura 3.105.

Ca urmare, în punctele din planul secțiunii drepte se dezvoltă numai tensiuni tangențiale, ale căror variații, sunt redate în figura 3.105.

În consecință tensiunile tangențiale τ_{Mx} (calculate cu relația (3.101))şi τ_{Tz} (vezi problema P.3.44), provocate de solicitării spirei arcului la torsiune, respectiv forfecare, se adună geometric. În punctele de pe dreapta *1–2* tensiunile au şi aceeaşi direcție, iar în punctul *1* ele au şi acelaşi sens. Rezultă că în toate punctele *1* de pe toate secțiunile spirei, tensiunea τ are valoarea maximă, oricare din aceste puncte putând fi punctul cel mai periculos din bară:

$$\tau_{\max} = \tau_{\max}^{M_x} + \tau_{\max}^{T_z} = \frac{M_x}{W_p} + \frac{4}{3}\frac{T_z}{A} \tag{3.115}$$

În cazul în care secţiunea spirei este rotundă $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$ şi $A = \frac{\pi d^2}{4}$. Din condiţia de rezistenţă (3.101) şi relaţia (3.115) rezultă formula de verificare a arcurilor elicoidale:

$$\tau_{\max} = \frac{FR}{W_p}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{d}{R}\right) \le \tau_a . \tag{3.116}$$

Se constată că, în cazul proiectării, condiţia de rezistenţă, transformată în relaţie de dimensionare, conţine doi parametri: d – diametrul secţiunii şi R – raza de înfăşurare a spirei. Din această cauză pentru dimensionare fie se va alege d şi se va calcula R, fie invers.

În cazul în care se calculează d se observă că ecuaţia de dimensionare obţinută din condiţia de rezistenţă (3.116) este de gradul trei. Pentru a evita rezolvarea acestei ecuaţii se procedează astfel:

– se face o pre-dimensionare a secţiunii spirei numai la torsiune folosind relaţia (3.104) şi se alege o dimensiune puţin mai mare;

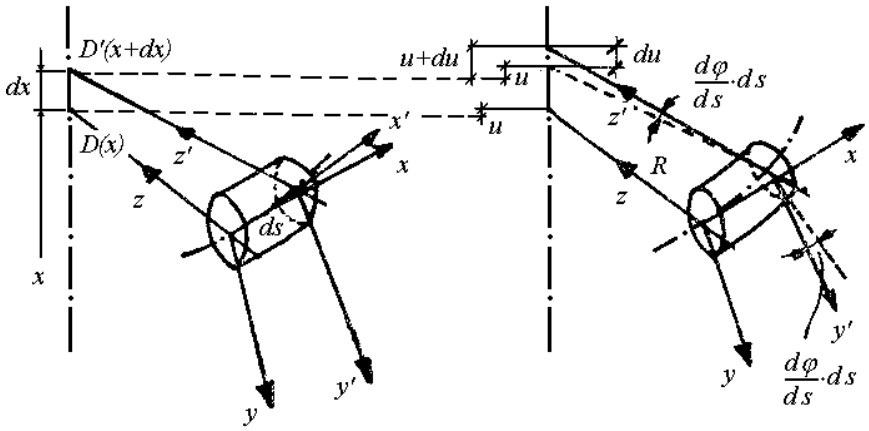
– folosind dimensiunile adoptate, se verifică în mod obligatoriu condiţia de rezistenţă (3.116).

3.5.6.2. Calculul săgeţii resortului

Se consideră un element de spiră de lungime ds la distanţa s faţă de unul din capetele arcului nedeformat. Cele două axe z şi z', din planele secţiunilor drepte ce delimitează elementul de spiră de lungime ds, intersectează axa arcului în punctele D, respectiv D', situate la departarea X, respectiv X + dX de capătul arcului faţă de care s-a măsurat distanţa s (fig. 3.106, *a*).

După deformare, punctul D se deplasează pe axa arcului cu u, iar punctul D' cu u + du (fig. 3.106, *b*). Deplasarea elementară du este consecinţa deformării elementului de spiră de lungime ds ca urmare a torsiunii, adică a rotirii elementare a celor două secţiuni ale sale cu unghiul $\mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} \cdot \mathrm{d}s$ (cu neglijarea unor cantităţi elementare de ordin superior)(fig. 3.106, *b*). Din figură rezultă:

$$\mathrm{d}u = R \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} \cdot \mathrm{d}s ,$$



a) b)

Fig. 3.106.

Dacă se neglijează efectul forței tăietoare, $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}$ este răsucirea specifică care, conform cu (3.109), are expresia:

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = \frac{M_x}{GI_p} = \frac{FR}{GI_p}.$$

În concluzie, înlocuind expresia răsucirii specifice în cea a deplasării du, rezultă:

$$\mathrm{d}u = \frac{FR^2}{GI_p}\mathrm{d}s,$$

sau, după integrare între capetele resortului:

$$v = u_2 - u_1 = \frac{FR^2}{GI_p}s_{1-2}$$

unde $s_{1\text{-}2}$ este lungimea totală a axei spirei arcului, egală cu de n ori lungimea unei spire a elicei. În cazul arcurilor elicoidale la care $\alpha < 12^{\circ}$ pasul este mic, se poate aproxima lungimea unei spire cu circumferința cercului de înfăşurare şi deci $s_{1\text{-}2} = 2\pi Rn$. Înlocuind în expresia săgeții resortului se obține:

$$v = \frac{2\pi FR^3}{GI_p}n. \qquad (3.117)$$

În cazul arcului cu spira cu secțiune circulară, unde $I_p = \pi d^4/32$, săgeata este:

$$v = \frac{64FR^3}{Gd^4} n \,. \tag{3.118}$$

Între intensitatea forței F cu care arcul este solicitat şi deplasarea elastică v (săgeata arcului), există relația:

$$F = kv, \tag{3.119}$$

unde k este constanta elastică a arcului şi are ca unități de măsură N/m.

3.5.6.3. Sisteme static nedeterminate cu arcuri

Două arcuri elicoidale, cu dimensiunile geometrice cunoscute, se asamblează ca în figura 3.107, *a* şi sunt solicitate de o forță F.

Se notează cu F_1 forța preluată de arcul *1*, a cărui constantă elastică este k_1, şi cu F_2 forța preluată de arcul *2* a cărui constantă elastică este k_2.

