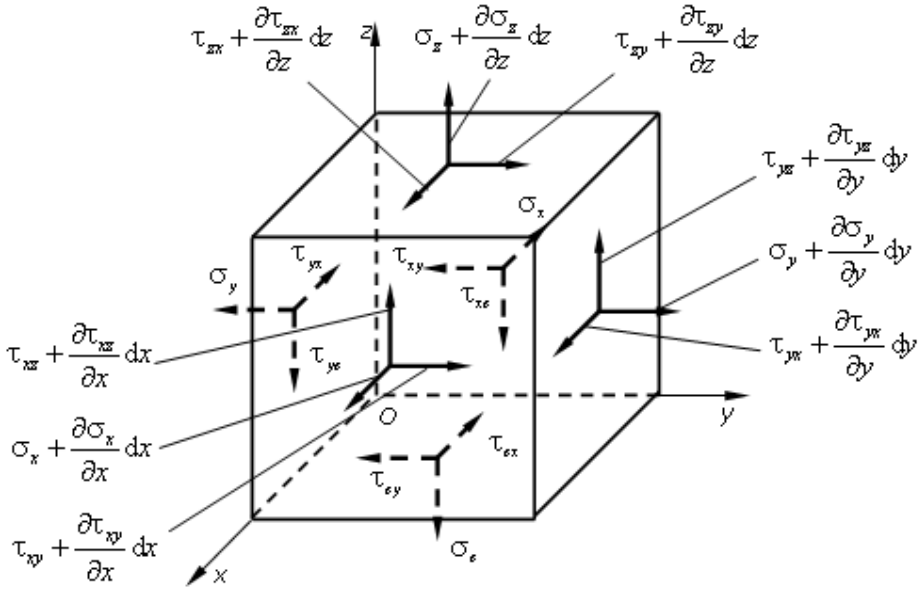


Fig. 4.1.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0$$

În mod analog, din ecuații de proiecție pe *Py* şi *Pz* se obțin alte două ecuații, care împreună cu prima formează următorul sistem de ecuații diferențiale de echilibru:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \\ &\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \\ &\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

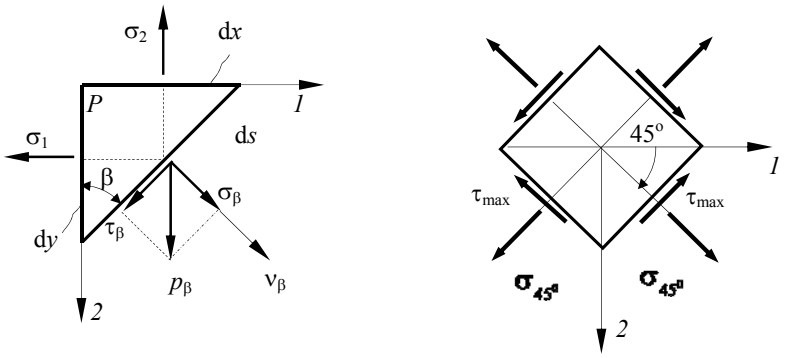
cunoscute sub numele de *ecuațiile diferențiale de echilibru ale lui Cauchy*.

În aceste ecuații, tensiunile se consideră calculate în punctul $P(x, y, z)$.

4.2. VARIAŢIA TENSIUNILOR ÎN JURUL UNUI PUNCT

În capitolul 3.4. atunci când s-au analizat tensiunile pe secțiuni înclinate la bare solicitate la încovoiere simplă, s-a definit starea plană de tensiuni şi s-au determinat tensiunile principale – relațiile (3.80) – şi direcțiile acestora.

Să consideram acum, un element de volum orientat după direcțiile principale de tensiuni (fig. 4.2, *a*) şi să determinăm tensiunile σ_β şi τ_β ce se dezvoltă într-un plan ce trece prin punctul $P(x, y, z)$ şi care face unghiul β cu direcția *2*.



a) b)

Fig. 4.2.

În acest caz formulele (3.76) devin:

$$\sigma_\beta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\beta$$
$$\tau_\beta = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin 2\beta \tag{4.2}$$

Pentru $\beta = \frac{\pi}{4}$, $\sin 2\beta = 1$ şi valoarea tensiunii tangențiale, în modul, este maximă:

$$|\tau|_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \tag{4.3}$$

În planul în care tensiunea τ este maximă, tensiunea normală σ are valoarea:

$$\sigma_{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \tag{4.4}$$

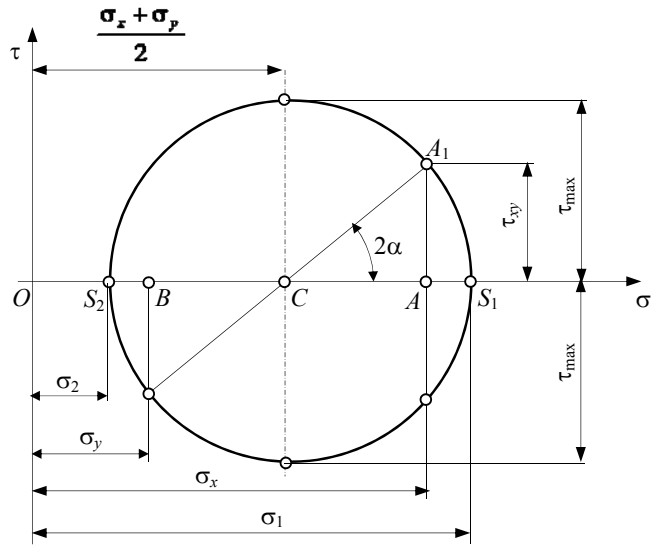


Fig. 4.3.

Rezultă că tensiunile tangențiale maxime acționează pe planele bisectoare ale planelor principale şi un element de volum orientat după aceste plane arată ca în figura 4.2, *b*.

O rezolvare grafică a variației tensiunilor în jurul unui punct a fost dată de Mohr. El a plecat de la relațiile (3.76) pe care le-a ridicat la pătrat şi le-a adunat, rezultând:

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \qquad (4.5)$$

Relația (4.5) reprezintă, în sistemul de coordonate $\sigma O \tau$, ecuația unui cerc (cercul lui Mohr), având centrul pe axa $O\sigma$ de abscisă $\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$, şi raza $\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$.

Acest cerc se reprezintă astfel (fig. 4.3):

– se reprezintă pe axa $O\sigma$ segmentele: $OA = \sigma_x$; $OB = \sigma_y$ şi $OC = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$ (jumătatea segmentului *BA*) care este centru cercului; pentru σ_x , σ_y negative segmentele corespunzătoare se iau în sensul negativ al axei $O\sigma$;

– se reprezintă segmentul $AA_1 = \tau_{xy}$, în sensul axei $O\tau$ dacă $\tau_{xy} > 0$ şi în sens invers axei $O\tau$ dacă $\tau_{xy} < 0$;

– punctul A_1 fiind un punct de pe cercul definit de (4.5), cu centrul în C şi raza CA_1 se trasează cercul lui Mohr. Acest cerc taie axa $O\sigma$ în punctele S_1 şi S_2 ale căror abscise sunt σ_1, respectiv σ_2 (fig. 4.3)

Într-adevăr, folosind cercul lui Mohr:

$$\sigma_1 = OS_1 = OC + CS_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\ ;$$

$$\sigma_2 = OS_2 = OC - S_2C = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

care sunt identice cu relațiile (3.76).

În cazul stării spațiale de tensiuni apar trei tensiuni principale σ_1, σ_2, σ_3 după trei direcții perpendiculare între ele numite direcții principale şi trei tensiuni tangențiale maxime, în secțiuni înclinate cu 45° față de direcțiile principale.

Grafic, variația tensiunilor în jurul unui punct, în cazul stării spațiale de solicitare, se reprezintă prin trei cercuri, ca în figura 4.4. Cercul de centru C_3 având $OC_3 = \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ şi diametrul $\sigma_1 - \sigma_2$ reprezintă variația tensiunilor în planul determinat de direcțiile lui σ_1 şi σ_2.

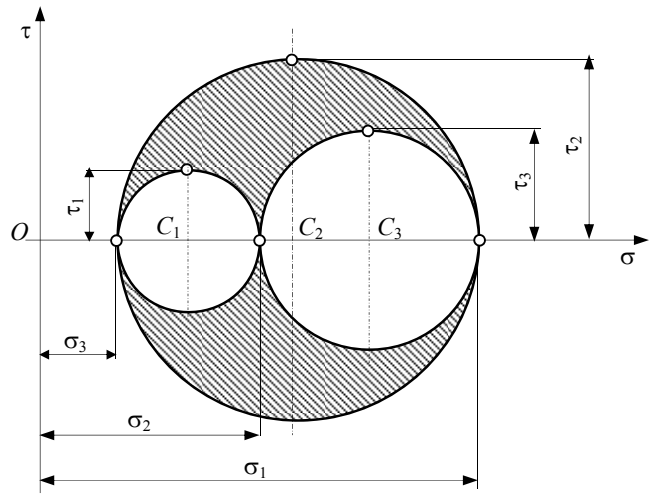


Fig. 4.4.

În acest plan apare o tensiune tangențială maximă $\tau_3 = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$. Celelalte două cercuri C_1 (având $OC_1 = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$ şi diametrul $\sigma_2 - \sigma_3$) şi C_2(având $OC_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$ şi diametrul $\sigma_1 - \sigma_3$) reprezintă variațiile tensiunilor în planele determinate de σ_2, σ_3 şi respectiv σ_1, σ_3. În aceste plane tensiunile tangențiale maxime sunt $\tau_1 = \pm\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$, $\tau_2 = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$.

4.3. LEGEA GENERALIZATĂ A LUI HOOKE

În capitolul 1 atunci când s-au analizat aspectele problemelor rezistenței materialelor s-a arătat că legătura dintre tensiunile σ şi τ şi deformațiile specifice ε şi γ este de natură fizică. Pentru starea monoaxială de tensiune s-a determinat, pe cale experimentală, prin încercarea la tracțiune, legea simplă a lui Hooke, exprimată de relația (1.30). Pentru starea spațială de tensiuni, obținerea unor rezultate concludente pe cale experimentală nu este posibilă.

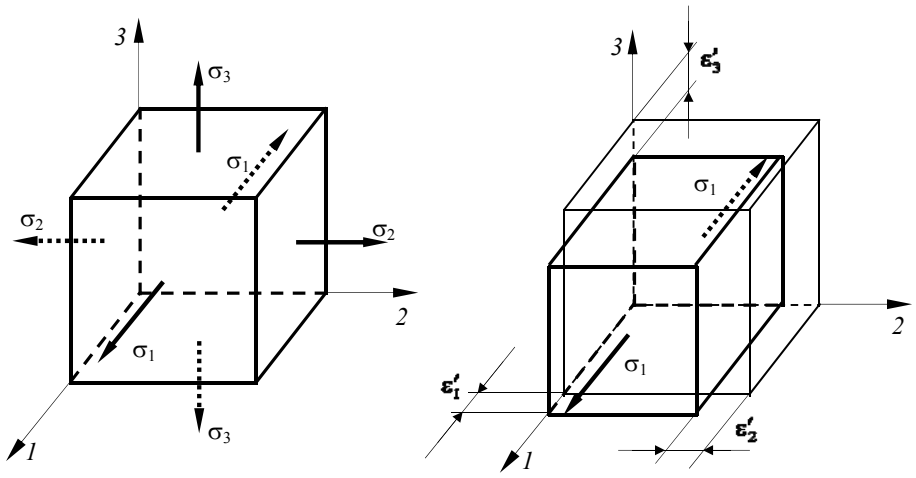
Funcția liniară, $\mathbf{T}_\varepsilon = f(\mathbf{T}_\sigma)$, pentru materialele perfect omogene şi izotrope, în cazul deformațiilor mici şi elastice, poate fi obținută pe cale deductivă (matematică).

Se consideră un element de volum cu latura egală cu unitatea (fig. 4.5, *a*), pe fețele căruia acționează tensiunile principale σ_1, σ_2, σ_3.

Deformațiile specifice ale elementului considerat pot fi calculate, admițând suprapunerea efectelor, adică considerând că solicitarea triaxială a particulei poate fi obținută prin suprapunerea a trei solicitări monoaxiale, aplicate pe rând pe cele trei direcții principale.

Astfel, acțiunea independentă a tensiunii σ_1 (fig. 4.5, *b*), pe baza formulei (1.30), produce o alungire $\varepsilon_1' = \frac{\sigma_1}{E}$ pe direcția *1* şi două contracții specifice transversale $\varepsilon_2' = -\mu\frac{\sigma_1}{E}$, $\varepsilon_3' = -\mu\frac{\sigma_1}{E}$ pe direcțiile *2* şi *3*, aşa cum indică formula (3.22).

Analog, din acțiunea independentă a tensiunii σ_2 se obțin deformațiile specifice:



a) b)

Fig. 4.5.

$$\varepsilon_1'' = -\mu\frac{\sigma_{21}}{E}; \quad \varepsilon_2'' = \frac{\sigma_2}{E}; \quad \varepsilon_3'' = -\mu\frac{\sigma_2}{E};$$

iar din acțiunea independentă a tensiunii σ_3, deformațiile specifice:

$$\varepsilon_1''' = -\mu\frac{\sigma_3}{E}; \quad \varepsilon_2''' = -\mu\frac{\sigma_3}{E}; \quad \varepsilon_3''' = \frac{\sigma_3}{E}.$$

Deformațiile specifice totale pe direcțiile *1*, *2*, *3*, suprapunând efectele, sunt:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \varepsilon_1' + \varepsilon_1'' + \varepsilon_1''' = \frac{1}{E}[\sigma_1 - (\sigma_2 + \sigma_3)]; \\
\varepsilon_2 &= \varepsilon_2' + \varepsilon_2'' + \varepsilon_2''' = \frac{1}{E}[\sigma_2 - (\sigma_3 + \sigma_1)]; \\
\varepsilon_3 &= \varepsilon_3' + \varepsilon_3'' + \varepsilon_3''' = \frac{1}{E}[\sigma_3 - (\sigma_1 + \sigma_2)].
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Relațiile (4.6) reprezintă *legea generalizată a lui Hooke* raportată la direcțiile principale de tensiuni.

Dacă starea de tensiuni din punctul $P(x,y,z)$ este definită de tensorul tensiunilor $\mathbf{T}_\sigma$ descris de relația (1.3) legea generalizată a lui Hooke este definită de relațiile:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)];$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]; \tag{4.7}$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)];$$

Pentru tensiunile tangențiale τ legea lui Hooke păstrează forma simplă;

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}. \tag{4.8}$$

În relațiile de mai sus E este modulul de elasticitate longitudinal, G modulul de elasticitate transversal, μ coeficientul de contracție.

În cazul stării plane de tensiuni, pentru care $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$, legea generalizată a lui Hooke este definită de relațiile:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y); \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x);$$
$$\varepsilon_z = -\mu\frac{1}{E}(\sigma_x + \sigma_y); \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \tag{4.9}$$

sau față de direcțiile principale de tensiuni:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_2);$$
$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \mu\sigma_1); \tag{4.10}$$
$$\varepsilon_3 = -\mu\frac{1}{E}(\sigma_1 + \sigma_2);$$

Din primele două relații (4.9) rezultă tensiunile principale σ_1, σ_2 în funcție de deformațiile specifice principale ε_1, ε_2, în cazul stării plane de tensiuni:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_1 + \mu \cdot \varepsilon_2);$$
$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_2 + \mu \cdot \varepsilon_1) \tag{4.11}$$

6. TEORII DE REZISTENŢĂ

Din cele prezentate anterior s-a văzut că sub acțiunea forțelor exterioare şi a mişcării, în fiecare punct $P(x,y,z)$ dintr-un corp, considerat continuu, omogen şi izotrop, se dezvoltă o stare de tensiuni caracterizată prin tensorul tensiunilor $\mathbf{T}_\sigma$, sau mai sugestiv, prin tensorul tensiunilor principale

$$\overline{\mathbf{T}}_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \tag{6.1}$$

în felul acesta starea de tensiuni poate fi privită ca o întindere sau compresiune triaxială (după direcțiile principale de tensiuni).

Dacă solicitările exterioare depăşesc o anumită limită, atunci într-un punct din interiorul corpului se poate dezvolta o stare de tensiuni care să conducă la deformații mari, ireversibile, sau chiar la rupere. Mecanica aplicată nu poate explica teoretic astfel de fenomene. Din această cauză, deoarece în practică sunt necesare evaluări cantitative privind apariția fenomenului considerat periculos sau inadmisibil, s-a introdus noțiunea de coeficientul de siguranță (aşa cum a fost definită în paragraful 1.7.3.

În cazul în care, într-un punct ce aparține unui corp, se dezvoltă o stare de tensiuni triaxială, definită de tensiunile principale σ_1, σ_2, σ_3, coeficientul de siguranță este:

$$c = \frac{\sigma_{01}}{\sigma_1} = \frac{\sigma_{02}}{\sigma_2} = \frac{\sigma_{03}}{\sigma_3} \tag{6.2}$$

în care σ_{01}, σ_{02}, σ_{03} este o stare de tensiuni în acel punct, asemănătoare cu cea produsă de solicitările exterioare, la care însă se produce fenomenul considerat periculos sau inadmisibil. Starea de tensiuni σ_{01}, σ_{02}, σ_{03}, este denumită *stare de tensiuni limită.*

Pentru determinarea unei astfel de stări de tensiuni limită este necesară efectuarea de experiențe. Cum în practică acest lucru este imposibil, se recurge la

aşa numita *teorie a stărilor de tensiuni limită*, prin care orice stare de tensiuni dintr-un punct al uni corp se consideră că poate fi înlocuită – din punct de vedere al posibilității producerii fenomenului considerat inadmisibil sau periculos – cu o stare de tensiuni mai simplă (de exemplu cu starea limită de la întinderea simplă), denumită *stare de tensiuni echivalentă*. Această înlocuire se face pe baza unui *criteriu* ipotetic de apariție a fenomenului periculos.

Starea de tensiuni echivalentă trebuie să poată fi uşor de determinat pe bază de experiențe realizate în laborator. De asemenea, ea trebuie să caracterizeze materialul folosit din punct de vedere al comportării acestuia sub sarcină. Stările de tensiuni care îndeplinesc aceste cerințe sunt:

– starea de întindere maonoaxială: $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, caracteristică încercării la tracțiune, pe baza căreia s-a determinat CCCT.

– starea plană mixtă (de forfecare pură): $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\tau$.

Criteriul pe baza căruia starea de tensiuni reală dintr-un punct ce aparține unui corp este înlocuită cu o stare de tensiuni echivalentă, mai simplă, va fi reprezentat printr-un *factor*, considerat predominant la apariția unei stări de tensiuni limită. Expresia sa analitică determinându-se în funcție de proprietățile materialului, proprietăți determinate experimental.

Să presupunem că starea reală de tensiuni, într-un punct oarecare dintr-un corp, este caracterizată de valorile σ_1, σ_2, σ_3 ale tensiunilor principale din punctul respectiv (fig. 6.1, *a*)

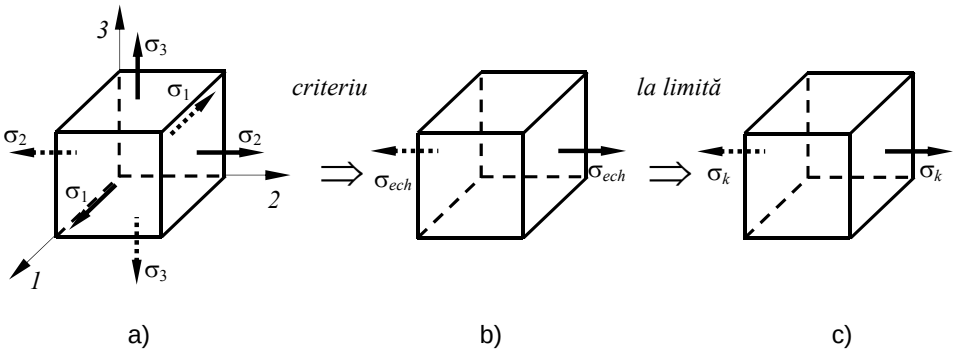


Fig. 6.1.

În baza criteriului adoptat, se calculează valoarea factorului corespunzător σ_{ech}, în funcție de tensiunile σ_1, σ_2, σ_3, valoare care este egală cu valoarea tensiunii σ în starea monoaxială de întindere echivalentă (fig. 6.1, *b*). Valoarea limită a tensiunii σ, determinată experimental pe baza încercării la tracțiune (în starea echivalentă monoaxială de întindere) pe o epruvetă din acelaşi material,

este σ_k. Aceasta poate fi limita de curgere aparentă R_e, sau rezistența la tracțiune R_m.

Comparând pe σ_{ech} cu σ_k (fig. 6.1, *c*), rezultă coeficientul de siguranță pentru starea reală de tensiuni din punctul respectiv:

$$c = \frac{\sigma_k}{\sigma_{ech}}, \tag{6.3}$$

asemănătoare cu relația (1.25) de la întinderea simplă.

Se constată că tensiunea echivalentă poate fi reprezentată grafic, într-un sistem de coordonate trirectangulare (σ_1, σ_2, σ_3), printr-o suprafață de ecuație

$$\sigma_{ech} = f(\sigma_{01}, \sigma_{02}, \sigma_{03}) \tag{6.4}$$

unde $\sigma_{01}, \sigma_{02}, \sigma_{03}$ reprezintă valorile limită ale tensiunilor principale σ_1, σ_2, σ_3, în punctul din corp unde se dezvoltă starea respectivă de tensiuni. Punctele situate în interiorul acestei suprafețe corespund unor stări de tensiuni care nu au atins limita, deci unor coeficienți de siguranță supraunitari. În starea plană de tensiuni se reprezintă intersecția suprafeței (6.4) cu planul $\sigma_3 = 0$.

Referitor la factorul ce poate fi considerat predominant la apariția unei stări de tensiuni limită, încercările de laborator efectuate pe epruvete solicitate la întindere au relevat că, în momentul ruperii, tensiunile σ şi τ, deformația specifică liniară ε şi energia specifică de deformație U_1 ating anumite valori corespunzătoare ruperii materialului respectiv. Se poate concluziona că ruperea, ca stare limită de tensiuni, este caracterizată de aceşti patru factori care nu sunt independenți între ei. Din această cauză la solicitarea de întindere simplă (monoaxială), pentru a defini o stare limită de tensiuni, este suficient să fie definit unul din cei patru factori menționați, ceilalți rezultând implicit.

Ipoteza că un anumit factor este predominat în atingerea stării de tensiuni limită şi că valoarea limită a acestuia este cea de la întindere simplă, constituie o *teorie de rezistență*.

Teoriile de rezistență se diferențiază în funcție de factorii aleşi ca predominanți în atingerea stării limită de tensiuni şi poartă numele acestor factori.

Următoarele teorii sunt cunoscute ca teorii clasice de rezistență:

– teoria I sau teoria tensiuni normale maxime (T_σ);

– teoria a II-a sau teoria deformației specifice maxime (T_ε);

– teoria a III-a sau teoria tensiunilor tangențiale maxime (T_τ);

– teoria a IV-a sau a energiei specifice de deformație (T_E);

– teoria a V-a sau a energiei specifice de deviație (T_{ED}).

Valabilitatea acestor teorii, pentru o anumită stare de solicitare, este probată cu ajutorul datelor experimentale.

6.1. TEORIA TENSIUNII NORMALE MAXIME

Această teorie se enunță astfel: starea limită (de curgere sau rupere) este atinsă într-un corp atunci când tensiunea normală maximă în valoare absolută este egală cu tensiunea corespunzătoare aceleiaşi stări limită la solicitarea de întindere simplă, şi a fost formulată pentru prima dată de Glileo Galilei în sec. XVII.

Deoarece orice stare de tensiuni este complet definită prin tensiunile principale σ_1, σ_2, σ_3, condițiile pentru a nu se depăşii starea limită se exprimă prin relațiile:

$$\begin{aligned} -\sigma_k \le \sigma_1 \le \sigma_k; \\ -\sigma_k \le \sigma_2 \le \sigma_k; \\ -\sigma_k \le \sigma_3 \le \sigma_k. \end{aligned} \tag{6.5}$$

În sistemul de coordonate (σ_1, σ_2, σ_3), condițiile (6.5) reprezintă un cub cu latura $2\sigma_k$, iar pentru situația plană de tensiuni ($\sigma_3 = 0$) un pătrat (fig. 6.2, *a*).

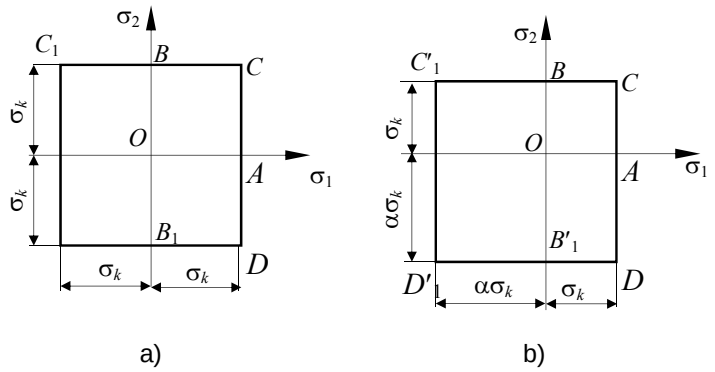


Fig. 6.2.

Pentru verificarea acestei teorii s-au făcut încercări de laborator. Conform acestei teorii ruperea s-ar produce atunci când tensiunea maximă devine egală cu rezistența la rupere $\sigma_1 = \sigma_r$. Încercându-se pietre, care la compresiune monoaxială au rezistența de rupere σ_r, s-a constatat că, supuse la presiune hidrostatică (adică $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$), rezistă mult mai mult decât la compresiunea simplă. Rezultă că numai tensiunea σ_1 nu poate caracteriza corect starea limită a corpului.

O îmbunătățire parțială a acestei teorii s-a obținut prin considerarea pentru

solicitarea de compresiune a limitei de rezistență $\sigma'_k = \alpha\sigma_k > \sigma_k$; ($\alpha$ >1). În acest caz suprafața limită rămâne tot un cub în spațiu, iar în plan un pătrat, însă originea axelor nu mai este în centrul său (fig. 6.2, *b*).

În concluzie, această teorie de rezistență poate fi folosită practic cu rezultate satisfăcătoare numai pentru stări de tensiuni de întindere.

Relația de calcul, după această ipoteză este:

$$\sigma_{ech\,I} = \max\,[\,|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|\,] \le \sigma_a \tag{6.6}$$

pentru starea spațială de tensiuni;

$$\sigma_{ech\,I} = \max\,[\,|\sigma_1|, |\sigma_2|\,] \le \sigma_a \tag{6.7}$$

pentru starea plană de tensiuni.

6.2. TEORIA DEFORMAŢIEI SPECIFICE MAXIME

Această teorie a fost formulată de Mariotte în sec. XVII şi se enunță astfel: o stare limită este atinsă într-un corp atunci când deformația specifică maximă devine egală cu deformația corespunzătoare aceleiaşi stări limită la solicitarea de întindere simplă.

În cazul unei stări spațiale de deformație caracterizată prin deformațiile specifice principale ε_1, ε_2, ε_3, conform legii generalizate a lui Hooke condițiile impuse de această teorie sunt:

$$\begin{aligned}
-|\varepsilon'_k| \le \varepsilon_1 &= \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \le \varepsilon_k;\\
-|\varepsilon'_k| \le \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}[\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)] \le \varepsilon_k;\\
-|\varepsilon'_k| \le \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] \le \varepsilon_k;
\end{aligned} \tag{6.8}$$

unde ε'_k şi ε_k sunt deformațiile specifice limită în starea de compresiune, respectiv întindere monoaxială. Aceste condiții pot fi scrise şi sub forma:

$$\begin{aligned}
-\alpha\sigma_k &\le \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \le \sigma_k;\\
-\alpha\sigma_k &\le \sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1) \le \sigma_k;\\
-\alpha\sigma_k &\le \sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2) \le \sigma_k.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Cum $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$ atunci $\varepsilon_{max} = \varepsilon_1$ şi teoria a doua de rezistenţă se scrie astfel

$$\sigma_{ech\,II} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \le \sigma_a \qquad (6.10)$$

Această teorie a avut în trecut o mare răspândire, care se explică prin faptul că măreşte zona stărilor limită nepericuloase de compresiune triaxială. Însă nici această teorie nu a fost confirmată în toate cazurile experimentale, rezultatele încercărilor făcute pe materiale tenace, cum ar fi oţelurile moi, nu au verificat-o.

6.3. TEORIA TENSIUNILOR TANGENŢIALE MAXIME

Această teorie a fost formulată de Coulomb (1773) şi sub forma actuală de Tresca în 1856. Conform acestei teorii de rezistenţă starea limită este atinsă într-un corp, atunci când tensiunea tangenţială devine egală cu tensiunea tangenţială corespunzătoare aceleiaşi stări limită la solicitarea de întindere simplă.

Cunoscând tensiunile tangenţiale maxime:

$$\tau_1 = \pm\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \; \tau_2 = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_3 = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \qquad (6.11)$$

şi valoarea limită la întindere

$$\tau_k = \frac{\sigma_k}{2} \qquad (6.12)$$

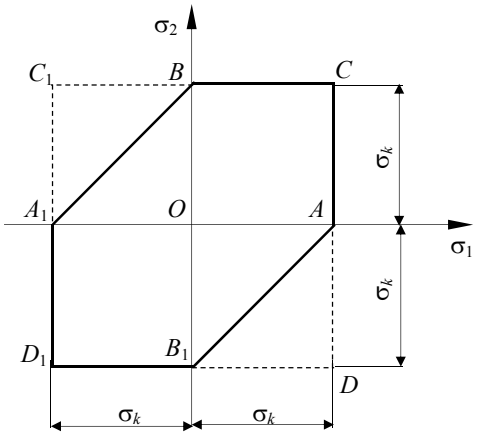


Fig.6.3.

pentru a nu se depăşii starea limită, trebuiesc îndeplinite condiţiile:

$$\begin{aligned} -\tau_k &\le \tau_1 \le \tau_k; \\ -\tau_k &\le \tau_2 \le \tau_k; \\ -\tau_k &\le \tau_3 \le \tau_k. \end{aligned} \qquad (6.13)$$

Ţinând seama de relaţiile (6.11) şi (6.12) condiţiile (6.13) devin

$$\begin{aligned} -\sigma_k &\le \sigma_2 - \sigma_3 \le \sigma_k; \\ -\sigma_k &\le \sigma_1 - \sigma_3 \le \sigma_k; \\ -\sigma_k &\le \sigma_1 - \sigma_2 \le \sigma_k. \end{aligned} \qquad (6.14)$$

Pentru semnul egal între termeni, relațiile (6.14) reprezintă o prismă hexagonală având ca axă trisectoarea $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Intersecția suprafeței exterioare a prismei cu planul $\sigma_3 = 0$, definește zona limită corespunzătoare stării plane de tensiuni, reprezentată de un hexagon neregulat având ecuațiile conturul deduse din condițiile (6.14)(fig. 6.3):

Pentru cazurile practice, în care nu trebuie depășită rezistența admisibilă σ_a, teoria a III-a se poate scrie astfel:

$$\sigma_{ech\,\mathrm{III}} = \max\,[\,|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3|\,] \le \sigma_a. \tag{6.15}$$

Pentru starea plană de tensiuni ($\sigma_3 = 0$) condiția de rezistență (6.15) ia forma:

$$\sigma_{ech\,\mathrm{III}} = \max\,[\,|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\,] \le \sigma_a. \tag{6.16}$$

Teoria tensiunilor tangențiale maxime a fost confirmată de rezultatele experimentale, în special de încercările efectuate pe materiale tenace. Această ipoteză a fost verificată și de încercările de compresiune hidrostatică pe materiale fragile. Din această cauză, pentru calculele inginerești de proiectare această teorie este recomandată chiar dacă uneori conduce la o ușoară supradimensionare a elementelor proiectate.

6.4. APLICAREA TEORIILOR DE REZISTENȚĂ LA BARE

După cum s-a arătat în capitolul 1, tensorul tensiunilor în cazul barelor este definit de expresia (1.9), având componentele σ_x, τ_{xy} și τ_{xz}. În acest caz tensiunile principale calculate cu relațiile (3.80) sunt:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2}\,; \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2}\,; \end{aligned} \tag{6.17}$$

unde $\tau^2 = \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2$.

Se observă că, la bare, tensiunile principale sunt de semne contrare și deci $\sigma_1 \cdot \sigma_2 < 0$.

În acest caz condițiile de rezistență (6.7), (6.10) și (6.16), după teoriile T_σ, T_ε și T_τ capătă formele:

$$\sigma_{ech\,\mathrm{I}} = \max\,[\,|\sigma_1|, |\sigma_2|\,] = \frac{1}{2}\,(\,|\sigma_x| + \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}\,) \le \sigma_a \tag{6.18}$$

$$\sigma_{ech\,\mathrm{II}} = \sigma_1 - \mu\sigma_2 = \frac{1-\mu}{2}\cdot|\sigma_x| + \frac{1+\mu}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2} \le \sigma_a \tag{6.19}$$

$$\sigma_{ech\,\mathrm{III}} = \max\,[\,|\sigma_1 - \sigma_2|\,] = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2} \le \sigma_a. \tag{6.20}$$

În cazul în care $\sigma_x = 0$ teoria T_σ nu are valabilitate, iar toariile T_ε şi T_τ devin:

$$\sigma_{ech\,\mathrm{II}} = (1+\mu)\tau \le \sigma_a; \tag{6.21}$$

$$\sigma_{ech\,\mathrm{III}} = 2\tau \le \sigma_a\,; \tag{6.22}$$

sau, sub forma utilizată deja în acest curs:

$$\tau_{\max} \le \tau_a \tag{6.23}$$

în care $\tau_a = 0{,}77\sigma_a$ pentru teoria T_ε şi $\tau_a = 0{,}5\sigma_a$ pentru T_ε.

7. SOLICITĂRI COMPUSE ALE BARELOR DREPTE

Solicitările compuse ale barelor drepte sunt solicitările în cadrul cărora torsorul eforturilor secționale se reduce la două sau mai multe dintre componentele N, M_x, M_y, M_z.

În funcție de eforturile secționale care se dezvoltă într-o secțiune oarecare a barei, solicitările compuse se identifică astfel:

– încovoiere dublă sau oblică; în secțiunea transversală a barei există componentele M_y şi M_z;

– încovoiere simplă cu forță axială; există eforturile N, M_y sau N, M_z;

– încovoiere dublă cu forță axială; componentele care apar sunt N, M_y şi M_z;

– încovoiere cu torsiune, atunci când componentele care apar sunt M_x, M_y, sau M_x, M_z, sau M_x, M_y, M_z.

Calculul tensiunilor şi deformațiilor barelor drepte în cazul solicitărilor compuse se va face prin suprapunere de efecte ca urmare a menținerii valabilității

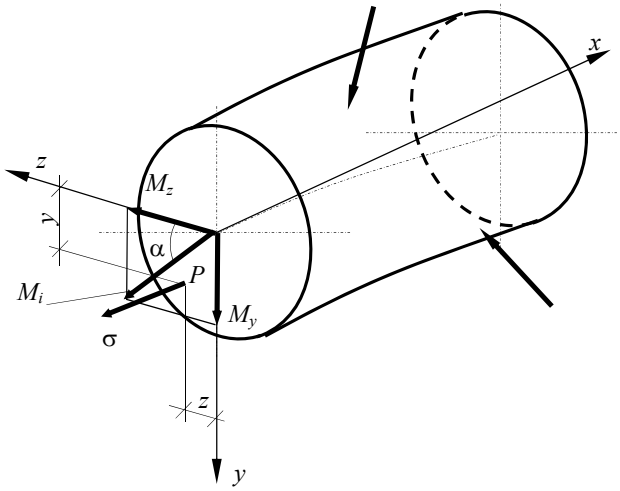


Fig.7.1.

ipotezei micilor deplasări şi legii lui Hooke.

7.1. ÎNCOVOIEREA DUBLĂ SAU OBLICĂ

În acest caz în planul secțiunii transversale a barei apar componentele M_y şi M_z dirijate după axele centrale principale de inerție Oy, respectiv Oz (fig. 7.1). Cele două componente provin din descompunerea momentului de încovoiere M_i a cărui direcție face cu axa Oz unghiul α:

$$M_y = M_i \sin\alpha; \qquad M_z = M_i \cos\alpha; \tag{7.1}$$

7.1.1. Distribuţia tensiunilor pe secţiunea dreaptă a barei

Dacă se consideră că bara este solicitată independent de fiecare componentă a momentului de încovoiere M_i atunci, în baza formulei lui Navier, pe secțiune se dezvoltă tensiuni σ care au o distribuție liniară (fig. 7.2.) şi a căror valoare într-un punct P oarecare al secțiunii, de coordonate (y, z) se determină cu relațiile:

$$\sigma_{My} = -\frac{M_y}{I_y} z; \qquad \sigma_{Mz} = \frac{M_z}{I_z} y; \tag{7.2}$$

Prin însumarea celor două tensiuni σ, ținând seama de semnul lor, se determină valoarea tensiunii reale în punctul P:

$$\sigma^P = \sigma^P_{Mz} + \sigma^P_{My} = \frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z\,. \tag{7.3}$$

Se poate observa că tensiunea σ variază liniar pe secțiune, având valoarea zero pe o dreaptă – *axa neutră* – care trece prin centrul de greutate O şi a cărei ecuație rezultă din condiția $\sigma = 0$:

$$\frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z = 0\,.$$

Unghiul β pe care îl face axa neutră cu axa Oz se determină cu relația:

$$\tan\beta = \frac{y}{z} = \frac{I_z}{I_y} \cdot \frac{M_y}{M_z} = \frac{I_z}{I_y} \tan\alpha\,. \tag{7.4}$$

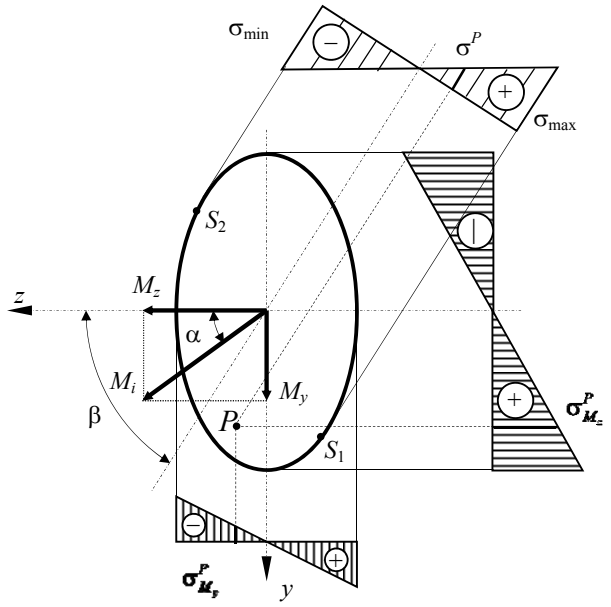


Fig. 7.2.