Pentru determinarea forțelor F_1 şi F_2, se studiază mai întâi aspectul static al problemei. Pentru acesta se izolează nodul B, prin secționarea arcurilor, şi se obține sistemul de forțe din figura 3.107, *b*. Din echilibrul acestuia rezultă:

$$F_1 + F_2 = F \,. \tag{a}$$

Se constată că sistemul este o dată static nedeterminat. Pentru rezolvarea lui se apelează la aspectul geometric al problemei şi se constată că, întrucât punctul B este comun ambelor arcuri, există relația de compatibilitate:

$$v_B = v_1 = v_2 \,. \tag{b}$$

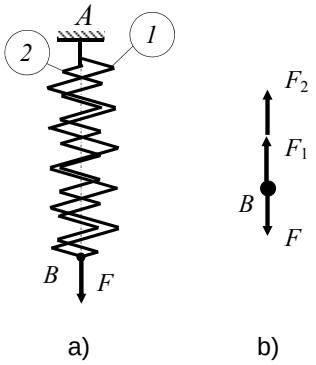


Fig. 3.107.

Deoarece săgețile v_1 şi respectiv v_2 nu sunt cunoscute, se folosesc relațiile (3.118) şi (3.119) – care exprimă aspectul fizic al problemei – obținându-se o a doua ecuație:

$$\frac{F_1}{k_1} = \frac{F_2}{k_2} \,. \tag{c}$$

Rezolvând acum sistemul format din ecuațiile (a) şi (c) se determină cele două forțe:

$$F_1 = F\frac{k_1}{k_1+k_2}; \qquad F_2 = F\frac{k_2}{k_1+k_2}. \tag{d}$$

Se constată că forța F se distribuie celor două arcuri proporțional cu coeficienții de rigiditate.

Observație. Pentru ca un sistem static nedeterminat cu arcuri să fie proiectat rațional, este necesar ca toate arcurile care îl alcătuiesc să îndeplinească condiția de rezistență la limită, adică arcurile să fie toate solicitate la capacitatea lor portantă. Pentru aceasta, arcurile trebuie executate cu lungimi diferite, din care cauză la montaj vor apărea tensiuni inițiale. Astfel, dacă arcul *2* din figura 3.107, *a* este mai scurt cu Δ decât arcul *1* atunci, aspectul geometric al problemei dat de egalitatea (b) devine:

$$v_1 = v_2 - \Delta. \tag{e}$$

Această egalitate împreună cu relațiile (a) şi (c) permit determinarea lui F_1 şi F_2:

$$F_1 = F\frac{k_1}{k_1+k_2} - \Delta\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}; \quad F_2 = F\frac{k_2}{k_1+k_2} + \Delta\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}. \tag{f}$$

Prin egalarea cu eforturile capabile deduse din formula (3.116), se ajunge la un sistem de ecuații din care se determină valoarea optimă a lui Δ şi valoarea maximă a forței F pe care o poate suporta sistemul de arcuri.

Probleme rezolvate

P.3.58. Bara *ABCE* din figura 3.108, *a* este acționată de cuplurile concentrate în *B*, *C* şi *E*, ce au acelaşi braț, $b = 0{,}3$ m, iar intensitatea forței $F = 13$ kN. Ştiind că $\tau_a = 60$ N/mm^2 şi că răsucirea specifică admisibilă $(d\varphi/dx) = (1/4)$ ^{o}/m să se dimensioneze bara şi să se adopte varianta economică între cazul în care secțiunea este circulară plină şi cazul în care secțiunea este inelară cu $d/D = 0{,}7$ (fig. 3.108, c).

Dacă se reduc cuplurile de forțe în axa barei şi se consideră $\mathcal{M} = Fb$ se trasează diagrama momentului de torsiune din figura 3.108, *b*. Se menționează că reprezentarea se face cu momentul M_x pozitiv deasupra axei barei (ca la forța tăietoare).

Se constată că intervalul cel mai solicitat este *BC* pe care $M_x = 3\mathcal{M} = 3\cdot 13\cdot 0{,}3 = 11{,}7$ kNm.

Pentru dimensionare se foloseşte relația (3.104) şi se calculează mai întâi modulul de rezistență necesar la torsiune:

$$W_p^{nec} = \frac{\left|M_x^{\max}\right|}{\tau_a} = \frac{11{,}7\cdot 10^6}{60} = 1{,}95\cdot 10^5 \text{ mm}^3.$$

Pentru secțiunea circulară:

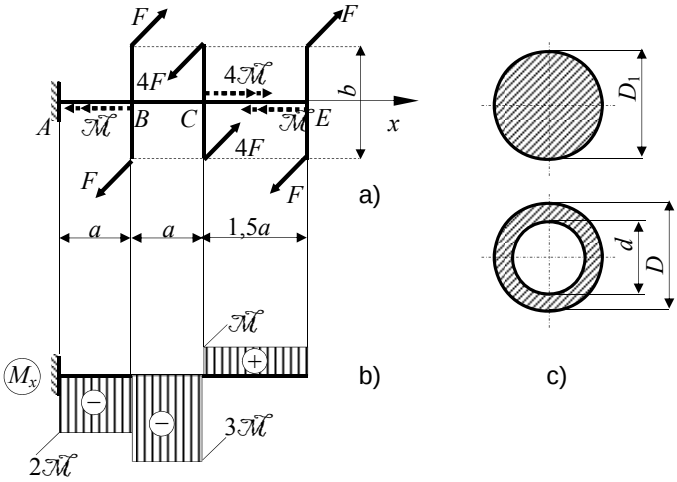


Fig. 3.108.

$$W_p^{\dim} = \frac{\pi D_1^3}{16} = 1{,}95 \cdot 10^5 \Rightarrow D_1 = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1{,}95 \cdot 10^5}{\pi}} = 99{,}77 \text{ mm}.$$

Se adoptă D_1 = 100 mm şi se face verificarea cu condiția de rezistență (3.101):

$$\tau_{\max}^{ef} = \frac{\left|M_x^{\max}\right|}{W_p^{ef}} = \frac{11{,}7 \cdot 10^6}{\frac{\pi \cdot 100^3}{16}} = 59{,}58 \text{ N/mm}^2 < \tau_a = 60 \text{ N/mm}^2.$$