Când $I_z > I_y$ atunci $\beta > \alpha$ şi axa neutră are o înclinare faţă de axa Oz mai mare decât înclinarea momentului M_i. Dacă $I_z = I_y$ (cazul secţiunilor circulare, pătrate) axa neutră coincide cu direcţia momentului încovoietor M_i, iar bara este supusă la încovoiere simplă.

Pentru a identifica punctele de pe secţiune unde se dezvoltă tensiunile maxime şi minime, deci punctele cele mai depărtate de axa neutră, se duc tangente la conturul secţiunii, paralele cu axa neutră (fig. 7.2).

Valoarea acestor tensiuni se determină înlocuind în relaţia (7.3) coordonatele punctelor respective S_1 (y_1, z_1) şi S_2 (y_2, z_2):

$$\sigma_{\max} = \sigma_{S_1} = \frac{M_z}{I_z} y_1 - \frac{M_y}{I_y} z_1; \quad \sigma_{\min} = \sigma_{S_2} = \frac{M_z}{I_z} y_2 - \frac{M_y}{I_y} z_2; \tag{7.5}$$

7.1.2. Calculul de rezistenţă

Dacă materialul din care este confecţionată bara are aceeaşi rezistenţă admisibilă σ_a la întindere şi compresiune atunci condiţia de rezistenţă a unei bare solicitată la încovoiere dublă este:

$$\sigma_{\max} = \max\,[\,|\sigma_{S_1}|, |\sigma_{S_2}|\,] \le \sigma_a. \tag{7.6}$$

Deoarece, în general, secțiunea transversală a barei este caracterizată de mai mulți parametrii, relația (7.6) nu poate fi transformată într-o relație de dimensionare. Din această cauză dimensionarea se face prin încercări. Se adoptă anumite dimensiuni pentru secțiune şi se verifică condiția (7.6). Dacă aceasta este îndeplinită atunci dimensiunile sunt bune. În cazul în care condiția (7.6) nu este îndeplinită cu dimensiunile adoptate, atunci acestea se majorează până când condiția este verificată.

7.1.3. Cazul secţiunilor dreptunghiulare şi al celor care se încadrează într-un dreptunghi cu colţurile pline

După cum s-a arătat punctele S_1 şi S_2 în care tensiunea σ are valori maxime, respectiv minime, se identifică destul de greu, uneori chiar prin încercări repetate. Există însă situații în care cele două puncte se pot identifica uşor şi repede. Este cazul secțiunilor dreptunghiulare şi al celor care se încadrează într-un dreptunghi cu colțurile pline (U, I). La aceste secțiuni punctele S_1 şi S_2 vor fi situate în două colțuri opuse (fig. 7.3).

Valoarea tensiunilor maxime şi minime este:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \sigma_{S_1} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y}; \\ \sigma_{\min} &= \sigma_{S_2} = -\left(\frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{I_y}\right); \end{aligned} \tag{7.7}$$

Folosind aceste valori, condiția de rezistență (7.6) capătă forma:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_z|}{W_z}\left(1 + \frac{|M_y|}{|M_z|} \cdot \frac{W_z}{W_y}\right) \le \sigma_a \tag{7.8}$$

Deoarece raportul W_z/W_y poate fi apreciat (la secțiuni dreptunghiulare $W_z/W_y = h/b$, iar la profile U şi I variază între 7 şi 10) relația (7.8) poate fi utilizată pentru dimensionare:

$$W_z^{nec} = \frac{|M_z|}{\sigma_a}\left(1 + \frac{|M_y|}{|M_z|}\frac{W_z}{W_y}\right) = W_z^{\dim} \tag{7.9}$$

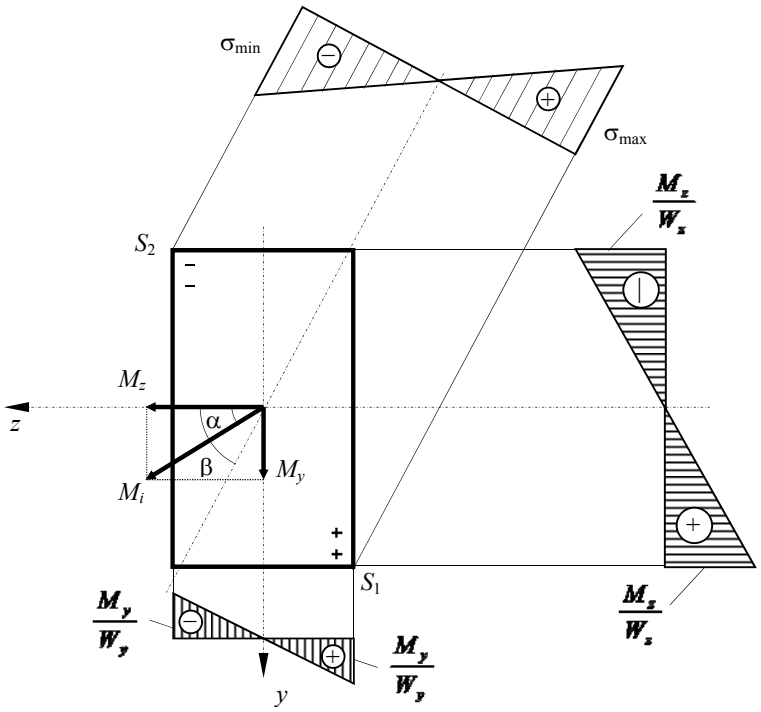


Fig. 7.3.

Calculul de dimensionare decurge în modul următor:

– se alege valoarea raportului W_z/W_y în funcție de tipul secțiunii şi se calculează W_z^{nec} cu formula (7.9);

– se determină dimensiunile secțiunii din condiția $W_z^{nec} = W_z^{\dim}$ şi se verifică condiția (7.8); dacă aceasta nu este îndeplinită, se modifică dimensiunile secțiunii până când relația (7.8) este verificată.

7.2. ÎNCOVOIEREA SIMPLĂ CU FORŢĂ AXIALĂ

Cele două componente ale torsorului eforturilor secționale care apar în planul secțiunii drepte în cazul solicitării de încovoiere simplă cu forță axială şi anume N, M_z sau N, M_y, sunt echivalente cu o forță excentrică $\vec{\mathcal{N}}$ al cărui punct de aplicație se află fie pe axa Oy, fie pe axa Oz. Dacă în secțiunea transversală apar N

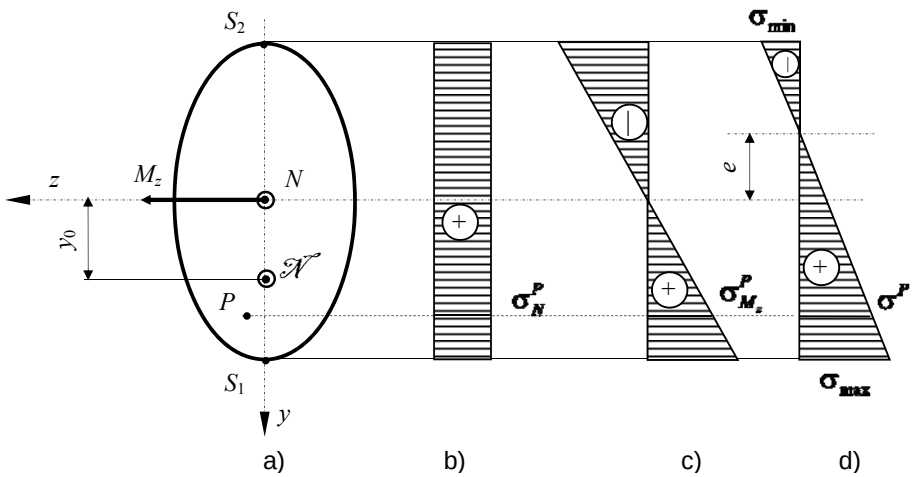


Fig. 7.4.

şi M_z, atunci legătura dintre $\mathcal{N}$ şi aceste eforturi secţionale este:

$$N = \mathcal{N}; \quad M_z = N \cdot y_0 \tag{7.10}$$

unde y_0 este distanţa de la punctul de aplicaţie al forţei excentrice la axa z (fig. 7.4, *a*).

7.2.1. Distribuţia tensiunilor pe secţiunea dreaptă a barei

Forţa axială N produce pe secţiunea dreaptă a barei tensiuni $\sigma_N = \dfrac{N}{A}$ care sunt constante în toate punctele secţiunii (fig. 7.4, *b*), iar momentul încovoietor M_z tensiuni $\sigma_{M_z} = \dfrac{M_z}{I_z} y$ care au o variaţie liniară pe secţiune (fig. 7.4, *c*). Aplicând suprapunerea de efecte în punctul P de coordonate (y, z) valoarea tensiunii totale σ se determină cu relaţia:

$$\sigma^P = \sigma_N^P + \sigma_{Mz}^P = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y\,, \tag{7.11}$$

a cărei variaţie este redată în figura 7.4, *d*.

Din condiţia $\sigma = 0$ se obţine ecuaţia axei neutre

$$y = e = -\frac{I_z}{A}\frac{N}{M_z}, \tag{7.12}$$

care arată că axa neutră este paralelă cu *Oz* (axa vectorului moment încovoietor în acest caz), la depărtarea *e* de aceasta şi situată în partea opusă celei în care este aplicată forţa excentrică $\mathcal{N}$.

Valorile maxime şi minime ale tensiunii σ se regăsesc în punctele S_1 şi S_2, cele mai depărtate de axa neutră şi se determină cu relaţiile:

$$\sigma_{S_1} = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y_{S_1}; \quad \sigma_{S_2} = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y_{S_2}. \tag{7.13}$$

Dacă axa *Oz* este axă de simetrie a secţiunii atunci $y_{S_1} = |y_{S_2}| = y_{\max}$ (fig. 7.5, *a*), şi relaţiile (7.13) capătă forma:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{S_1} = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{W_z}; \quad \sigma_{\min} = \sigma_{S_2} = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{W_z}; \tag{7.14}$$

deoarece $W_z = \dfrac{I_z}{y_{\max}}$ reprezintă modulul de rezistenţă la încovoiere.

7.2.2. Calculul de rezistenţă

Dacă materialul barei are aceeaşi rezistenţă admisibilă la întindere şi compresiune condiţia de rezistenţă pentru o bară dreaptă solicitată la încovoiere cu forţă axială este:

$$\sigma_{\max} = \max\,[\,|\sigma_{S_1}|, |\sigma_{S_2}|\,] \le \sigma_a. \tag{7.15}$$

În cazul secţiuni oarecare nu este posibilă o dimensionare directă deoarece în relaţia (7.15), în general, apar mai mulţi parametrii. Din această cauză dimensionarea se face prin încercări: se alege o secţiune, se calculează tensiunile cu relaţiile (7.13) şi se introduc în (7.15); dacă condiţia de rezistenţă nu este îndeplinită se modifică secţiunea până când este verificată relaţia (7.15).

În cazul secţiunilor simetrice în raport cu axa *Oz* (fig.7.5) condiţia de rezistenţă (7.15) capătă forma:

$$\sigma_{ech} = \sigma_{\max} = \frac{|N|}{A} + \frac{|M_z|}{W_z} \le \sigma_a, \tag{7.16}$$

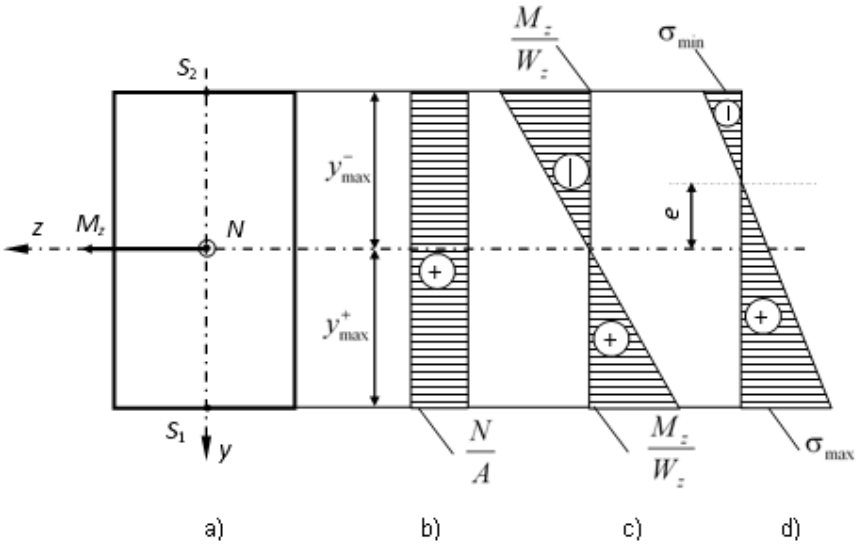


Fig. 7.5.

iar calculul de rezistență decurge astfel:

– se face o predimensionare a barei la încovoiere simplă cu relația (3.65);

– se majorează dimensiunea calculată pentru a ține seama şi de forța axială şi se face verificarea cu relația (7.16);

– dacă nu este satisfăcută condiția (7.16) atunci se modifică secțiunea până când această condiție este îndeplinită.

Sunt materiale care au o comportare foarte buna la compresiune şi slabă la întindere, ca de exemplu betonul armat utilizat la confecționarea fundațiilor. În aceste situații este necesar ca pe secțiunile elementelor de tip bară confecționate din astfel de materiale şi solicitate la încovoiere cu forță axială, să se dezvolte numai tensiuni de compresiune. Cu alte cuvinte axa neutră să nu intersecteze secțiunea, cel mult să fie tangentă la ea.

De exemplu, pentru o secțiune dreptunghiulară (fig. 7.6, *a*) ținând seama de egalitățile (7.10) se obține expresia tensiunii σ:

$$\sigma = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{12 y_0}{h^2} y\right). \tag{7.17}$$

În punctele extreme ale secțiunii, la $y = \pm h/2$, rezultă valorile:

$$\sigma_{\substack{\max \\ \min}} = \frac{N}{A}\left(1 \pm \frac{6 y_0}{h}\right). \tag{7.18}$$

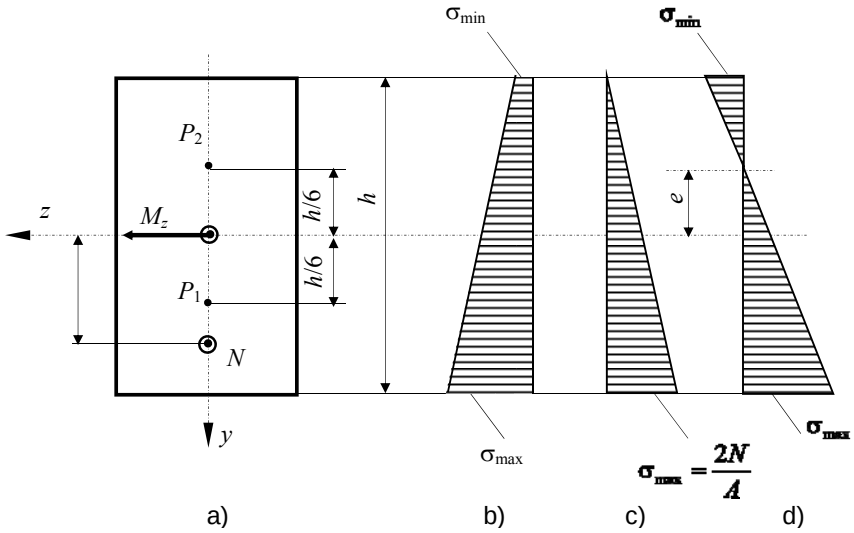


Fig. 7.6.

Se constată că, dacă forţa normală excentrică $\mathcal{N}$ este aplicată în intervalul $y_0 \in (-h/6, +h/6)$, adică în interiorul segmentului P_1P_2 (fig 7.6, *a*), care constituie treimea mijlocie a secţiunii, axa neutră nu intersectează secţiunea şi tensiunile pe secţiune au acelaşi semn (fig. 7.6, *b*). Pentru $y_0 = \frac{h}{6}$ axa neutră este tangentă la secţiune (fig. 7.6, *c*), iar tensiunile au valorile $\sigma_{min} = 0$ şi $\sigma_{max} = 2N/A$ valoarea maximă a tensiunii fiind întotdeauna de aceeaşi parte cu punctul de aplicaţie al forţei normale excentrice $\mathcal{N}$. Dacă $y_0 > h/6$ sau $y_0 > -h/6$, adică forţa normală excentrică $\mathcal{N}$ este aplicată în afara treimii mijlocii a secţiunii, axa neutră taie secţiunea la ordonata *e* determinată cu relaţia (7.12) (fig. 7.6, *d*).

7.3. ÎNCOVOIEREA DUBLĂ CU FORŢĂ AXIALĂ

În acest caz, în orice secţiune dreaptă a barei, sau a unui tronson dintr-o bară, eforturile secţionale se reduc la efortul axial *N* şi la momentele încovoietoare M_y şi M_z, sau la o forţă normală excentrică $\mathcal{N}$ aplicată într-un punct de coordonate y_0, z_0 (fig. 7.7). Între forţa $\mathcal{N}$ şi eforturile secţionale *N*, M_y şi M_z există relaţiile:

$$N = \mathcal{N};\ M_z = N \cdot y_0; \qquad M_y = -N \cdot z_0. \tag{7.19}$$

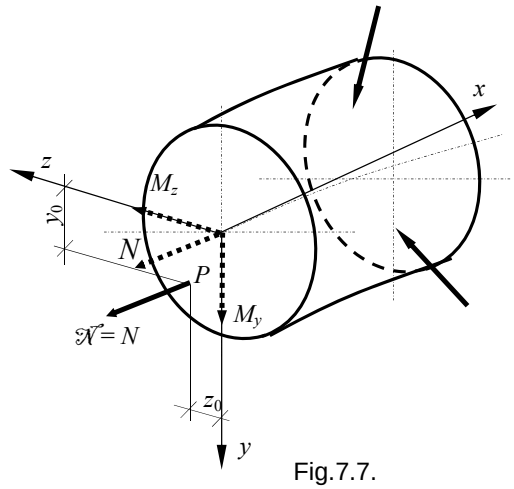


Fig.7.7.

7.3.1. Distribuţia tensiunilor pe secţiunea dreaptă a barei

Să considerăm că forța excentrică $\mathcal{N}$ este poziționată astfel încât reducerea sa în centrul de greutate al secțiunii conduce la eforturile secționale N, M_z şi M_y pozitive, aşa cum se poate observa în figura 7.8.

Deoarece eforturile secționale N, M_z şi M_y produc tensiuni σ, aplicând principiul suprapunerii eforturilor, într-un punct oarecare P de pe secțiune se va dezvolta tensiunea:

$$\sigma^P = \sigma_N^P + \sigma_{Mz}^P + \sigma_{My}^P = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} \cdot y - \frac{M_y}{I_y} \cdot z \,. \tag{7.20}$$

Din condiția σ = 0 se obține ecuația axei neutre, care se pune sub forma:

$$\frac{y}{y_1} + \frac{z}{z_1} = 1 \tag{7.21}$$

ale cărei tăieturi y_1, z_1 se exprimă prin formulele:

$$y_1 = -\frac{N}{M_z} \cdot \frac{I_z}{A}; \qquad z_1 = \frac{N}{M_y} \cdot \frac{I_y}{A} \,. \tag{7.22}$$

Ținând seama de relațiile (7.19) tăieturile axei neutre se pot scrie astfel:

$$y_1 = -\frac{1}{y_0} \cdot \frac{I_z}{A}; \quad z_1 = -\frac{1}{z_0} \cdot \frac{I_z}{A} \,. \tag{7.23}$$

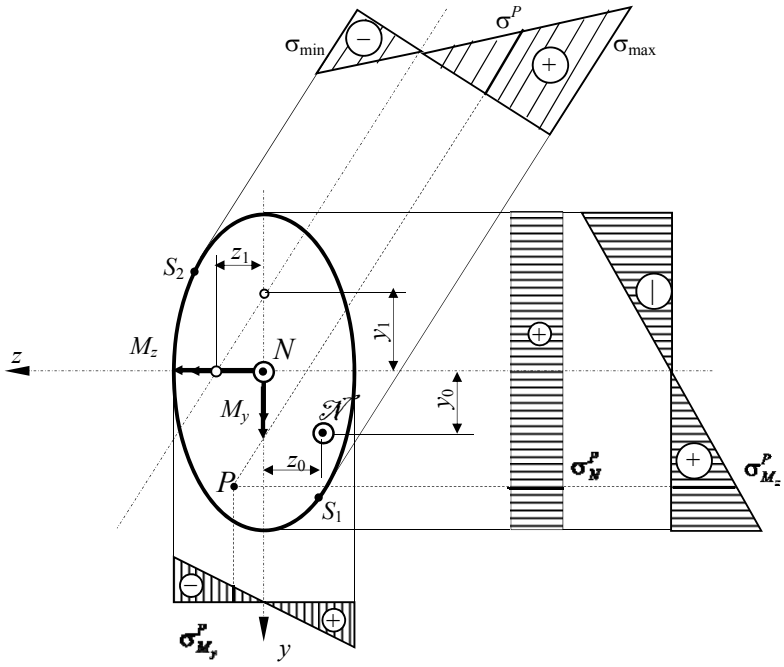


Fig. 7.8.

Deoarece aria A, şi momentele de inerţie axiale I_y şi I_z sunt întotdeauna pozitive, se observă că tăieturile axei neutre (y_1, z_1) şi coordonatele punctului de aplicaţie al forţei normale excentrice (y_0, z_0) sunt de semne contrarii. Din această cauză axa neutră şi punctul de aplicaţie al forţei excentrice sunt situate în cadrane opuse (fig.7.8).

Pentru identificarea punctelor de pe secţiune în care tensiunile σ au valori maxime, se calculează mai întâi coordonatele (y_0, z_0) ale punctului de aplicaţie al forţei excentrice, apoi, cu relaţiile (7.23), tăieturile axei neutre. După trasarea axei neutre, se duc tangente la conturul secţiunii transversale, paralele cu axa neutră şi se identifică punctele S_1 şi S_2, care sunt punctele cele mai solicitate de pe secţiune.

În aceste puncte tensiunile sunt:

$$\sigma_{S_1} = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} \cdot y_{S_1} - \frac{M_y}{I_y} \cdot z_{S_1}$$
$$\sigma_{S_2} = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} \cdot y_{S_2} - \frac{M_y}{I_y} \cdot z_{S_2} \qquad (7.24)$$

7.3.2. Calculul de rezistenţă

Valorile tensiunilor σ_{S_1} şi σ_{S_2} nu trebuie să depăşească valoarea tensiunii admisibile a materialului din care este confecţionată bara:

$$\sigma_{\max} = \max\,[\,|\sigma_{S_1}|, |\sigma_{S_2}|\,] \le \sigma_a. \tag{7.25}$$

Deoarece condiţia de rezistenţă (7.25) nu pot fi transformată în formulă de dimensionare, proiectarea barelor supuse la încovoiere dublă cu forţă axială se face prin încercări: se aleg anumite dimensiuni pentru secţiune şi dacă condiţia de rezistenţă nu este îndeplinită acestea se modifică până când aceasta este îndeplinită corespunzător.

Ca şi în cazul solicitărilor de încovoiere dublă şi încovoiere simplă cu forţă axială, în cazul secţiunilor dreptunghiulare punctele S_1 şi S_2 sunt situate în două colţuri opuse ale secţiunii (fig. 7.9). În această situaţie, deoarece $y_{S_1} = y_{\max} = |y_{S_2}|$

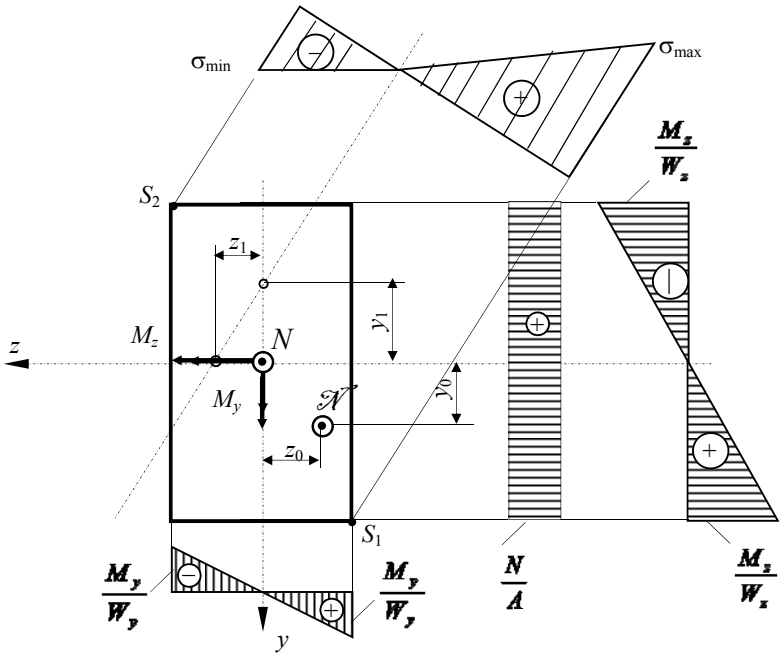


Fig. 7.9.

şi $\left|z_{S_1}\right| = z_{\max} = z_{S_2}$, tensiunile în punctele cele mai solicitate sunt:

$$\sigma_{S_1} = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y}; \qquad \sigma_{S_2} = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{W_z} - \frac{M_y}{W_y}. \tag{7.26}$$

Dacă materialul din care este confecţionată bara are aceeaşi rezistenţă admisibilă la întindere şi compresiune, condiţia de rezistenţă (7.25) devine:

$$\sigma_{\max} = \frac{|N|}{A} + \frac{|M_z|}{W_z} + \frac{|M_y|}{W_y} \le \sigma_a. \tag{7.27}$$

Pentru secţiuni circulare, pătrate şi dreptunghiulare, la care se dă raportul h/b, sau pentru secţiuni compuse a căror geometrie depinde de un singur parametru, condiţia (7.27) se transformă pentru dimensionare într-o ecuaţie de gradul trei.

Calculul practic de dimensionare cuprinde următoarele etape:

– se neglijează efectul forţei axiale şi se face o dimensionare la încovoiere oblică cu formula (7.9);

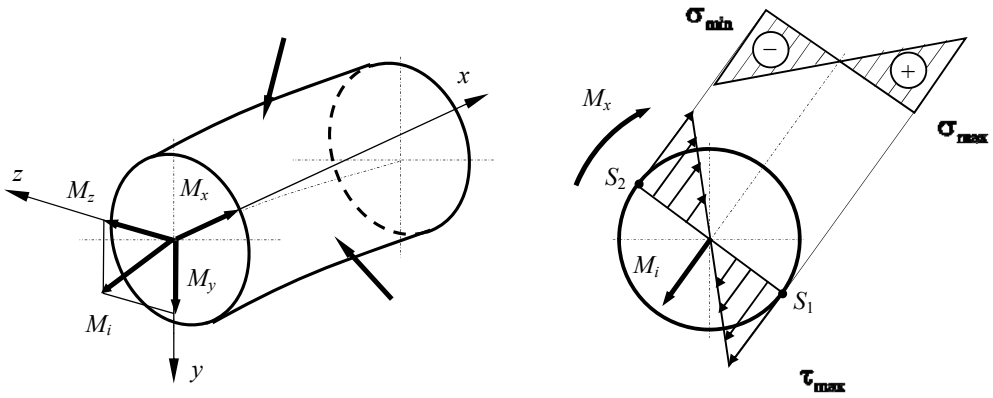
– se adoptă dimensiunile secţiunii ţinând seama de influenţa forţei axiale şi a raportului W_z/W_y, după care, obligatoriu, se face verificarea condiţiei de rezistenţă (7.27).

7.4. ÎNCOVOIEREA CU TORSIUNE A BARELOR DREPTE CU SECŢIUNE CIRCULARĂ

O bară este solicitată la încovoiere cu torsiune atunci când în secţiunea transversală a sa apare pe lângă momentul de torsiune M_x cel puţin unul din momentele de încovoiere M_y şi M_z.

7.4.1. Distribuţia tensiunilor pe secţiunea dreaptă a barei

Deoarece în cazul secţiunii circulare orice axă care trece prin centrul O este o axă de simetrie şi deci implicit axă centrală principală de inerţie, momentele M_y şi M_z se compun şi formează momentul de încovoiere M_i, a cărui direcţie este chiar axa neutră (fig. 7.10, *a*). În consecinţă încovoierea este întotdeauna simplă şi din



a) b)

Fig. 7.10.

distribuția tensiunilor σ (fig. 7.10, *b*) rezultă că în punctele S_1 şi S_2 se dezvoltă tensiunile maxime, respectiv minime ale căror valori sunt:

$$\sigma_{\max} = |\sigma_{\min}| = \frac{M_i}{W_i}, \tag{7.28}$$

unde $W_i = \pi D^3/32$ reprezintă modulul de rezistență la încovoiere.

Tensiunile tangențiale τ produse de momentul de torsiune M_x au valori maxime pe conturul secțiunii şi o variație liniară pe orice diametru al acesteia. Deci, în punctele S_1 şi S_2:

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_p} \tag{7.29}$$

unde $W_p = \pi D^3/16$ reprezintă modulul de rezistență la torsiune.

Se constată că în cazul încovoierii cu torsiune se dezvoltă atât tensiuni σ cât şi tensiuni τ, fapt ce conduce la utilizarea teoriilor de rezistență la calculul de proiectare sau verificare.

7.4.2. Calculul de rezistenţă

Deoarece în punctul S_1 se dezvoltă atât σ_{max} cât şi τ_{max}, în acest punct se va calcula σ_{ech}. De exemplu în baza teoriei de rezistență T_τ (teoria a III-a) aplicată la bare:

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\,. \tag{7.30}$$

Dacă în (7.30) se introduc expresiile lui σ_{max} cât şi τ_{max} rezultă:

$$\sigma_{ech} = \frac{M_i}{W_i}\sqrt{1+\left(\frac{M_x}{M_i}\right)^2} = \frac{M_i}{W_i}K_{T_\tau} \le \sigma_a \tag{7.31}$$

Coeficientul K_T este în funcţie de teoria de rezistenţă utilizată pentru calculul lui σ_{ech}.

Condiţia de rezistenţă (7.31) poate fi utilizată pentru dimensionare:

$$W_i^{nec} = \frac{M_i}{\sigma_a}K_{T_\tau} = W_i^{\dim} \tag{7.32}$$

De multe ori însă, pe lângă condiţia de rezistenţă (7.31) se impune şi o condiţie de rigiditate de forma (3.114). Dacă se constată că dimensiunile secţiunii nu verifică condiţia (3.114) atunci dimensionarea barei se va face astfel:

$$I_p^{nec} = \frac{M_x}{G\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)_a} = I_p^{\dim} \tag{7.33}$$

unde $I_p = \frac{\pi D^4}{32}$ reprezintă momentul de inerţie polar al secţiunii barei.

Probleme rezolvate

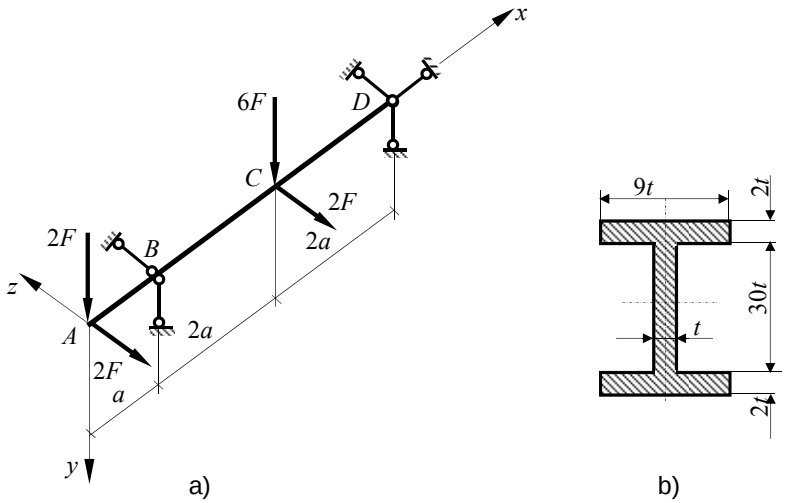
P.7.1. Bara *ABCD* din figura 7.11, *a* este acţionată de forţe concentrate atât în planul *xOy* cât şi în planul *xOz* şi are secţiunea în formă de I (fig. 7.11, *b*). Ştiind că F = 1,2 kN, a = 0,8 m şi σ_a = 150 N/mm^2 să se dimensioneze economic bara şi să se traseze variaţia tensiunilor σ în secţiunea *B*.

Trebuiesc trasate mai întâi diagramele de eforturi. Se determină diagrama $\underline{M_z}$ (fig. 7.11, *c*) cu forţele din planul *xOy* şi diagrama M_y (fig. 7.11, *d*) cu forţele din planul *xOz* (în fig. 7.11, *d*, axa *z* este orientată în sus pentru a păstra convenţia de semne pentru momentele încovoietoare şi în planul *xOz*).

Dimensionarea barei se face cu valorile eforturilor secţionale din secţiunea periculoasă. Secţiunea periculoasă poate fi în *C*, unde $M_z = 5Fa$ este maxim, sau în *B* unde $M_y = 2Fa$ este maxim. Din această cauză dimensionarea se face cu valorile eforturilor secţionale din *C* şi apoi se va verifica şi secţiunea *B*.

Deoarece în secţiunea *C*, $M_z = 5\text{Fa} > |M_y| = 2Fa$, pentru o dimensionare economică secţiunea barei trebuie aşezată astfel încât $I_z > I_y$, ca în figura 7.12.