Se face verificarea condiției de rigiditate cu relația (3.114):

$$\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)_{\max} = \frac{\left|M_x^{\max}\right|}{GI_p} = \frac{11{,}7 \cdot 10^6}{8{,}1 \cdot 10^4 \cdot \frac{\pi \cdot 100^4}{32}} = 1{,}47 \cdot 10^{-5} \text{ rad/mm} >$$

$$> \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)_a = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{1000} = 4{,}36 \cdot 10^{-6} \text{ rad/mm}.$$

Deoarece condiția de rigiditate nu este îndeplinită dimensionarea se face prin transformarea relației (3.114) în formulă de dimensionare:

$$I_p^{nec} = \frac{\left|M_x^{\max}\right|}{G\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)_a} = \frac{11{,}7 \cdot 10^6}{(8{,}1 \cdot 10^4)(4{,}36 \cdot 10^{-6})} = 3{,}31 \cdot 10^7 \text{ mm}^4.$$

Din egalitatea:

$$3{,}31\cdot 10^7 = \frac{\pi D_1^4}{32} \Rightarrow D_1 = \sqrt[4]{\frac{32\cdot 3{,}31\cdot 10^7}{\pi}} = 135{,}5\ \text{mm}.$$

Procedând analog pentru secțiunea inelară se obține:

$$W_p^{\dim} = \frac{\pi D^3}{16}\left[1-\left(\frac{d}{D}\right)^4\right] = \frac{\pi D^3}{16}(1-0{,}7^4) = 1{,}95\cdot 10^5 \Rightarrow D = \sqrt[3]{\frac{16\cdot 1{,}95\cdot 10^5}{\pi(1-0{,}7^4)}} = 109{,}33\ \text{mm}.$$

Se adoptă $D = 110$ mm şi $d = 77$ mm şi se face verificarea condiției de rezistență:

$$\tau_{\max}^{ef} = \frac{11{,}7\cdot 10^6}{\frac{\pi\cdot 110^3}{16}\left[1-\left(\frac{77}{110}\right)^4\right]} = 58{,}9\ \text{N/mm}^2 < \tau_a.$$

Se verifică şi condiția de rigiditate:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)_{\max} = \frac{\left|M_x^{\max}\right|}{GI_p} = \frac{11{,}7\cdot 10^6}{8{,}1\cdot 10^4\cdot\frac{\pi\cdot 110^4}{32}\left[1-\left(\frac{77}{110}\right)^4\right]} = 1{,}32\cdot 10^{-5}\ \text{rad/mm} > \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)_a$$

şi se constată că nu este îndeplinită, fapt pentru care se dimensionează bara din condiția de deformație impusă:

$$3{,}31\cdot 10^7 = \frac{\pi D^4}{32}\left[1-\left(\frac{77}{110}\right)^4\right] \Rightarrow D = \sqrt[4]{\frac{32\cdot 3{,}31\cdot 10^7}{\pi\cdot\left[1-\left(\frac{77}{110}\right)^4\right]}} = 145{,}1\ \text{mm}.$$

În final se adoptă $D = 146$ mm şi $d = 102$ mm.

Pentru adoptarea variantei economice se calculează consumul de material pentru cele două tipuri de secțiune:

– bară cu secțiune circulară plină:

$$V_1 = \frac{\pi D_1^2}{4}\cdot 3{,}5a = \frac{\pi\cdot 135{,}5^2}{4}\cdot 3{,}5\cdot 400 = 0{,}0201\ \text{m}^3;$$

– bară cu secțiune inelară:

$$V = \frac{\pi D^2}{4}\left[1-\left(\frac{d}{D}\right)^2\right]\cdot 3{,}5a = \frac{\pi\cdot 146^2}{4}\left[1-\left(\frac{102}{146}\right)^2\right]\cdot 3{,}5\cdot 400 = 0{,}012\ \text{m}^3.$$

Se constată că varianta cu secțiune inelară este mai convenabilă, economia de material fiind de:

$$e = \frac{V_1 - V}{V_1} = \frac{0{,}0201-0{,}012}{0{,}0201}\cdot 100 = 40{,}3\ \%.$$

P.3.59. O bară cu secţiune inelară, cu lungimea l = 1,3 m, transmite un moment de torsiune M_x = 430 Nm. Răsucirea relativă a celor două capete ale barei nu trebuie să depăşească 2,5°. Cunoscând rezistenţa materialului barei la torsiune τ_a = 60 N/mm^2 şi modulul său de elasticitate transversal $G = 8{,}1\cdot 10^4$ N/mm^2, să se determine diametrul interior şi exterior al barei.

Din condiţia de dimensionare la torsiune (3.104) rezultă:

$$W_p^{nec} = \frac{430\cdot 10^3}{60} = W_p^{\dim} = \frac{I_p}{r_{\max}} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}\cdot\frac{2}{D} \Rightarrow D^4 - d^4 = 36499{,}53D\,.$$

Rotirea relativă a celor două capete ale barei se calculează cu relaţia (3.111):

$$\varphi_{1-2} = \frac{M_x\cdot l}{GI_p} = \frac{(430\cdot 10^3)(1{,}3\cdot 10^3)}{(8{,}07\cdot 10^4)\dfrac{\pi}{32}(D^4 - d^4)} = \frac{70295{,}4}{D^4 - d^4}\ \text{rad.}$$

Această valoare nu trebuie să depăşească valoarea impusă:

$$\varphi_{\max} = 2{,}5\cdot\frac{\pi}{180} = 0{,}04363\ \text{rad.}$$

Egalând cele două valori rezultă:

$$D^4 - d^4 = 1{,}61117\cdot 10^6\,.$$

Rezolvând sistemul de două ecuaţii în care necunoscutele sunt D şi d se obţine:

$36499{,}53D = 1{,}61117\cdot 10^6$ sau D = 44,14 mm.

Înlocuind într-una din cele două ecuaţii se obţine d =38,45 mm. În final se adoptă D = 44,2 mm şi d = 38,4 mm.