Dimensionarea se face cu relaţia (7.9), care implică cunoaşterea raportului W_z/W_y. Pentru aceasta se calculează momentele de inerţie axiale ale secţiunii barei:


x
6F
D
C
2F
2a
2F
B
z
A
2a
2F
a
y
a)
9t
2t
30t
t
2t
b)

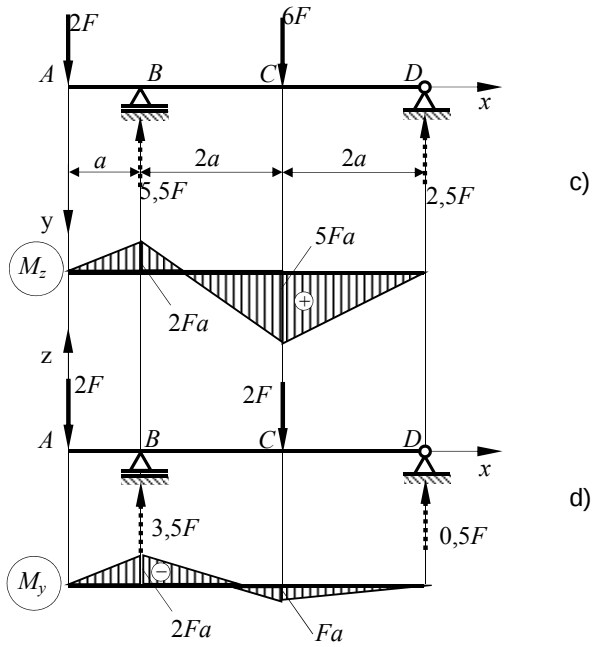

2F
6F
A
B
C
D
x
a
2a
2a
5,5F
2,5F
c)
y
5Fa
M_z
2Fa
z
2F
2F
A
B
C
D
x
d)
3,5F
0,5F
M_y
2Fa
Fa

Fig. 7.11

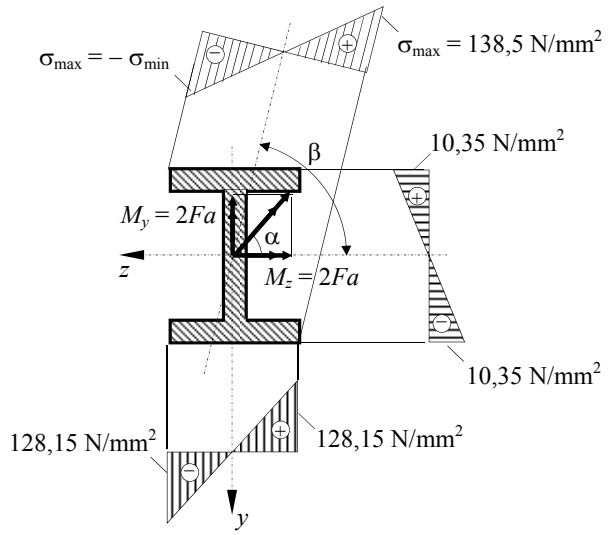


Fig. 7.12.

$$I_z = 2\cdot\left[\frac{9t\cdot(2t)^3}{12} + 9t\cdot 2t\cdot(16t)^2\right] + \frac{t\cdot(30)^3}{12} = 11478t^4;$$

$$I_y = 2\cdot\frac{2t\cdot(9t)^3}{12} + \frac{30t\cdot t^3}{12} = 245{,}5t^4.$$

Deoarece $|y_{\max}| = 17t$ şi $|z_{\max}| = 4{,}5t$ modulele de rezistenţă la încovoiere pentru secţiunea considerată sunt:

$$W_z = \frac{11478t^4}{17t} = 675{,}176t^3; \quad W_y = \frac{245{,}5t^4}{4{,}5t} = 54{,}555t^3;$$

şi deci

$$\frac{W_z}{W_y} = \frac{675{,}176t^3}{54{,}555t^3} = 12{,}376.$$

Aplicând formula (7.9) se obţine:

$$W_z^{nec} = \frac{|M_z|}{\sigma_a}\left(1 + \frac{|M_y|}{|M_z|}\cdot\frac{W_z}{W_y}\right) = \frac{(5\cdot 1{,}2\cdot 10^3)\cdot(800)}{150}\left(1 + \frac{1}{5}\cdot 12{,}376\right) = 111{,}2064\cdot 10^3 \text{ mm}.$$

Din egalitatea $W_z^{nec} = W_z^{\dim}$ rezultă:

$$t = \sqrt{\frac{111{,}2064\cdot 10^3}{675{,}176}} = 5{,}48 \text{ mm}.$$

Se adoptă $t = 5{,}5$ şi se face verificarea calculelor:

$$\sigma_{\max}^{ef} = \frac{|M_z|}{W_z}\left(1 + \frac{|M_y|}{|M_z|}\cdot\frac{W_z}{W_y}\right) = \frac{(5\cdot 1{,}2\cdot 10^3)\cdot(800)}{675{,}176\cdot 5{,}5^3}\left(1+\frac{1}{5}\cdot 12{,}376\right) = 148{,}5\ \text{N/mm}^2 < \sigma_a.$$

Deoarece în secţiunea B:

$$\sigma = \frac{(2\cdot 1{,}2\cdot 10^3)\cdot(800)}{675{,}176\cdot 5{,}5^3}\left(1+\frac{2}{2}\cdot 12{,}376\right) = 228{,}62\ \text{N/mm}^2 > \sigma_a;$$

dimensionarea barei se va face cu valorile eforturilor secţionale din secţiunea B:

$$W_z^{nec} = \frac{(2\cdot 1{,}2\cdot 10^3)\cdot(800)}{150}\left(1+\frac{2}{2}\cdot 12{,}376\right) = 171{,}2128\cdot 10^3\ \text{mm}^3.$$

Din egalitatea $W_z^{nec} = W_z^{\dim}$ rezultă:

$$t = \sqrt{\frac{171{,}2128\cdot 10^3}{675{,}176}} = 6{,}3\ \text{mm}.$$

Se adoptă $t = 6{,}5$ mm, dimensiune care verifică condiţia de rezistenţă:

$$\sigma_{\max}^{ef} = \frac{(2\cdot 1{,}2\cdot 10^3)\cdot(800)}{675{,}176\cdot 6{,}5^3}\left(1+\frac{2}{2}\cdot 12{,}376\right) = 138{,}5\ \text{N/mm}^2 < \sigma_a.$$

Distribuţia tensiunilor σ corespunzătoare eforturilor secţionale $M_z = -2Fa$, $M_y = -2Fa$, din secţiunea B, este redată în figura 7.12. Unghiul β pe care îl face axa neutră cu direcţia axei z se calculează cu relaţia (7.4):

$$\tan\beta = \frac{I_z}{I_y}\cdot\tan\alpha = \frac{11478t^4}{245{,}5t^4}\cdot\frac{-2Fa}{-2Fa} = 46{,}753 \Rightarrow \beta = 88^\circ\,46'.$$

P.7.2. Consola din figura 7.13, *a* este confecţionată dintr-un profil cornier cu braţele egale L 150 x 150 x 14. Să se determine $F_{\max}$ pentru orientarea secţiunii barei ca în figura 7.13, *b* şi sporul de sarcină ce se obţine dacă forţa F acţionează după axa cu moment de inerţie minim (fig. 7.13, *c*).

Momentul încovoietor M_i este maxim în încastrare, are valoarea $M_i = -F\cdot l$ şi este dirijat după axa z_1 (fig. 7.13, *b*), care face cu axele centrale principale de inerţie y şi z unghiuri de 45°.

Rezultă $M_z = M_y = -F\cdot l\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -F\cdot 1{,}5\cdot 10^3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -1060{,}66\ F$. În consecinţă bara este supusă la încovoiere oblică şi determinarea lui $F_{\max}$ se face în baza condiţiei de rezistenţă (7.6). Din anexa 3, pentru cornier L 150x150x14 se obţin următoarele caracteristici: $I_z = 1340\cdot 10^4$ mm^4; $I_y = 347\cdot 10^4$ mm^4; $y_{S1} = 106$ mm; $z_{S1} = -53{,}1$mm; $z_{S2} = 59{,}5$mm.

Axa neutră face cu axa z unghiul β a cărui valoare este:

$$\tan\beta = \frac{M_y}{M_z}\cdot\frac{I_z}{I_y} = \frac{-1060{,}66F}{-1060{,}66F}\cdot\frac{1340\cdot 10^4}{347\cdot 10^4} = 3{,}86 \Rightarrow \beta = 75^\circ 29'.$$

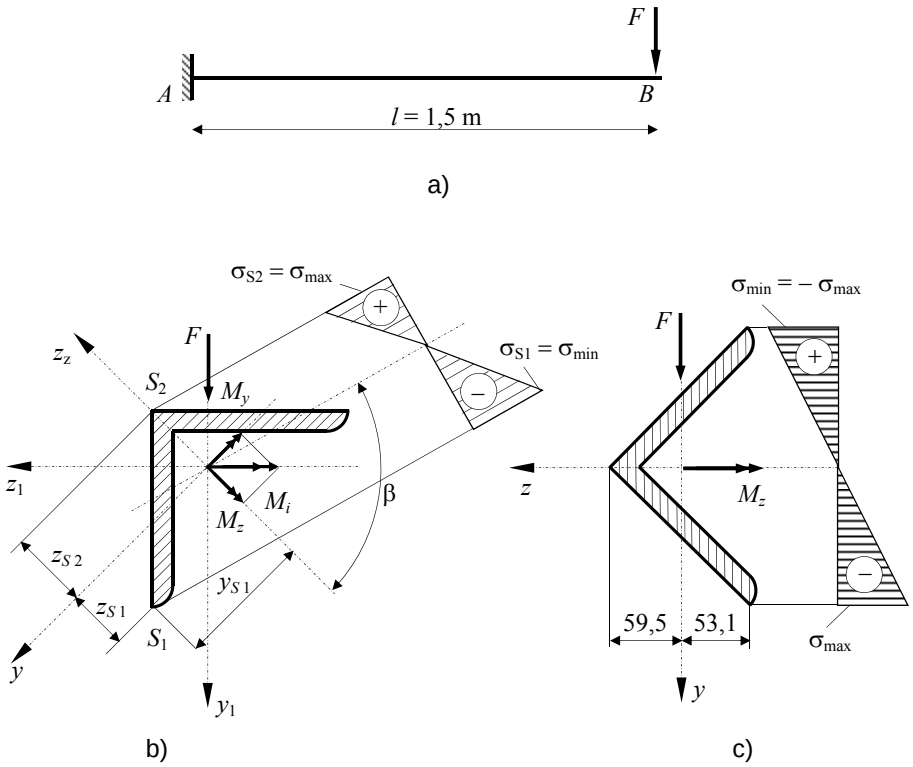


Fig. 7.13

Sensul pozitiv al unghiului β este cel trigonometric.

Se duc paralele la axa neutră, tangente la conturul secțiunii, şi se identifică punctele S_1 şi S_2 care sunt punctele cele mai solicitate. Tensiunile σ din aceste puncte se determină cu relațiile (7.5):

$$\sigma_{S1} = \frac{M_z}{I_z} \cdot y_{S1} - \frac{M_y}{I_y} \cdot z_{S1} = \frac{-1060.66F}{1340 \cdot 10^4} \cdot 106 - \frac{-1060.66F}{347 \cdot 10^4} \cdot (-53{,}1) = -24{,}62 \cdot 10^{-3} F$$

$$\sigma_{S2} = \frac{M_z}{I_z} \cdot y_{S2} - \frac{M_y}{I_y} \cdot z_{S2} = -\frac{-1060.66F}{347 \cdot 10^4} \cdot (59{,}5) = 18{,}87 \cdot 10^{-3} F$$

Din condiția de rezistență

$$\sigma_{\max} = \max\,[\,|\,\sigma_{S_1}\,|, |\,\sigma_{S_2}\,|\,] \le \sigma_a.$$

rezultă

$$24{,}62 \cdot 10^{-3} F \le 150 \Rightarrow F_{\max} = 6092{,}6 \text{ N}.$$

Dacă secțiunea este orientată ca în figura 7.13, *c*, atunci bara este supusă la încovoiere simplă şi are momentul capabil:

$$M_z^{cap} = W_z^{ef} \cdot \sigma_a = \frac{1340 \cdot 10^4}{106} \cdot 150 = 18{,}962 \cdot 10^6 \text{ Nmm.}$$

Din condiția $M_z^{\max} = F \cdot l \le M_z^{cap}$ rezultă $\frac{18{,}922 \cdot 10^6}{1{,}5 \cdot 10^3} = 12641{,}5$ N.

Sporul de sarcină ce îl poate prelua bara cu secțiunea transversală așezată ca în figura 7.13, *c* este $\frac{12641{,}5}{6092{,}6} = 2{,}07$.

P.7.3. O bară din fontă cu secțiunea și dimensiunile indicate în figura 7.14 este acționată, prin intermediul unui cablu, de o forță P = 300 kN. Cunoscând că rezistența la întindere din încovoiere a fontei din care este confecționată bara este σ_a^{int} = 45 N/mm^2, iar rezistența la compresiune și compresiune din încovoiere este σ_a^{com} = 120 N/mm^2, să se verifice secțiunea barei.

Sistemul fiind simetric, în secțiunile *A-A* și *B-B*, în dreptul urechilor, se aplică eforturile din cablu datorate forței *P*, a căror mărime este:

$$S = \frac{P}{2 \cdot \cos 60^0} = \frac{300}{2 \cdot \cos 60^0} = 300 \text{ kN.}$$

Reducând eforturile *S* din cablu în axa barei (fig. 7.15, *a*) se obține o forță verticală

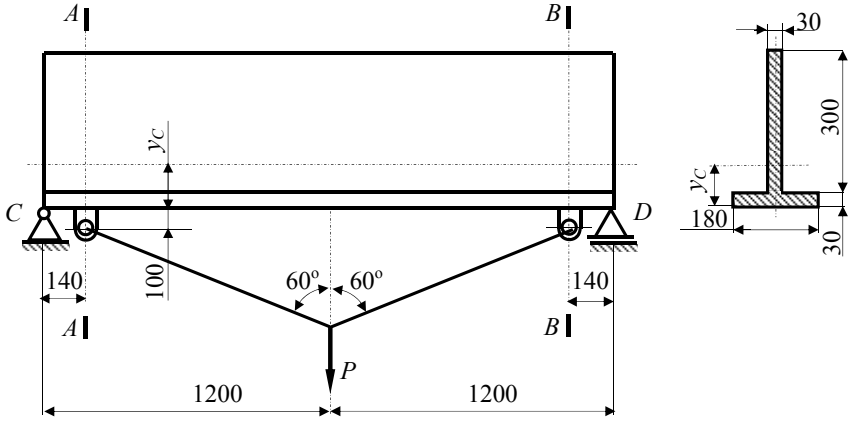


Fig. 7.14

$F_1 = S \cdot \cos 60^o = 300 \cdot \cos 60^o = 150$ kN, o forță orizontală $F_2 = S \cdot \sin 60^o = 300 \cdot \sin 60^o = 259{,}807$ kN și un moment $M = (S \cdot \sin 60^o) \cdot 100 = 25{,}9807$ kNm.

Cu aceste solicitări se trasează diagramele de eforturi N și M_z redate în figura 7.15, *b*. Din analiza lor reiese că secțiunile cele mai solicitate sunt *A* și *B*. În secțiunile A^{st} și B^{dr}, bara este solicitată la încovoiere simplă, valoarea momentului fiind M_z = 21 kNm, iar în secțiunile A^{dr} și B^{st} la încovoiere simplă cu forță axială, valorile eforturilor fiind N = 259,807 kN, M_z = 46,9807 kNm.

Deoarece bara este confecționată din fontă, material care se comportă diferit la întindere și compresiune, pentru verificarea condițiilor de rezistență (3.67) și (7.16) este necesară trasarea variației tensiunilor σ pe secțiune.

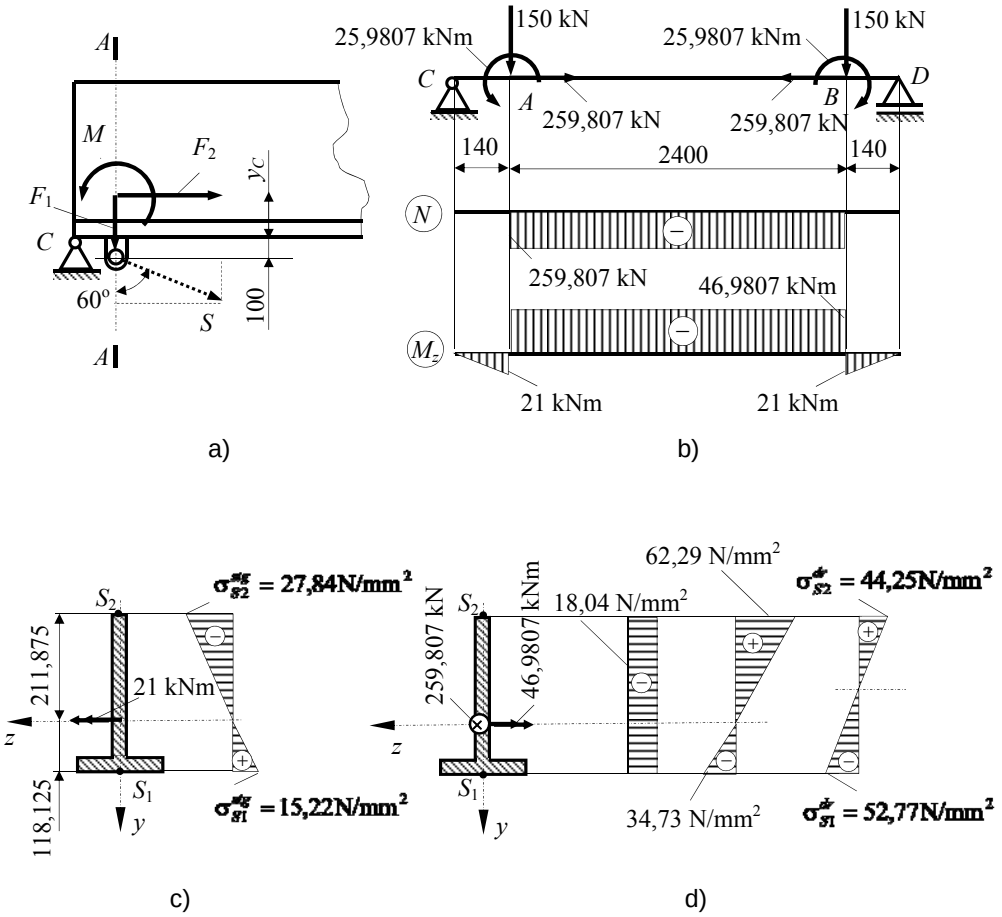


Fig. 7.15.

Pentru aceasta este necesar să se determine mai întâi poziția centrului de greutate al secțiunii:

$$y_C = \frac{15 \cdot 30 \cdot 180 + (30 + 150) \cdot 30 \cdot 300}{30 \cdot 180 + 30 \cdot 300} = 118{,}125 \text{ mm}.$$

Cunoscând poziția centrului de greutate se poate calcula momentul de inerție al secțiunii în raport cu axa z:

$$I_z = \frac{30^3 \cdot 180}{12} + 30 \cdot 180 \cdot (118{,}125 - 15)^2 +$$

$$+ \frac{300^3 \cdot 30}{12} + 300 \cdot 30 \cdot (180 - 118{,}125)^2 = 159{,}789 \cdot 10^6 \text{ mm}^4.$$

În figura 7.15, *c* este redată variația tensiunii σ în secțiunile A^{st} şi B^{dr}. Valorile maxime se ating în punctele S_1 şi S_2:

$$\sigma_{S1} = \frac{21 \cdot 10^6}{159{,}789 \cdot 10^6} \cdot 118{,}125 = 15{,}52 \text{ N/mm}^2;$$

$$\sigma_{S2} = \frac{21 \cdot 10^6}{159{,}789 \cdot 10^6} \cdot (-211{,}875) = -27{,}84 \text{ N/mm}^2.$$

Condiția de rezistență în secțiunile A^{st} şi B^{dr} este îndeplinită deoarece:

$$\sigma_{S1} = 15{,}52 \text{ N/mm}^2 < \sigma_a^{\text{int}} = 45 \text{ N/mm}^2;$$

$$|\sigma_{S2}| = 27{,}84 \text{ N/mm}^2 < \sigma_a^{\text{comp}} = 120 \text{ N/mm}^2$$

În figura 7.15, *d* este redată variația tensiuni σ în secțiunile A^{dr} şi B^{st}. Valorile maxime sunt:

$$\sigma_{S1} = \frac{-259{,}807 \cdot 10^3}{14{,}4 \cdot 10^3} + \frac{-46{,}9807 \cdot 10^6}{159{,}789 \cdot 10^6} \cdot 118{,}125 = -18{,}04 - 34{,}73 = -52{,}77 \text{ N/mm}^2;$$

$$\sigma_{S2} = \frac{-259{,}807 \cdot 10^3}{14{,}4 \cdot 10^3} + \frac{-46{,}9807 \cdot 10^6}{159{,}789 \cdot 10^6} \cdot (-211{,}875) = -18{,}04 + 62{,}29 = 44{,}25 \text{ N/mm}^2.$$

Pentru că şi în secțiunile A^{st} şi B^{dr} :

$$|\sigma_{S1}| = 52{,}77 \text{ N/mm}^2 < \sigma_a^{\text{comp}} = 120 \text{ N/mm}^2;$$

$$\sigma_{S2} = 44{,}25 \text{ N/mm}^2 < \sigma_a^{\text{int}} = 45 \text{ N/mm}^2$$

rezultă că bara este dimensionată corect, condițiile de rezistență verificându-se în toate secțiunile periculoase.

P.7.4. Să se determine valoarea maximă a tensiunii ce se produce la baza unei fundații, ştiind că aceasta are o greutate $Q = 150$ kN, iar forța $P = 130$ kN o solicită excentric pe axa *Oz* la distanța $e = -0{,}45$ m (fig. 7. 16). Dimensiunile secțiunii transversale a fundației sunt b x h = 2 x 1 m.

Forța *P* se reduce în centrul de greutate al secțiunii la o forță axială de compresiune $N^P = P$ şi la un moment încovoietor dirijat după axa *Oy* a cărui valoare este $M_y = -P \cdot e$. Greutatea *Q* se reduce numai la o forță axială de compresiune $N^Q = P$.

Tensiunea normală maximă de compresiune se produce în punctele situate pe muchia *BC*. Ea se compune din tensiunea normală de compresiune produsă de $N = N^P + N^Q = P + Q$ şi din cea de încovoiere produsă de momentul $M_y = -P \cdot e$ şi are valoarea:

$$\sigma_B = -\frac{Q+P}{A} - \frac{P \cdot e}{W_y} = -\frac{150+130}{2 \cdot 1} - \frac{130 \cdot 0{,}45}{\frac{2^2 \cdot 1}{6}} = 227{,}75 \text{ kN/m}^2 = 0{,}22775 \text{ N/mm}^2.$$

Tensiunea normală în punctele situate pe muchia *AD* este egală cu:

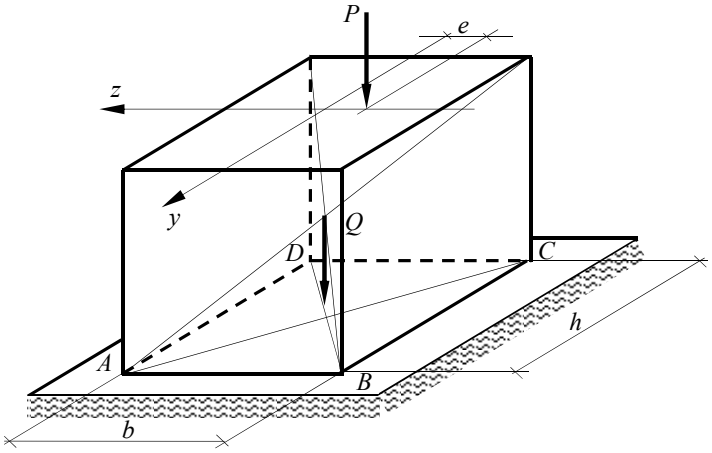


Fig. 7.16.

$$\sigma_B = -\frac{Q+P}{A} - \frac{P \cdot e}{W_y} = -\frac{150+130}{2 \cdot 1} + \frac{130 \cdot 0{,}45}{\frac{2^2 \cdot 1}{6}} = 52{,}15 \text{ kN/m}^2 = 0{,}5215 \text{ N/mm}^2.$$

Se constată că pe secţiunea fundaţiei se dezvoltă numai tensiuni de compresiune. Acest lucru poate fi verificat şi prin faptul că punctul de aplicaţie al forţei excentrice $\vec{N}$:

$$z_0 = \frac{M_y}{N} = \frac{P \cdot e}{P+Q} = \frac{130 \cdot 0{,}45}{130+150} = 0{,}208 \text{ m},$$

este situat în treimea mijlocie a secţiunii fundaţiei deoarece $z_0 = 0{,}208$ m $< \frac{b}{6} = 0{,}33$ m.

P.7.5. Grinda din figura 7.17, *a* cu dimensiunile şi forţele indicate, se realizează din două profile U 30 (a = 1m; σ_a = 150 N/mm^2). Să se determine valoarea maximă a forţei F pe care o poate suporta grinda şi să se traseze distribuţia tensiunilor σ în secţiunea D.

Se consideră grinda în planul (x, y) figura 7.17, *b*, acţionată de sarcinile transversale din acest plan şi de sarcina axială. Diagrama N este reprezentată în figura 7. 17, *c*. Se determină reacţiunile verticale din C şi G şi se trasează diagrama M_z (fig. 7.17, *d*).

Se consideră grinda în planul (x, z) (axa z este orientată în sus pentru a păstra convenţia de reprezentare a momentului încovoietor de partea fibrei întinse) figura 7.17, *e*, acţionată de sarcinile transversale din acest plan. După determinarea reacţiunilor se trasează diagrama M_z, reprezentată în figura 7.17, *f*.

Secţiunea cea mai solicitată este cea din D, eforturile din această secţiune având valorile $N = 10Fa$, $M_z = 5Fa$ şi $M_y = 2{,}5Fa$.

Din anexa 6, pentru U30 se obţin următoarele caracteristici: $I_{z1} = 8030 \cdot 10^4$ mm^4, $I_{y1} = 495 \cdot 10^4$ mm^4, $A_1 = 58{,}8 \cdot 10^2$ mm^2. Pentru secţiunea compusă a barei caracteristicile geometrice sunt:

$$I_z = 2I_{z1} = 2 \cdot 8030 \cdot 10^4 = 160{,}6 \cdot 10^6 \text{ mm}^4; \quad W_z = \frac{I_z}{|y_{\max}|} = \frac{160{,}6 \cdot 10^6}{150} = 1{,}07067 \cdot 10^6 \text{ mm}^3;$$

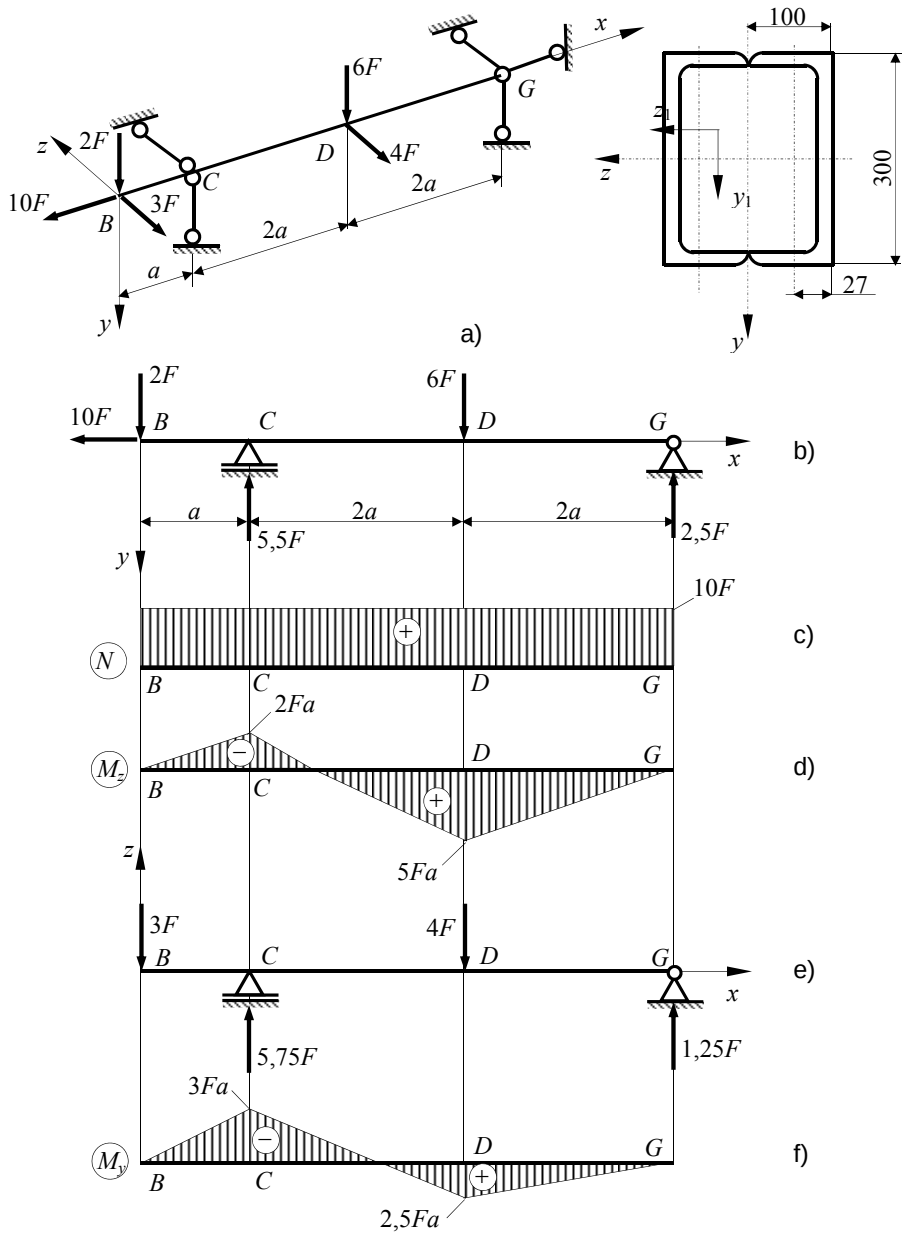

a)
b)
c)
d)
e)
f)
2F
6F
10F
B
C
D
G
x
y
z
a
2a
5,5F
2,5F
N
2Fa
5Fa
3F
4F
5,75F
1,25F
3Fa
2,5Fa
100
300
27

Fig. 7.17.

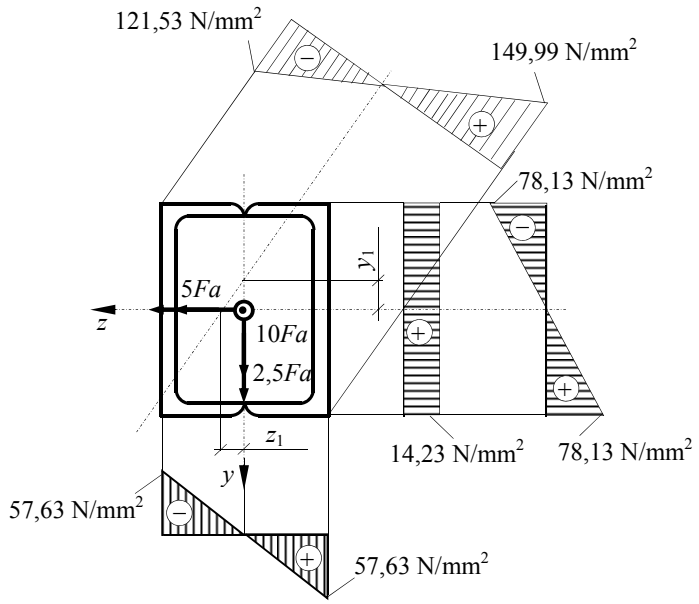


Fig. 7.18

$I_y = 2(I_{y1} + A_1 \cdot d_{yy1}^2) = 2\cdot[\,945\cdot 10^4 + 58{,}8\cdot 10^2\cdot(100-27)^2] = 72{,}56904\cdot 10^6$ mm^4;

$$W_y = \frac{I_y}{|z_{\max}|} = \frac{72{,}56904\cdot 10^6}{100} = 72{,}56904\cdot 10^4 \text{ mm}^3;$$

$A = 2A_1 = 2\cdot 58{,}8\cdot 10^2 = 11{,}76\cdot 10^2$ mm^2.

Deoarece secțiunea barei se încadrează în categoria secțiunilor cu colțuri pline, din condiția de rezistență (7.27) se determină valoarea maximă a forței F:

$$\sigma_{\max} = \frac{10F}{11{,}76\cdot 10^3} + \frac{5F\cdot 10^3}{1{,}07067\cdot 10^6} + \frac{2{,}5F\cdot 10^3}{72{,}56904\cdot 10^4} \le 150 \Rightarrow 8{,}9653\cdot 10^{-3}F \le 150$$

Rezultă $F_{\max} = 16{,}73$ kN. Cu această valoare se verifică şi secțiunea C:

$$\sigma_C = \frac{10\cdot(16{,}73\cdot 10^3)}{11{,}76\cdot 10^3} + \frac{2\cdot(16{,}73\cdot 10^3)\cdot 10^3}{1{,}07067\cdot 10^6} + \frac{3\cdot(16{,}73\cdot 10^3)\cdot 10^3}{72{,}56904\cdot 10^4} = 114{,}64 \text{ N/mm}^2 < \sigma_a.$$

Distribuția tensiunilor σ corespunzătoare secțiunii D este redată în figura 7.18. Tăieturile axei centrale, calculate cu relațiile (7.22) sunt $y_1 = -27{,}3$ mm şi $z_1 = 24{,}6$ mm.

P.7.6. Pe un arbore sunt montate două roți de raze R_1 şi R_2, acționate la periferie de forțele T_1 şi T_2 (fig. 7.19, *a*). Arborele are secțiune circulară plină şi transmite o putere $P = 28$ kW la turația $n = 400$ rot/min. Să se dimensioneze arborele, după ipoteze a III- a de rezistență ştiind că oțelul din care este confecționat are $\sigma_a = 80$ N/mm^2, G = 8,077·10^4 N/mm^2, iar răsucirea specifică admisibilă este $(d\varphi/dx)_a = (1/3)$ $^o/_m$.

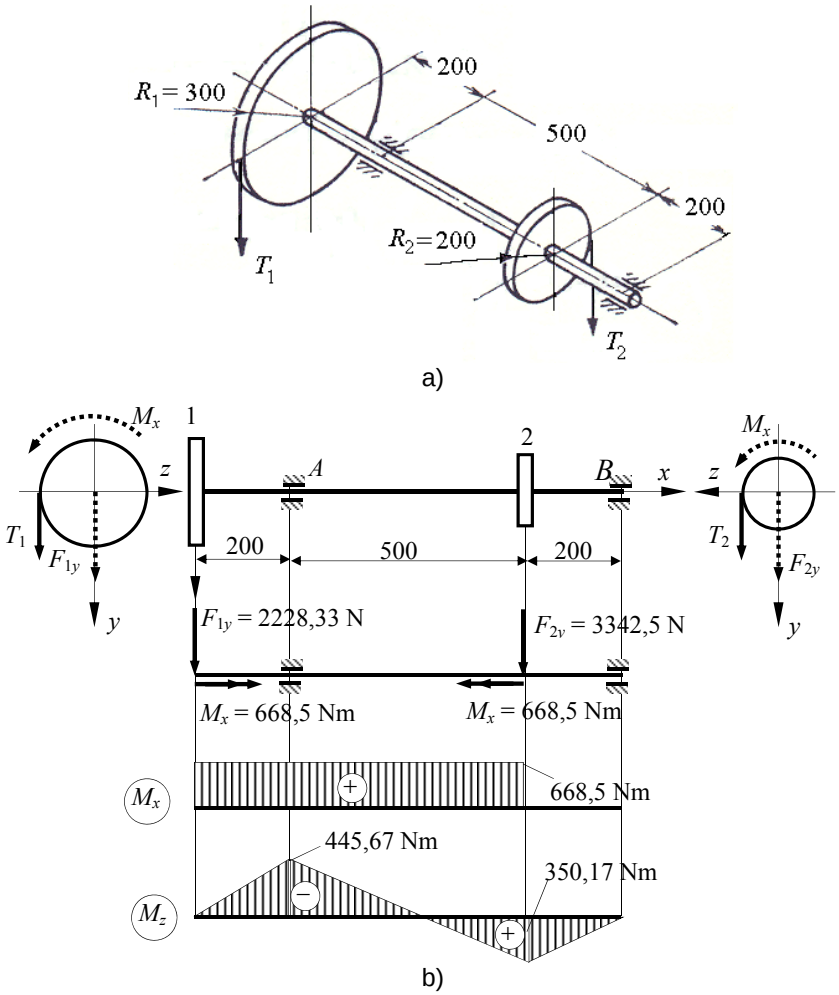


Fig.7.19.

Forțele care acționează roțile 1 şi 2 se reduc în axa arborelui la forțele F_{1y}, respectiv F_{2y} şi la un moment de torsiune M_x (fig. 7.19, *b*), a cărui valoare este:

$$M_x = 9{,}55 \cdot 10^3 \frac{P}{n} = 9{,}55 \cdot 10^3 \frac{28}{400} = 668{,}5 \text{ Nm}$$

Diagrama momentului de torsiune M_x este redată în figura 7.19,*b*.
Forțele F_{1y} şi F_{2y} se determină astfel:

$$F_{1y} = T_1 = \frac{M_x}{R_1} = \frac{668{,}5 \cdot 10^3}{300} = 2228{,}33 \text{ N};$$

$$F_{2y} = T_2 = \frac{M_x}{R_2} = \frac{668{,}5 \cdot 10^3}{200} = 3342{,}5\ \text{N}.$$

Cu aceste valori s-a trasat diagrama momentului de încovoiere M_z în figura 7.19, *b*.

Între cele două roți, arborele fiind solicitat la încovoiere cu torsiune, calculul de proiectare se face cu relația (7.32) în care:

$$K_{T\tau} = \sqrt{1 + \left(\frac{M_x}{M_i^{\max}}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{668{,}5}{445{,}67}\right)^2} = 1{,}803\ ,$$

deoarece momentul de încovoiere maxim este în secțiunea *A* şi are valoarea:

$$M_i^A = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{445{,}67^2 + 0} = 445{,}67\ \text{Nm} = M_i^{\max}.$$

Rezultă:

$$W_i^{\text{nec}} = \frac{M_i^{\max}}{\sigma_a} K_{T\tau} = \frac{445{,}67 \cdot 10^3}{80} \cdot 1{,}803 = 10{,}044 \cdot 10^3\ \text{mm}^3.$$

Deoarece secțiunea arborelui este circulară $W_i^{\dim} = \dfrac{\pi d^3}{32}$ şi deci;

$$d = \sqrt[3]{\frac{10{,}044 \cdot 10^3 \cdot 32}{\pi}} = 46{,}77\ \text{mm}.$$

Se adoptă $d = 47$ mm şi se verifică exactitatea calculelor:

$$\sigma_{\max}^{\text{ef}} = \frac{445{,}67 \cdot 10^3 \cdot 32}{\pi \cdot 47^3} \cdot 1{,}803 = 78{,}8\ \text{N/mm}^2 < \sigma_a.$$

Verificarea condiției de rigiditate la torsiune se face cu relația (3.114):

$$\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)_{\max} = \frac{M_x}{GI_p} = \frac{668{,}5 \cdot 10^3}{(8{,}077 \cdot 10^4)\left(\dfrac{\pi \cdot 47^4}{32}\right)} = 17{,}28 \cdot 10^{-6}\ \text{rad/mm} >$$

$$> \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)_a = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{10^3} = 5{,}82 \cdot 10^{-6}\ \text{rad/mm}.$$

Deoarece condiția de rigiditate nu este îndeplinită, dimensionarea se face cu relația (7.33):

$$I_p^{\text{nec}} = \frac{668{,}5 \cdot 10^3}{(8{,}077 \cdot 10^4)(5{,}82 \cdot 10^{-6})} = 1{,}4421 \cdot 10^6 = \frac{\pi d^4}{32} \Rightarrow d = \sqrt[4]{\frac{1{,}4421 \cdot 10^6 \cdot 32}{\pi}} = 61{,}7\ \text{mm}$$

Se adoptă $d = 62$ mm.