P.3.60. Un arbore de transmisie are turaţia n = 340 rot/min. El primeşte prin intermediul roţii *2* o putere P_2 = 95 kW şi pune în mişcare maşini de lucru care consumă prin intermediul roţilor *1* şi *4* puteri egale $P_1 = P_4$ = 30 kW, iar prin intermediul roţii *3* puterea P_3 = 35 kW. Forma constructivă a arborelui prevede roţile aşezate lângă lagăre (fig. 3.109, *a*) pentru a nu solicita arborele şi la încovoiere. Să se calculeze diametrul secţiunii circulare pline a arborelui dacă τ_a = 60 N/mm^2 şi $\left(\dfrac{d\varphi}{dx}\right)_a = 0{,}3\,{}^{\circ}\!/\!_{\text{m}}$ şi lungimea l între roţile *1* şi *2* astfel ca rotirea relativă $\varphi_{1\text{-}4}$ să fie nulă ($G = 8{,}1\cdot 10^4$ N/mm^2).

Se consideră momentul motor $M_{x,2}$ pozitiv (în lungul axei x). Cu formula (3.105) se determină momentele de torsiune pe fiecare roată:

$$M_{x,1} = M_{x,4} = 9{,}55\cdot 10^3\cdot\frac{30}{340} = 842{,}65\ \text{Nm;}$$

$$M_{x,3} = 9{,}55\cdot 10^3\cdot\frac{35}{340} = 983{,}09\,\text{Nm;}$$

$$M_{x,2} = 9{,}55\cdot 10^3\cdot\frac{95}{340} = 2668{,}38\,\text{Nm.}$$

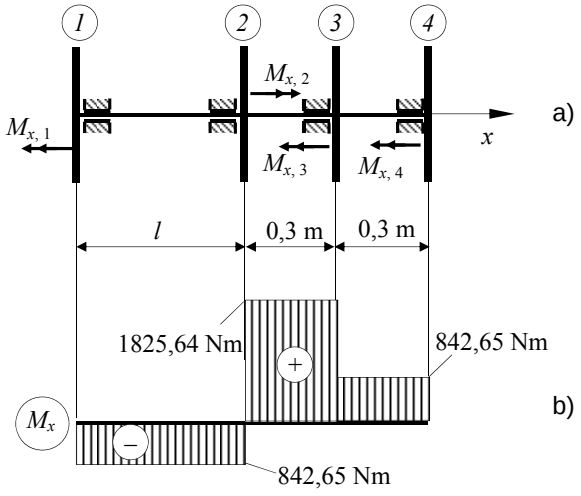


Fig. 3.109.

Cu ajutorul acestor valori s-a trasat diagrama M_x din figura 3.109, *b*.

Dimensionarea se va face pe fiecare tronson pentru a obține o formă economică a arborelui. Deoarece pe intervalele *1 - 2* şi *3 - 4* momentul de torsiune este acelaşi M_x = 842,65 Nm, cu formula (3.104) se obține:

$$W_p^{nec} = \frac{842{,}65 \cdot 10^3}{60} = 1{,}4044 \cdot 10^4 = W_p^{\dim} = \frac{\pi D^3}{16}.$$

Rezultă:

$$D = \sqrt{\frac{16 \cdot 1{,}4044 \cdot 10^3}{\pi}} = 41{,}51 \text{ mm}.$$

Se adoptă $D_{1-2} = D_{3-4} = 42$ mm şi se determină tensiunea maximă efectivă pentru verificare:

$$\tau_{\max}^{ef} = \frac{842{,}65 \cdot 10^3}{\dfrac{\pi \cdot 42^3}{16}} = 57{,}9 \text{ N/mm}^2 < \tau_a.$$

Deoarece condiția de rigiditate (3.114)

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{1-2} = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{3-4} = \frac{842{,}65 \cdot 10^3}{(8{,}1 \cdot 10^4)\left(\dfrac{\pi \cdot 42^4}{32}\right)} = 34{,}05 \cdot 10^{-6} \text{ rad/mm} >$$

$$> \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_a = 0{,}3 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{1000} = 5{,}24 \cdot 10^{-6} \text{ rad/mm}$$

nu este îndeplinită, se dimensionează din condiția de deformație impusă:

$$I_p^{nec} = \frac{842{,}65 \cdot 10^3}{(8{,}1 \cdot 10^4)(5{,}24 \cdot 10^{-6})} = 1{,}9853 \cdot 10^6 = \frac{\pi D^4}{32} \Rightarrow D = 67{,}06 \text{ mm}.$$

Se adoptă $D_{1-2} = D_{3-4} = 68$ mm.

Pentru intervalul 2-3 din condiția de rezistență rezultă:

$$D = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1825{,}74 \cdot 10^3}{\pi}} = 53{,}71 \text{ mm}.$$

Se adoptă $D_{2\text{-}3} = 54$ mm care verifică condiția de rezistență:

$$\tau_{\max}^{ef} = \frac{1825{,}74 \cdot 10^3}{\dfrac{\pi \cdot 54^3}{16}} = 59 \text{ N/mm}^2 < \tau_a = 60 \text{ N/mm}^2.$$

Deoarece deformația maximă relativă pe acest interval:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)_{3-4} = \frac{1825{,}74 \cdot 10^3}{(8{,}1 \cdot 10^4)\left(\dfrac{\pi \cdot 54^4}{32}\right)} = 27 \cdot 10^{-6} \text{ rad/mm} > \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)_a = 5{,}24 \cdot 10^{-6} \text{ rad/mm},$$

se face redimensionarea din condiția de deformație impusă

$$I_p^{nec} = \frac{1825{,}74 \cdot 10^3}{(8{,}1 \cdot 10^4)(5{,}24 \cdot 10^{-6})} = 4{,}3015 \cdot 10^6 = \frac{\pi D^4}{32} \Rightarrow D = 81{,}35 \text{ mm}.$$

Se adoptă $D_{2\text{-}3} = 82$ mm.

Rotirea relativă între roțile *1* şi *4* se determină cu relația (3.112):

$$\varphi_{1-4} = -\frac{1}{G}\left[-\frac{M_x^{1-2} l_{1-2}}{I_p^{1-2}} + \frac{M_x^{2-3} l_{2-3}}{I_p^{2-3}} + \frac{M_x^{3-4} l_{3-4}}{I_p^{3-4}}\right]$$

în care $I_p^{1-2} = I_p^{3-4} = \dfrac{\pi \cdot 68^4}{32} = 2{,}099 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$ şi $I_p^{2-3} = \dfrac{\pi \cdot 82^4}{32} = 4{,}4387 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$.