P.7.7. Arborele din figura 7.20 transmite puterea P = 30 kW la turația n = 250 rot/min. Raportul eforturilor din ramura conducătoare şi ramura condusă a fiecărei curele de transmisie este 2. Razele roților sunt: R_1 = 400 mm, R_2 = 500 mm. Să se dimensioneze arborele cu secțiune circulară după T_τ (σ_a = 70 N/mm^2).

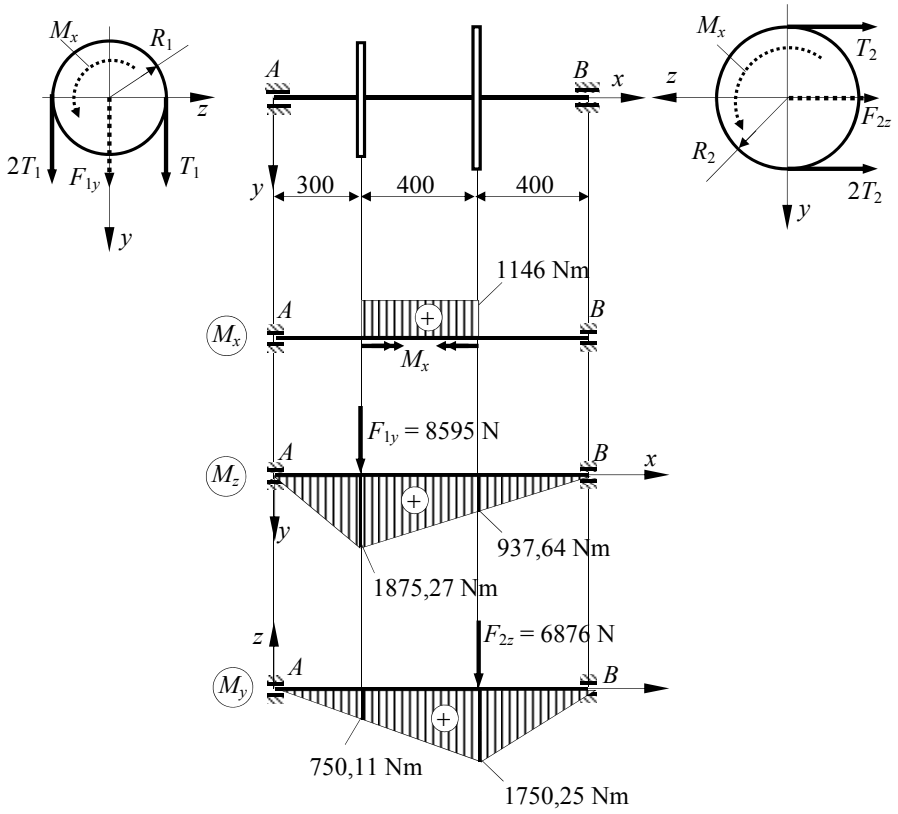


Fig. 7.20

Momentul de torsiune transmis de arbore este:

$$M_x = 9{,}55 \cdot 10^3 \frac{P}{n} = 9{,}55 \cdot 10^3 \frac{30}{250} = 1146\,\text{Nm},$$

şi el se manifestă pe porțiunea cuprinsă între cele două roți (fig. 7.20)

Reducând, în axa arborelui, eforturile din ramurile curelelor, se obțin forțele (fig. 7.20):

$$F_{1y} = 3T_1 = 3\frac{M_x}{R_1} = 3 \cdot \frac{1146 \cdot 10^3}{400} = 8595\,\text{N};$$

$$F_{2z} = 3T_2 = 3\frac{M_x}{R_2} = 3 \cdot \frac{1146 \cdot 10^3}{500} = 6876\,\text{N};$$

deoarece între eforturile din ramurile curelelor şi momentul M_x existe egalităţile:

$$M_x = 2T_1R_1 - T_1R_1 = T_1R_1;$$
$$M_x = 2T_2R_2 - T_2R_2 = T_2R_2.$$

Cele două forţe acţionând în plane diferite vor produce momente de încovoiere atât în planul cu normala z (M_z), cât şi în planul cu normala y (M_y). Pe baza diagramelor de eforturi (fig. 7.20) se stabileşte secţiunea în care momentul total de încovoiere este maxim:

$$M_i^1 = \sqrt{1875{,}27^2 + 750{,}11^2} = 2019{,}73 \text{ Nm};$$

$$M_i^2 = \sqrt{937{,}64^2 + 1750{,}25^2} = 1985{,}58 \text{ Nm}.$$

Secţiunea periculoasă este în dreptul roţii 1 deoarece în această secţiune atât momentul încovoietor cât şi momentul de torsiune au valorile maxime.

Deoarece pe tronsonul dintre cele două roţi arborele este solicitat la încovoiere cu torsiune, calculul de proiectare se face cu relaţia (7.32) în care:

$$K_{T\tau} = \sqrt{1 + \left(\frac{M_x}{M_i^{\max}}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{1146}{2019{,}73}\right)^2} = 1{,}1497 .$$

Rezultă:

$$W_i^{\text{nec}} = \frac{M_i^{\max}}{\sigma_a} K_{T\tau} = \frac{2019{,}73 \cdot 10^3}{70} \cdot 1{,}1497 = 33{,}174 \cdot 10^3 \text{ mm}^3.$$

Secţiunea arborelui fiind circulară $W_i^{\dim} = \dfrac{\pi d^3}{32}$ şi deci;

$$d = \sqrt[3]{\frac{33{,}174 \cdot 10^3 \cdot 32}{\pi}} = 69{,}65 \text{ mm}.$$

Se adoptă $d = 70$ mm şi se verifică exactitatea calculelor:

$$\sigma_{\max}^{\text{ef}} = \frac{2019{,}73 \cdot 10^3 \cdot 32}{\pi \cdot 70^3} \cdot 1{,}1497 = 68{,}95 \text{ N/mm}^2 < \sigma_a.$$

Probleme suplimentare

P.7.8. Un stâlp de fontă de înălţime mică, având secţiunea pătrată, este solicitat de două forţe concentrate ca în figura 7.21. Cunoscând valorile tensiunilor admisibile ale fontei $\sigma_a^{\text{int}} = 45$ N/mm^2 şi $\sigma_a^{com} = 120$ N/mm^2, să se dimensioneze acest stâlp.

P.7.9. O consola de lungime $l = 2$m este solicitată în capătul liber de două forţe transversale F şi de o forţă axială $5F$ ca în figura 7.22. Ştiind ca secţiunea barei este un profil I 30 şi că materialul din care este confecţionată are tensiunea admisibilă $\sigma_a = 150$ N\mm^2, să se determine intensitatea maximă a forţei F pe care bara o poate suporta.

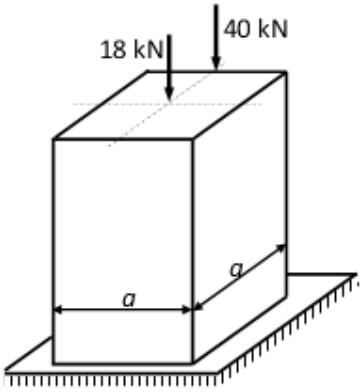


Fig. 7.21.

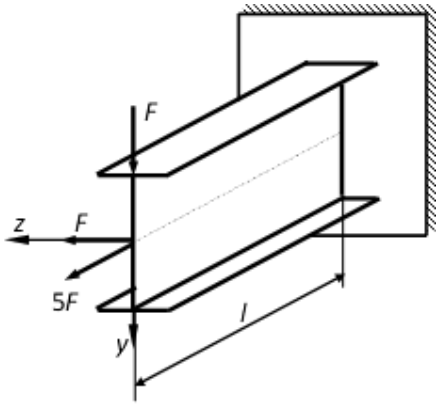


Fig. 7.22.

P.7.10. Pe un arbore sunt montate două roți de curea. Raportul eforturilor din ramura conducătoare şi ramura condusă a fiecărei curele de transmisie este indicat în figura 7. 23. Să se dimensioneze arborele după T_τ, dacă transmite puterea P = 46 kW la o turație de 420 rot/min, iar σ_a = 80 N\mm^2.

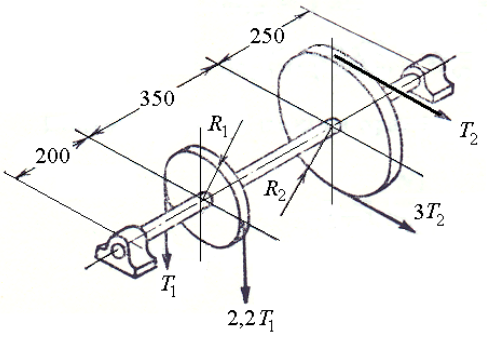


Fig. 7.23.

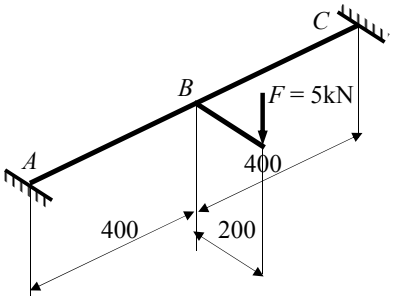


Fig. 7.24.

P.7.11. Sistemul de bare din figura 7. 24, încastrat în *A* şi *C*, este acționat de forța *F* = 5kN. Să se dimensioneze bara *ABC* ştiind că are secțiune circulară (σ_a = 100 N\mm^2).

8. FLAMBAJUL BARELOR DREPTE

S-a arătat până acum că în teoria de ordinul I sau teoria lineară a structurilor, bazată pe ipoteza micilor deplasări şi legea lui Hooke, ecuaţiile de echilibru static se scriu pe forma nedeformată a structurii, fapt ce permite aplicarea principiului suprapunerii efectelor ca o consecinţă a dependenţei liniare dintre tensiuni şi deplasările provocate de solicitări.

Forma deformată a unei structuri sub sarcinile exterioare este denumită *forma de echilibru elastic*.

Flambajul (pierderea de stabilitate) constituie trecerea formei deformate a unei structuri dintr-o poziţie de echilibru stabil într-o poziţie de echilibru instabil. Astfel o bară poate trece într-o poziţie de echilibru instabil daca forţa P este mai mare decât o valoare P_{cr} (fig. 8.1). Sarcina la care se produce această trecere se numeşte *sarcină critică* (*sarcină de flambaj*)

Pentru a analiza natura echilibrului formei deformate a unei structuri trebuie cercetată comportarea acesteia la deformări vecine formei de echilibru elastic. Acest fapt implică necesitatea scrierii ecuaţiilor de echilibru pe forma deformată ceea are drept consecinţă imposibilitatea aplicării principiului suprapunerii efectelor.

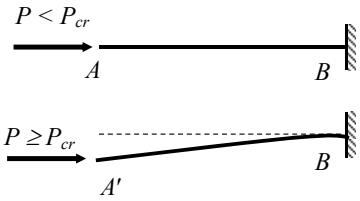


Fig. 8.1.

Deoarece calculul tensiunilor şi deplasărilor se face prin scrierea ecuaţiilor de echilibru pe forma deformată a sistemului, acest calcul este un *calcul neliniar* (calcul în teoria de ordinul II).

Flambajul barei drepte sub acţiunea unei forţe axiale de compresiune se numeşte *flambaj pur*. In această situaţie trebuie calculată forţa maximă $P_{\max}$ care faţă de forţa critică P_{cr} să conducă la un coeficient de flambaj:

$$c_f = \frac{P_{cr}}{P_{\max}} > 1 . \tag{8.1}$$

Mărimea coeficientul de siguranță la flambaj c_f se stabileşte prin standarde în funcție de condițiile de exploatare, materialul folosit şi importanța pieselor care prezintă riscul de pierdere a stabilității.

8.1. FLAMBAJUL BAREI DREPTE SOLICITATE LA COMPRESIUNE

Se consideră bara *AB* din figura 8.2, *a* articulată în *A* şi simplu rezemată în *B*, solicitată la o forță axială de compresiune *P*. Dacă forța $P = P_{cr}$ atunci bara îşi pierde stabilitatea şi trece în poziția deformată prezentată în figura 8.2, *b*. Această formă deformată este descrisă de ecuația fibrei medii deformate:

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{M}{EI} \tag{8.2}$$

în care *v* reprezintă săgeata din secțiunea curentă *i*; *M* – momentul încovoietor din secțiunea *i*; *E* – modulul de elasticitate lungitudinal al materialului barei; *I* -

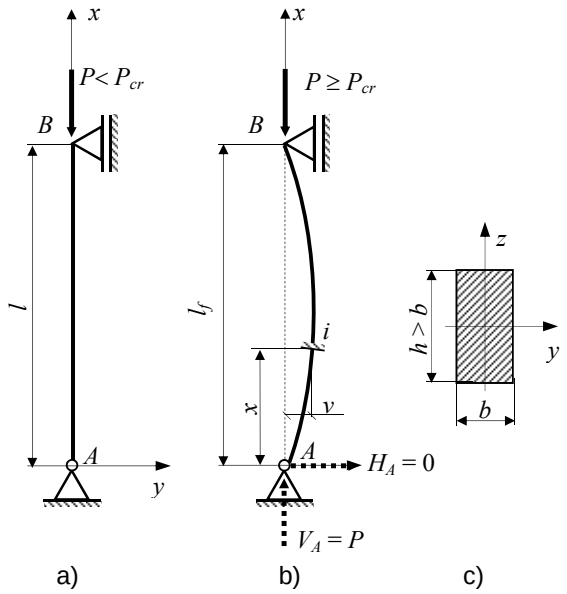


Fig. 8.2.

momentul de inerţie al secţiunii barei în raport cu o axă perpendiculară pe planul în care bara s-a deformat (în cazul studiat I_z – de fapt flambajul poartă numele acestei axe).

In secţiunea *i*, reducând forţele din urmă pe forma deformată (fig. 8.2, *b*) se poate constata ca momentul încovoietor *M* are valoarea:

$$M = P \cdot v \,. \tag{8.3}$$

Dacă se înlocuieşte valoarea lui *M* dată de (8.3) în relaţia (8.2) şi se notează

$$k^2 = \frac{P}{EI}\,, \tag{8.4}$$

aceasta devine:

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} + k^2 v = 0\,. \tag{8.5}$$

Soluţia ecuaţiei diferenţiale de ordinul doi omogenă (5.5) este:

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx\,. \tag{8.6}$$

Funcţia $v(x)$, care reprezintă forma deformată de flambaj, trebuie să satisfacă condiţiile: pentru $x = 0$, $v = 0$ şi pentru $x = l$, $v = 0$. Din prima condiţie rezultă $C_2 = 0$, iar din a doua $C_1 \sin kl = 0$, care conduce la :

$$\sin kl = 0, \tag{8.7}$$

Soluţia $C_1 = 0$ nu convine deoarece în acest caz bara nu ar prezenta forma deformată.

Ecuaţia (8.7) poartă numele de ecuaţie de stabilitate şi are soluţiile:

$$kl = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ ...,\ n\pi. \tag{8.8}$$

Soluţia $kl = 0$ se va elimina deoarece ea conduce la situaţia $P = 0$ în baza relaţiei (8.4). Celelalte soluţii conduc la următoarele valori ale forţei *P* la care se produce flambajul barei studiate:

$$P_{1f} = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 EI;\quad P_{1f} = \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 EI;\ \ ...\ ;\ P_{1f} = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 EI\,. \tag{8.9}$$

Pe baza acestor valori se obţin deformatele proprii de flambaj:

$$v_1 = C_{11} \sin\frac{\pi}{l}x\,;\ \ v_2 = C_{12} \sin\frac{2\pi}{l}x\,;\ ...\ ;\ v_n = C_{1n} \sin\frac{n\pi}{l}x\,. \tag{8.10}$$

care sunt sinusoide cu una, două sau *n* semiunde. Aceste deformate care depind de un parametru C_{1i} nedeterminat, constituie forme de echilibru indiferent.

Dacă se defineşte lungimea dintre două puncte succesive de inflexiune ale formei deformate de flambaj, ca lungime de flambaj l_f, atunci totalitatea sarcinilor de flambaj (8.9) se exprimă prin formula generală:

$$P_f = \frac{\pi^2 EI}{l_f^2} \tag{8.11}$$

în care l_f ia valorile: $l_{1f} = l$; $l_{2f} = \frac{l}{2}$; ... ; $l_{2f} = \frac{l}{n}$.

Din mulțimea de forțe de flambaj ne interesează forța cu valoarea cea mai mică. Aceasta se obține atunci când numitorul fracției (8.11) are valoarea cea mai mare, adică forța minimă corespunde lungimii maxime de flambaj.

Dacă se considera că bara are legături identice în planele principale de inerție, atunci flambajul se va produce după direcția principală de inerție după care momentul de inerție principal este minim (în cazul considerat după axa O_z, fig. 8.2, *c*). Rezultă că forța critică la care bara studiată flambează este:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l_f^2}. \tag{8.12}$$

Relația (8.12) este denumită *formula lui Euler*.

8.1.1. Lungimi de flambaj

Deoarece deformata de flambaj este o sinusoidă lungimile de flambaj corespunzătoare unor bare ce prezintă legături ideale se pot determina astfel: pe o sinusoidă indefinită se plasează forma deformată de flambaj a barei, compatibilă cu legăturile reale ale acesteia; distanța dintre două puncte succesive de inflexiune reprezintă lungimea de flambaj. Astfel, la cazul *b*) din figura 8.3, ştiind că punctul B' este un punct de inflexiune, se duce simetricul C' şi lungimea semiundei $C'AB'$ reprezintă lungimea de flambaj $l_f = 2l$ a consolei AB. În cazul din *d*) din figura 8.3, se observă că punctele C, D de inflexiune ale deformatei de flambaj, sunt extremitățile unei semiunde şi determină lungimea de flambaj $l_f = 0{,}5l$.

În cazul *e*) din figura 8.3, în care încastrarea B se poate deplasa liber pe orizontală, deformata posibilă este AB', iar semiunda sinusoidei de flambaj porțiunea $C'AD'$; rezultă $l_f = l$.

Lungimea de flambaj pentru cazul *c*) (fig. 8.3) este $l_f = 0{,}7l$ şi s-a determinat folosind ecuația fibrei medii deformate a barei comprimate şi încovoiate.