Punând condiția ca $\varphi_{1\text{-}4} = 0$ se obține:

$$-\frac{842{,}65 \cdot 10^3 \cdot l}{2{,}099 \cdot 10^6} + \frac{1825{,}74 \cdot 10^3 \cdot 300}{4{,}4387 \cdot 10^6} + \frac{842{,}65 \cdot 10^3 \cdot 300}{2{,}099 \cdot 10^6} = 0$$

din care rezultă $l = 607$ mm.

P.3.61. Un arbore cu diametrul D = 82 mm transmite mişcarea la un alt arbore prin intermediul unui angrenaj cilindric. Roata dințată este montată pe arbore prin intermediul unei pene paralele ce are dimensiunile precizate în figura 3.110. Ştiind că arborele are o turație n = 200 rot/min şi oțelul din care este confecționat are rezistența admisibilă τ_a = 40 N/mm^2, iar materialul penei τ_a = 60 N/mm^2 să se determine: a) momentul de torsiune capabil al arborelui; *b*) momentul de torsiune maxim pe care pana poate să-l transmită; c) puterea pe care o poate transmite asamblarea.

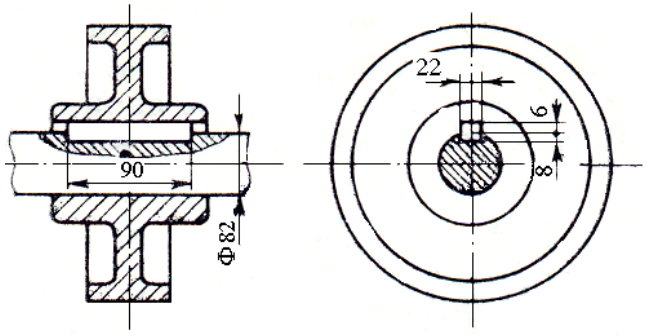


Fig. 3.110.

Dacă se neglijează slăbirea secțiunii arborelui provenită de la canalul de pană atunci arborele poate prelua următorul efort capabil:

$$M_x^{cap} = \tau_a W_p^{ef} = \tau_a \cdot \frac{\pi D^3}{16} = 40 \cdot \frac{\pi \cdot 82^3}{16} = 4{,}33 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 4{,}33 \text{ kNm}. \qquad \text{(a)}$$

Pana este supusă la forfecare şi:

$$T^{cap} = A_f \cdot \tau_a = 22 \cdot 90 \cdot 60 = 118{,}8 \cdot 10^3 \text{ N} = 118{,}8 \text{ kN}.$$

Dacă se reduce această forță în axul arborelui se obține un moment de torsiune egal cu:

$$M_x = T^{cap} \cdot \frac{D}{2} = 118{,}8 \cdot \frac{0{,}082}{2} = 4{,}87 \text{ kNm} \qquad \text{(b)}$$

Pana este solicitată şi la strivire, T^{cap} producând pe suprafața de contact o tensiune normală egală cu:

$$\sigma_{str} = \frac{T^{cap}}{A_{str}} = \frac{118{,}8 \cdot 10^3}{6 \cdot 90} = 220 \text{ N/mm2} < \sigma_a^{str} = 2\sigma_a = 2(2\tau_a) = 4 \cdot 60 = 240 \text{ N/mm}^2.$$

Momentul de torsiune pe care îl poate transmite asamblarea este momentul minim dintre M_x^{cap} calculat cu relația (a) şi M_x calculat cu relația (b): $M_{x,\min} = 4{,}33$ kNm. În consecință puterea pe care o poate transmite asamblarea este:

$$P = \frac{M_{x,\min} \cdot n}{9{,}55 \cdot 10^3} = \frac{4{,}33 \cdot 10^3 \cdot 200}{9{,}55 \cdot 10^3} = 90{,}68 \text{ kW}.$$

P.3.62. Bara din figura 3.111, *a* are secțiunea inelară ($d/D = 0{,}7$). Cunoscând $\mathcal{M} = 2{,}5$ kNm, $\tau_a = 60$ N/mm^2, $G = 8{,}1 \cdot 10^4$ N/mm^2, să se dimensioneze bara şi să se calculeze rotirea secțiunilor *C* şi *E* ($a = 0{,}4$ m)

Se constată că sistemul este static nedeterminat la torsiune, bara *ACEB* fiind încastrată la ambele capete. Se suprimă încastrarea la torsiune din *A* şi se obține forma de bază din figura 3.111, *b*.

Se încarcă forma de bază cu cuplurile $2\mathcal{M}$ şi $\mathcal{M}$ şi se trasează diagrama M_x^0 (fig. 3.111, *c*), apoi se

încarcă forma de bază cu momentul de torsiune necunoscut $M_{x,A}$ şi se trasează diagrama $m_{x,A}$ (fig. 3.111, *d*).

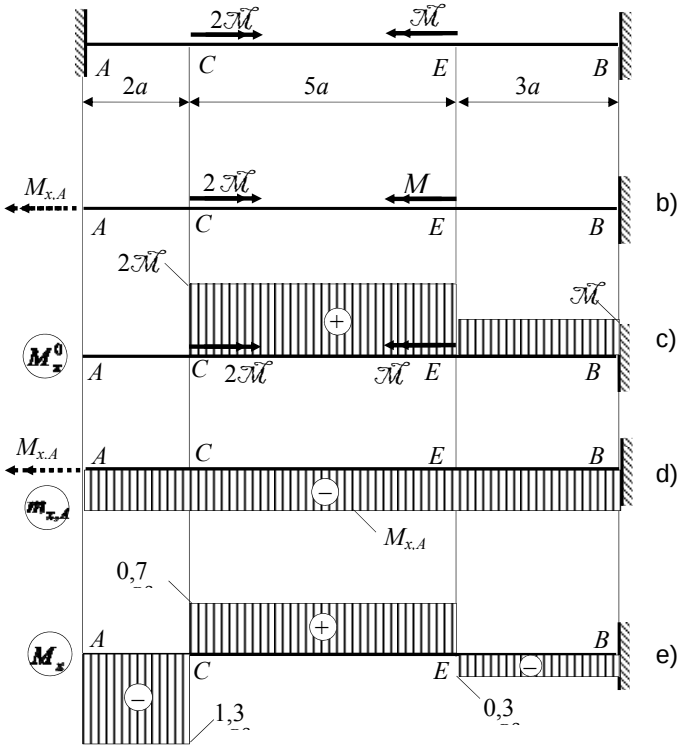


Fig. 3.111.