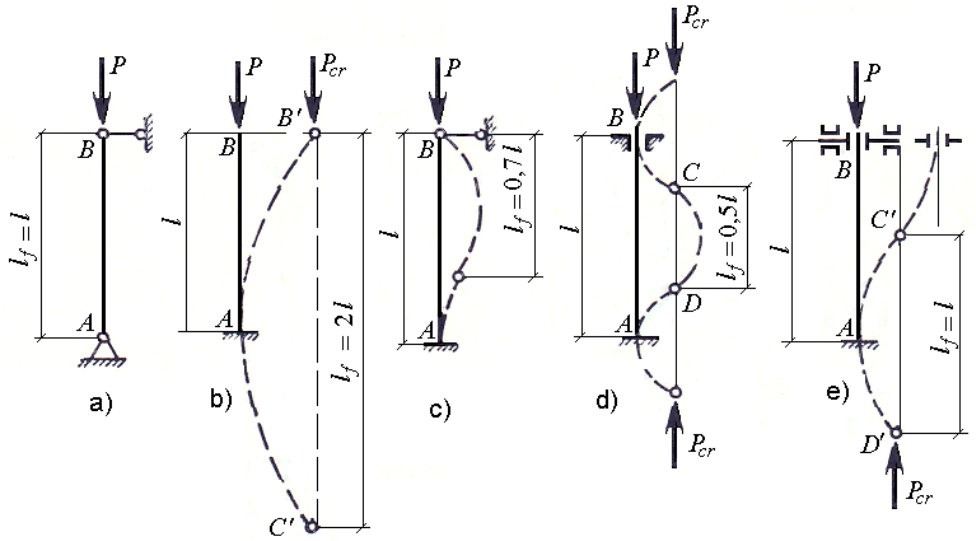


Fig. 8.3.

8.1.2. Limita de valabilitate a formulei lui Euler

Existența lui E în relația (8.12) presupune utilizarea legii lui Hooke $\sigma = E\varepsilon$, ceea ce arată că formula lui Euler este valabilă numai în domeniul deformațiilor elastice ale materialului barei.

Deoarece bara este supusă la compresiune, într-un punct din interiorul său, în situația critică, se dezvoltă tensiunea:

$$\sigma_{cr,f} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{l_f^2 A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \tag{8.13}$$

unde:

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{\min}} \tag{8.14}$$

reprezintă *coeficientul de zveltețe* (sau *coeficientul de subțirime*) al barei, iar $i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$ este raza de girație (de inerție) minimă a secțiunii barei după axa față de care care flambează bara.

Relația între σ_f şi λ, reprezentată de formula (8.13), este o hiperbolă, *numită hiperbola lui Euler*, redată în figura 8.4. Pe această curbă se poate marca punctul B, având ca ordonată limita de proporționalitate σ_p. Deoarece, aşa cum s-a arătat,

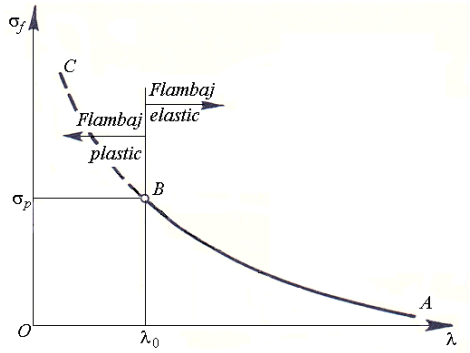


Fig. 8.4.

formula (8.13) s-a stabilit pe baza unor relaţii care admit legea lui Hooke, înseamnă că ea este valabilă cât timp $\sigma_{cr,f} \leq \sigma_p$, respectiv $\lambda \geq \lambda_0$. Pentru $\lambda < \lambda_0$, adică $\sigma_{cr,f} > \sigma_p$, în bară se produc defor-maţii plastice, ceea ce face ca formula lui Euler să nu mai fie valabilă.

În consecinţă punctul *B*, respectiv abscisa λ_0, împarte domeniul de variaţie al lui λ în două părţi:

– zona flambajului elastic, când $\sigma_{cr,f} \leq \sigma_p$, respectiv $\lambda \geq \lambda_0$;

– zona flambajului plastic, când $\lambda < \lambda_0$, adică $\sigma_{cr,f} > \sigma_p$.

Limita de valabilitate este impusă de condiţia ca deformarea barei să se producă în domeniul deformaţiilor elastice, adică:

$$\sigma_{cr,f} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_0^2} \leq \sigma_p \Rightarrow \lambda_0 \geq \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} \tag{8.15}$$

unde σ_p este limita de proporţionalitate a materialului, iar λ_0 o caracteristică elastică a materialului.

Pentru materialele mai des utilizate λ_0 are următoarele valori:

- oţel de construcţii (S235): $\lambda_0 = 105$;
- lemn: $\lambda_0 = 100$;
- fontă: $\lambda_0 = 80$;
- oţeluri superioare $\lambda_0 = 80 \ldots 100$.

8.1.3. Flambajul barei drepte comprimate în domeniul deformaţiilor permanente

În cazul barelor mai puţin zvelte, dublarea formei de echilibru, în situaţia critică, se produce cu apariţia deformaţiilor permanente în fibrele de la intradosul barei, restul fibrelor urmând a se deforma elastic (fig. 8.5).

În cazul materialelor tenace, cu cât λ scade, palstificarea cuprinde majoritatea până la totalitatea fibrelor barei. Rezultă că în cazul materialelor tenace pentru $\lambda \geq \lambda_0$ toate fibrele barei se deformează elastic, pentru $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_0)$ bara flambează

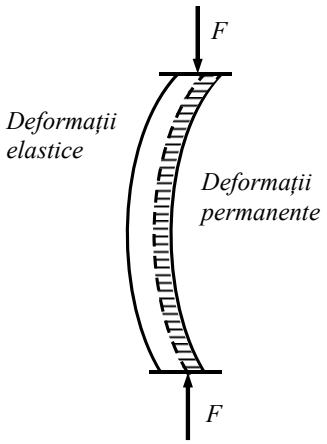


Fig. 8.5.

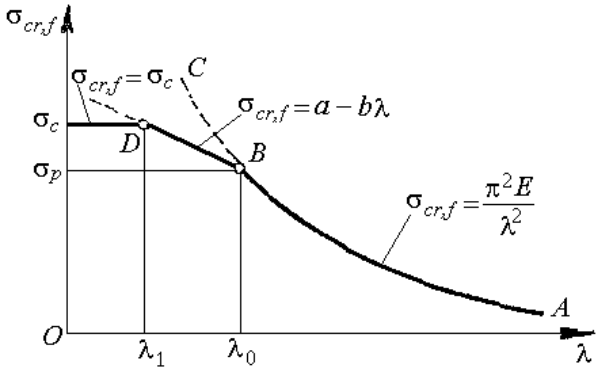


Fig. 8.6.

în domeniul elasto-plastic, iar pentru $\lambda < \lambda_1$ bara cedează prin pierderea capacității de rezistență.

Determinarea funcției $\sigma_{cr,f} = f(\lambda)$ în domeniul deformațiilor permanente a fost făcută, pe cale empirică utilizând rezultatele unor serii de experiențe, de către Tetmajer şi Iasinski, care au propus o relație de forma:

$$\sigma_{cr,f} = a - b\lambda . \tag{8.16}$$

unde a, b sunt constante determinate experimental.

Relația (8.16) este valabilă pentru oțeluri şi lemn în domeniul (λ_1, λ_0), λ_1 fiind determinat, de asemenea experimental.

Tabelul 8.1.

Materialul	a	b	λ_1	λ_0
S235 (R_e = 240 N/mm^2)	304	1,12	60	105
Oțel R_m = 480 N/mm^2; R_e = 310 N/mm^2	460	2,57	60	100
Oțel R_m = 520 N/mm^2; R_e = 360 N/mm^2	577	3,74	60	100
Oțel cu 5% nichel	461	2,25	0	86
Oțel crom-molibden	980	5,30	0	55
Duraluminiu	372	2,14	0	50
Lemn	28,7	0,19	0	100

Tabelul 8.2.

Piesa		c_f
Tija pistonului	Maşini cu un cilindru	8 – 12
	Maşini cu un cilindru şi contratijă: maşini cu doi cilindrii	4 – 8
Biela	Maşini termice mari	14 – 28
	Motoare de automobil	4 – 5,5

Când $\lambda < \lambda_1$ atunci $\sigma_{cr,f} = R_{p0,2}$, unde $R_{p0,2}$ reprezintă limita de curgere aparentă a materialului.

În figura 8.6 este redată variația $\sigma_{cr,f} = f(\lambda)$ pentru materiale tenace, pe cele trei domenii, graficul din această figură purtând numele de *diagrama caracteristică la flambaj*, pe baza căreia se efectuează calculul practic la flambaj.

Coeficienții *a* şi *b* variază de la un material la altul; câteva din valorile lor, ca şi limitele λ_0, λ_1 sunt date în tabelul 8.1.

Pentru fontă se foloseşte o variație parabolică

$$\sigma_{cr,f} = 776 - 12\lambda + 0{,}053\lambda^2 \tag{8.17}$$

valabilă pentru $\lambda \in [0,80]$.

8.2. CALCULUL PRACTIC LA FLAMBAJ

Problemele deosebite apar în cazul în care se face dimensionarea deoarece nu se cunosc dimensiunile secțiunii şi deci nu se poate determina λ.

În acest caz se pleacă de la ipoteza că flambajul se produce în domeniul deformațiilor elastice şi deci, se poate folosi relația lui Euler pentru dimensionare:

$$I_{\min}^{nec} = \frac{P \cdot c_{fe} \cdot l_f^2}{\pi^2 E} = I_{\min}^{\dim} \tag{8.18}$$

în care c_f este coeficientul de siguranță la flambaj care, pentru construcții metalice (structuri de hale industriale, clădiri, macarale etc.) se cu o variație liniară:

$$c_f = 1{,}6 + 0{,}0066\lambda\,, \tag{8.19}$$

în domeniul $\lambda \in (0,\lambda_0)$ şi cu o valoare constantă c_{fe}= 2,3 pentru $\lambda > \lambda_0$.

Pentru piese de maşini valorile extreme ce sunt indicate sunt: minimum $c_f = 4$ şi maximum $c_f = 28$. În tabelul 8.2. sunt indicate câteva valori recomandate pentru tije de piston şi biele, conform tratatelor de organe de maşini.

Odată cunoscute dimensiunile secţiunii se calculează λ şi se compară cu λ_0, respectiv λ_1 pentru a se constata în ce domeniu se produce flambajul:

– dacă $\lambda \le \lambda_0$ atunci rezultă că dimensionarea făcută cu relaţia (8.18) este corectă;

– dacă $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_0)$ atunci se calculează $\sigma_{cr,f}$ cu relaţia (8.16) şi c_f cu relaţia (8.19); apoi se determină: $\sigma = \dfrac{P}{A_{ef}}$ şi se compară cu rezistenţa admisibilă la flambaj calculată cu relaţia:

$$\sigma_{a,f} = \frac{\sigma_{cr,f}}{c_f}; \tag{8.20}$$

daca $\sigma \le \sigma_{a,f}$ atunci dimensiunile secţiunii sunt bune, dacă nu, se măreşte secţiunea şi se reia calculul;

– dacă $\lambda < \lambda_1$, atunci calculul este identic cu cel precedent numai că $\sigma_{cr,f} = R_e$.

După cum se poate constata, calculul practic la flambaj este în fapt un calcul de verificare pe baza diagramei caracteristice la flambaj.

Metoda prezentată anterior este denumită metoda *coeficientului de siguranţă la flambaj*.

Probleme rezolvate

P.8.1. Să se dimensioneze un stâlp de lungime l = 2 m solicitat la compresiune de o forţă P = 280 kN. Stâlpul, de secţiune inelară (d/D = 0,8), are legături identice în cele două plane: articulaţie la un cap şi încastrare la celălalt (fig. 8.7). El este confecţionat din oţel cu următoarele caracteristici: $\sigma_c = R_e$ = 310 N/mm^2; a = 460 N/mm^2; b = 2,57 N/mm^2; λ_0 = 100; λ_1 = 60, iar coeficientul de siguranţă variază după legea (8.19).

Stâlpul, având aceleaşi legături în cele două plane, lungimile de flambaj vor fi identice şi egale cu $l_f = 0{,}7l$ conform cu figura 8.3, *c*.

Se face întâi o predimensionare cu formula lui Euler:

$$I_{\min}^{nec} = \frac{P \cdot c_{fe} \cdot l_f^2}{\pi^2 E} = \frac{(280 \cdot 10^3)(2{,}26)(0{,}7 \cdot 2000)^2}{\pi^2 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5} = 5{,}98416 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

folosind pentru coeficientul de siguranţă valoarea c_{fe} = 1,6 + 0,0066·100 = 2,26.

Din egalitatea

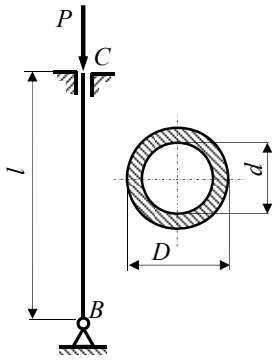


Fig. 8.7.

$$I_{\min}^{nec} = I_{\min}^{\dim} = \frac{\pi D^4}{64}\left[1-\left(\frac{d}{D}\right)^4\right]$$

rezultă:

$$D = \sqrt[4]{\frac{64\cdot 5{,}98416\cdot 10^5}{\pi(1-0{,}8^4)}} = 67{,}4 \text{ mm.}$$

Se adoptă D = 68 mm şi rezultă d = 0,8·68 = 54,5 mm. Se alege d = 54 mm.

Pentru verificarea condiţiei de pierdere a stabilităţii se calculează mai întâi raza de giraţie a secţiunii:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \frac{D}{4}\sqrt{1+\left(\frac{d}{D}\right)^2} = \frac{68}{4}\sqrt{1+\left(\frac{54}{68}\right)^2} = 21{,}71$$

mm

şi pe urmă coeficientul de zveltețe:

$$\lambda = \frac{l_f^2}{i_{\min}} = \frac{0{,}7\cdot 2000}{21{,}71} = 64{,}48\,.$$

Deoarece $\lambda_1 < \lambda = 64{,}48 < \lambda_0 = 100$, tensiunea critică se determină cu relaţia lui Tetmajer-Iasinski,

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda = 460 - 2{,}57\cdot 64{,}48 = 294{,}3 \text{ N/mm}^2.$$

Valoarea coeficientului de siguranţă în acest caz este c_{fe} = 1,6 + 0,0066·64,48 = 2,025, iar tensiunea admisibilă pentru ca flambajul să nu se producă este:

$$\sigma_{af} = \frac{\sigma_{cr}}{c_f} = \frac{294{,}3}{2{,}025} = 145{,}33 \text{ N/mm}^2.$$

Tensiunea de compresiune la care bara este supusă are valoarea:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{280\cdot 10^3}{\frac{\pi\cdot 68^2}{4}\left[1-\left(\frac{54}{68}\right)^2\right]} = 208{,}72 \text{ N/mm}^2.$$

Deoarece $\sigma > \sigma_{af}$, se adoptă D = 70 mm şi d = 56 mm. Cu aceste valori, reluând calculele, se obţine: $i_{\min}$ = 22,41 mm λ = 62,47; σ_{cr} = 299,45 N/mm^2; c_f = 2,012; σ_{af} = 148,81 N/mm^2; σ_f = 202 N/mm^2 > σ_{af}. Întrucât diferenţa este relativ mare, se reface calculul, încercând o secţiune ceva mai mare. Se alege D = 80 mm şi d = 64 mm. Rezultă:

$$i_{\min} = \frac{80}{4}\sqrt{1+\left(\frac{64}{80}\right)^2} = 25{,}61\,\text{mm}; \qquad \lambda = \frac{l_f}{i_{\min}} = \frac{0{,}7\cdot 2000}{25{,}61} = 54{,}67\,.$$

Deoarece $\lambda = 54{,}67 < \lambda_1 = 60$, $\sigma_{cr} = \sigma_c = 310$ N/mm^2. Coeficientul de siguranță are valoarea $c_f = 1{,}6 + 0{,}006654{,}67 = 1{,}96$, şi deci:

$$\sigma_{af} = \frac{310}{1{,}96} = 158{,}2\ \text{N/mm}^2; \quad \sigma = \frac{280\cdot 10^3}{\frac{\pi\cdot 80^2}{4}\left[1-\left(\frac{64}{80}\right)^2\right]} = 154{,}7\ \text{N/mm}^2.$$

Deoarece $\sigma = 154{,}7$ N/mm$^2 < \sigma_{af} = 158{,}2$ N/mm^2, dimensiunile adoptate $D = 80$ mm şi $d = 64$ mm, sunt sigure în ceea ce priveşte flambajul stâlpului. Pentru aceste dimensiuni, solicitarea care ar produce pierderea stabilității, deci sarcina critică, este:

$$P_{cr} = \sigma_{cr}\cdot A_{ef} = 310\cdot\frac{\pi\cdot 80^2}{4}\left[1-\left(\frac{64}{80}\right)^2\right] = 561\,\text{kN}.$$

P.8.2. Să se dimensioneze tija bielei unui motor, secțiunea având forma schematică din figura 8.8, cunoscând următoarele date: diametrul pistonului $d = 120$ mm; presiunea maximă $p_{\max} = 4{,}8$ N/mm^2;lungimea bielei $l = 340$ mm; materialul bielei este oțel cu 5% Ni; coeficientul de siguranță $c_f = 5$.

Se consideră ca biela este articulată la capete în cele două plane *xOy* şi *xOz* şi se face o predimensionare cu formula lui Euler:

$$I_{\min}^{nec} = \frac{P\cdot c_f\cdot l_f^2}{\pi^2 E} = \frac{(54{,}2867\cdot 10^3)(5)(340^2)}{\pi^2\cdot 2{,}1\cdot 10^5} = 15{,}1392\cdot 10^3\ \text{mm}^4,$$

$$P = \frac{\pi d^2}{4}p_{\max} = \frac{\pi\cdot 120^2}{4}\cdot 48 = 54{,}2867\cdot 10^3\ \text{N},$$

$$l_f = l = 340\ \text{mm}.$$

Conform cu figura 8.8, momentul de inerție minim este:

$$I_{\min}^{\dim} = I_y = 2\cdot\frac{(3t)^3 t}{12} + \frac{t^3\cdot 3t}{12} = 4{,}75t^4\,.$$

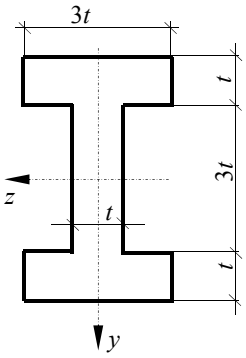


Fig. 8.8.

Din egaliatea:

$$15{,}1392\cdot 10^3 = 4{,}75t^4$$

rezultă:

$$t = \sqrt[4]{\frac{15{,}1392\cdot 10^3}{4{,}75}} = 7{,}51\,\text{mm}$$

Se adoptă $t = 8$ mm şi se calculează:

$$I_{\min} = 4{,}75 \cdot 8^4 = 19456 \text{ mm}^4; \qquad A = 9t^2 = 9 \cdot 8^2 = 576 \text{ mm}^2;$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{19456}{576}} = 5{,}81 \text{ mm}; \quad \lambda = \frac{l_f}{i_{\min}} = \frac{340}{5{,}81} = 58{,}5$$

Se constată că $\lambda = 58{,}5 < \