Sistemul static determinat (forma de bază) din figura 3.111, *b*, solicitat atât de cuplurile exterioare cât şi de momentul axial $M_{x,A}$, trebuie să se comporte identic cu sistemul real din figura 3.111, *a*. În consecinţă:

$$\varphi_A^0 + \varphi'_A = 0, \tag{a}$$

în care:

$$\varphi_A^0 = \varphi_B^0 - \varphi_A^0 = -\int_A^B \frac{M_x^0 \mathrm{d}x}{GI_p} = -\frac{1}{GI_p}(2\mathrm{M} \cdot 5a + \mathrm{M} \cdot 3a) = -\frac{13\mathrm{M}a}{GI_p}, \tag{b}$$

este rotirea la torsiune a secţiunii *A* produsă de cuplurile exterioare ($\varphi_B^0 = 0$, în *B* bara este încastrată);

$$\varphi'_A = \varphi'_B - \varphi'_A = -\int_A^B \frac{m_{x,A}\mathrm{d}x}{GI_p} = \frac{10M_{x,A}a}{GI_p} \tag{c}$$

este rotirea la torsiune a secţiunii *A* produsă de $M_{x,A}$ ($\varphi'_B = 0$, în *B* bara este încastrată).

Se introduce (b) şi (c) în (a) şi se rezolvă ecuaţia obţinută> Rezultă:

$$M_{x,A} = 1{,}3\mathsf{M}\ ,$$

ceea ce dovedeşte că momentul $M_{x,A}$ are sensul ales iniţial.

Cunoscând valoarea reală a momentului din secţiunea A, se încarcă forma de bază cu cuplurile exterioare şi cu $M_{x,A} = 1{,}3\mathcal{M}$ şi se trasează diagrama momentului de torsiune M_x, pe sistemul real.

Momentul maxim are valoarea $M_x^{\max} = -1{,}3\mathsf{M} = -1{,}3 \cdot 2{,}5 = -3{,}25\,\text{kNm}$. Aplicând (3.104) se obţine:

$$W_p^{nec} = \frac{\left|M_x^{\max}\right|}{\tau_a} = \frac{3{,}25 \cdot 10^6}{60} = 5{,}417 \cdot 10^4 = W_p^{\dim} = \frac{\pi D^3}{16}\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right].$$

Având în vedere că $d/D = 0{,}7$, rezultă: $D = 71{,}33$ mm. Se adoptă $D = 72$ mm şi $d = 50$ mm.

Se face verificarea condiţiei de rezistenţă:

$$\tau_{\max}^{ef} = \frac{3{,}25 \cdot 10^6}{\frac{\pi \cdot 72^3}{16}\left[1 - \left(\frac{50}{72}\right)^4\right]} = 57{,}78\ \text{N/mm}^2 < \tau_a.$$

Cu relaţia (3.111) se determină rotirile:

$$\varphi_C - \varphi_A = -\int_A^C \frac{M_x \mathrm{d}x}{GI_p} = \frac{1{,}3M \cdot 2a}{GI_p} \Rightarrow \varphi_C = \frac{2{,}6Ma}{GI_p} = -4{,}135 \cdot 10^{-3}\ \text{rad},$$

deoarece $\varphi_A = 0$.

$$\varphi_B - \varphi_E = -\int_E^B \frac{M_x \mathrm{d}x}{GI_p} = \frac{0{,}3M \cdot 3a}{GI_p} \Rightarrow \varphi_E = -\frac{0{,}9Ma}{GI_p} = -1{,}431 \cdot 10^{-3}\ \text{rad},$$

deoarece $\varphi_B = 0$.

P.3.63. Să se dimensioneze arcul unei supape de siguranţă (fig. 3.112) şi să se determine săgeata cu care el trebuie montat astfel ca supapa să se deschidă când presiunea fluidului din recipient este $p = 2{,}5$ N/mm^2. Se cunosc: raza de înfăşurare a arcului $R = 30$ mm, numărul de spire $n = 8$, modulul de elasticitate transversal $G = 8{,}3 \cdot 10^4$ N/mm^2, diametrul scaunului supapei $D_s = 40$ mm, rezistenţa admisibila a materialului $\tau_a = 320$ N/mm^2.

Forţa care solicită arcul este:

$$F = p \cdot \frac{\pi D_s^2}{4} = 2{,}5 \cdot \frac{\pi \cdot 40^2}{4} = 3141{,}59\ \text{N}.$$

Folosind relaţia (3.104) se face o predimensionare a spirei arcului la torsiune:

$$W_p^{nec} = \frac{FR}{\tau_a} = \frac{3141{,}59 \cdot 30}{320} = 294{,}52 = W_p^{\dim} = \frac{\pi d^3}{16} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 294{,}52}{\pi}} = 11{,}44\ \text{mm}.$$

Se adoptă d = 12 mm şi se face verificarea condiţiei de rezistenţă cu relaţia (3.116):

$$\tau_{max} = \frac{3141{,}59 \cdot 30}{\frac{\pi \cdot 12^3}{16}}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{12}{30}\right) = 314{,}8\ \text{N/mm}^2$$

Se constată că $\tau_{max} < \tau_a = 320$ N/mm^2.

Pentru ca supapa să se deschidă la presiunea $p = 2{,}5$ N/mm^2, arcul trebuie să aibă la montaj săgeata:

$$v = \frac{64 \cdot (3141{,}59)(30^3)(8)}{(8{,}3 \cdot 10^4)(12^4)} = 25{,}2\ \text{mm}$$

calculată cu relaţia (3.118).

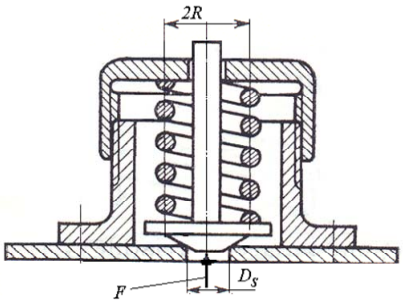


Fig. 3.112.

P.3.64. Grinda *BCDE* din figura 3.113, *a* este nedeformabilă (are rigiditate infinită), iar cele două arcuri au următoarele caracteristici: R_1 = 50 mm, d_1 = 25 mm, n_1 = 11 spire, respectiv R_2 = 60 mm, d_2 = 20 mm, n_2 = 14 spire. Ştiind că cele două arcuri sunt confecţionate din acelaşi material cu τ_a = 300 N/mm^2, $G = 8{,}1 \cdot 10^4$ N/mm^2 să se determine forţa maximă F_{max} pe care sistemul o poate suporta şi condiţiile ce trebuie impuse ca sistemul să fie economic.

Pentru determinarea lui F_{max} este necesar ca mai întâi să se determine forţele F_1, respectiv F_2

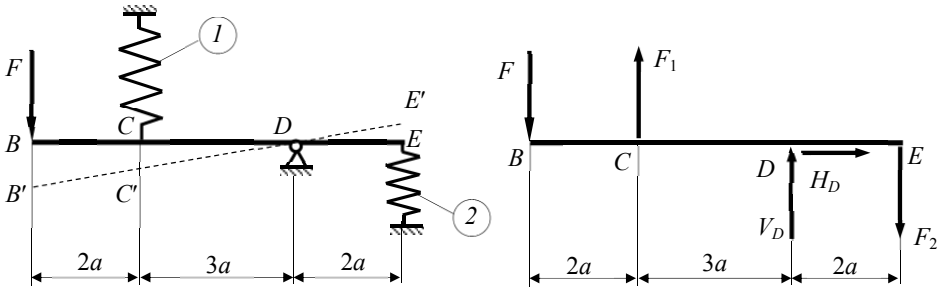


Fig. 3.113.

care solicită cele două arcuri. Pentru aceasta se izolează grinda *BCDE* şi se introduc forţele F_1 şi F_2, precum şi forţele de legătură din articulaţia *D* (fig. 3.113, *b*). Din ecuaţia de moment faţă de punctul *D*, care reprezintă aspectul static al problemei, rezultă:

$$3F_1 + 2F_2 = 5F \qquad \text{(a)}$$

Se constată că sistemul este o dată static nedeterminat (o ecuaţie cu două necunoscute). Din această cauză se apelează la aspectul geometric. Astfel, deoarece bara *BE* are rigiditatea infinită, sub acţiunea forţei *F* şi a celor de legătură, ea se roteşte în jurul articulaţiei *D*. Deoarece deformaţiile sunt mici se poate considera că punctele *B*, *C* şi *E* se deplasează pe verticală (fig. 3.113, *a*).

Din asemănarea triunghiurilor DCC' şi DEE' se deduce:

$$\frac{CC'}{EE'} = \frac{3a}{2a} = \frac{3}{2} = \frac{v_1}{v_2} \qquad \text{(b).}$$

deoarece $CC' = v_1$, iar $EE' = v_2$.

În baza relației (3.119) $F_1 = k_1 v_1$ şi $F_2 = k_2 v_2$ care introduse în (b) formează împreună cu ecuația (a) sistemul:

$$\begin{cases} 3F_1 + 2F_2 = 5F \\ \dfrac{F_1}{k_1} \cdot \dfrac{k_2}{F_2} = \dfrac{3}{2} \end{cases} \qquad \text{(c)}$$

Din rezolvarea acestuia se obține:

$$F_1 = \frac{5F}{3 + \frac{4}{3}\frac{k_2}{k_1}}; \qquad F_2 = \frac{\frac{10}{3}\frac{k_2}{k_1}F}{3 + \frac{4}{3}\frac{k_2}{k_1}}.$$

Deoarece:

$$\frac{k_2}{k_1} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4 \cdot \frac{n_1}{n_2} \cdot \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 = \left(\frac{20}{25}\right)^4 \cdot \frac{11}{14} \cdot \left(\frac{50}{60}\right)^3 = 0{,}1862$$

rezultă: $F_1 = 1{,}539F$; $F_2 = 0{,}191F$. (d)

Folosind relația (3.115) se determină eforturile capabile pentru cele două arcuri:

$$F_1^{cap} = \frac{\pi \cdot 25^3 \cdot 300}{16 \cdot 50 \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\frac{25}{50}\right)} = 15778{,}1\,\text{N}; \quad F_2^{cap} = \frac{\pi \cdot 20^3 \cdot 300}{16 \cdot 60 \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\frac{20}{60}\right)} = 7068{,}6\,\text{N}.$$

Din condiția $F_1 \le F_1^{cap} \Leftrightarrow 1{,}539F \le 15778{,}1$ se obține $F' = 10252{,}2$ N, iar din condiția $F_2 \le F_2^{cap} \Leftrightarrow 0{,}191F \le 7068{,}6$ se obține $F'' = 37008{,}4$ N. Forța maximă pe care o poate suporta sistemul analizat este $F_{\max} = \min[F', F''] = 10252$ N.

Dacă sistemul se solicită cu $F_{\max} = 10252$ N în arcul *1* tensiunea maximă va fi $\tau_{\max,\,1} = \tau_a = 300$ N/mm^2, pe când în arcul *2*, $\tau_{\max,\,2} = 83{,}1$ N/mm$^2 \ll \tau_a$. Pentru ca arcurile să fie solicitate la capacitatea lor portantă, arcul *2* se realizează mai scurt cu Δ mm. În felul acesta, la montaj, arcul *1* este solicitat la compresiune de o forță F_1^{mont}, iar arcul doi la întindere de o forță F_2^{mont}. După solicitarea sistemului cu forța F cele două arcuri sunt solicitate de forțele $F_1^* = F_1 - F_1^{mont}$, respectiv $F_2^* = F_2 + F_2^{mont}$. Pentru determinarea lui Δ şi a forței maxime $F_{\max}^*$ se procedează similar, folosind cele trei aspecte ale problemei:

- aspectul static

$$3F_1^* + 2F_2^* = 5F;$$

- aspectul geoemetric

$$\frac{CC'}{EE'} = \frac{3a}{2a} = \frac{v_1^*}{v_2^* - \Delta} \Rightarrow 2v_1^* = 3v_2^* - 3\Delta\,;$$

- aspectul fizic

$$F_1^* = k_1 v_1^*\,;\quad F_3^* = k_2 v_2^*\,.$$

Combinând cele trei aspecte rezultă:

$$F_1^* = \frac{5F}{3 + \frac{4}{3}\frac{k_2}{k_1}} - \frac{2k_2\Delta}{3 + \frac{4}{3}\frac{k_2}{k_1}}\,;\qquad F_2^* = \frac{\frac{10}{3}\frac{k_2}{k_1}F}{3 + \frac{4}{3}\frac{k_2}{k_1}} + \frac{3k_2\Delta}{3 + \frac{4}{3}\frac{k_2}{k_1}}\,.$$

Din condițiile la limită:

$$\begin{cases} F_1^* = F_1^{cap} \\ F_2^* = F_2^{cap} \end{cases}$$

se obține sistemul:

$$\begin{cases} 1{,}539F - 41{,}23\Delta = 15778{,}1 \\ 0{,}191F + 61{,}85\Delta = 7068{,}6 \end{cases}$$

care, prin rezolvare, conduce la: $F_{\max}^*$ =12296,6 N şi Δ = 76,3 mm.

Se constată că, pe lângă faptul că arcurile sunt solicitate la capacitatea lor portantă, sistemul suportă o încărcare mai mare cu 16%.

Probleme suplimentare

P.3.65. Consola din figura 3.114 de secțiune circulară este acționată de două cupluri. Cunoscând forța F = 8 kN, brațul b = 0,4 m, a = 0,5 m, τ_a = 60 N/mm^2, $(d\varphi/dx)_a$ = 0,3 ^{o}/m să se dimensioneze tronsoanele consolei şi să se calculeze rotirile din secțiunile A şi B (G = 8,1·10^4 N/mm^2).

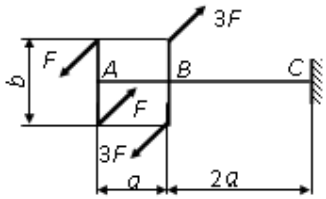


Fig. 3.114.

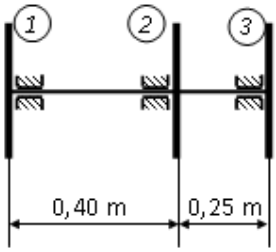


Fig. 3.115.

P.3.66. Roata *2* a arborelui din figura 3.115 primeşte o putere P = 70 kW şi o transmite mai departe astfel, 40% din P prin roata *1* şi 60% din P prin roata *3*. Cunoscând turaţia arborelui n = 240 rot/min, $(d\varphi/dx)_a$ = (1/4) °/m şi τ_a = 60 N/mm^2 să se dimensioneze arborele ştiind că are secţiune inelară (d/D = 0,7) şi să se calculeze rotirea relativă între roţile *1* şi *3* (G = 8,1·10^4 N/mm^2).

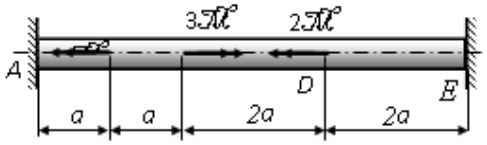


Fig. 3.116.

P.3.67. Bara dublu încastrată din figura 3.116 are secţiune circulară d = 64 mm. Ştiind că a = 0,4 m, $(d\varphi/dx)_a$ = (1/4) °/m şi τ_a = 60 N/mm^2 să se determine valoarea lui $\mathfrak{M}$° (G = 8,1·10^4 N/mm^2).

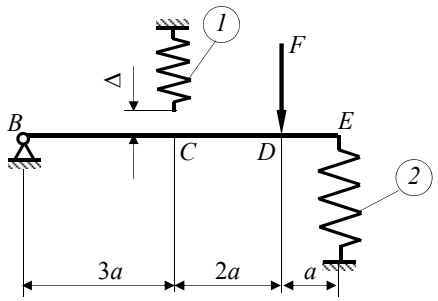


Fig. 3.117.

P.3.68. În sistemul din figura 3.117 bara *BCDE* are rigiditate infinită şi este articulată în *B*. Arcul *1*, la montaj, este mai scurt cu Δ = 35 mm. Ştiind că arcul *1* are R_1 = 40 mm, d_1 = 18 mm, n_1 = 12 spire, iar arcul 2 are R_2 = 60 mm, d_2 = 20 mm, n_2= 10 spire să se determine: a) eforturile în arcuri din montaj; b) rotirea barei *BE* după montaj; c) forţa F_{max} pe care o suportă sistemul după montaj (τ_a = 300 N/mm^2, G = 8,1·10^4 N/mm^2).

4. NOŢIUNI DE TEORIA ELASTICITĂŢII

4.1. ECUAŢIILE DE ECHILIBRU

S-a arătat în capitolul 1.5 că, sub acțiunea forțelor exterioare efectiv aplicate asupra unui corp şi a mişcării acestuia, în interiorul său se dezvoltă o stare de tensiuni care este complet definită dacă se cunosc componentele tensorului tensiunilor $\mathbf{T}_\sigma$ (vezi relația (1.3)) într-un punct P din interiorul corpului. Aceste tensiuni nu au aceeaşi valoare în fiecare punct decât în cazul unei stări omogene de tensiuni.

Considerând că tensiunile variază de la un punct la altul, atunci, dacă pe una din fețele unui element de volum $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, izolat din corp, de exemplu fața cu normala x, acționează tensiunile σ_x, τ_{xy}, τ_{xz} (fig. 4.1), pe fața opusă acționează aceleaşi tensiuni plus creşterile respective datorate creşterii lui x cu $\mathrm{d}x$, adică $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x$, $\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\mathrm{d}x$, $\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}\mathrm{d}x$. În mod analog se stabilesc tensiunile şi pe fețele cu normala y, respectiv z.

Tensiunile dau naştere unor forțe care au direcția tensiunii respective şi mărimea egală cu produsul dintre valoarea tensiunii şi suprafața pe care acționează. Neluând în considerare forțele masice, sistemul de forțe care se dezvoltă pe cele şase fețe ale elementului de volum considerat trebuie să fie în echilibru. Scriind ecuația de proiecție pe axa Px se obține

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\cdot \mathrm{d}y\cdot \mathrm{d}z - \sigma_x \cdot \mathrm{d}y\cdot \mathrm{d}z + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\cdot \mathrm{d}x\cdot \mathrm{d}z -$$

$$-\tau_{yx}\cdot \mathrm{d}x\cdot \mathrm{d}z + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\cdot \mathrm{d}x\cdot \mathrm{d}y - \tau_{zx}\cdot \mathrm{d}x\cdot \mathrm{d}y = 0,$$

din care rezultă următoare ecuație diferențială: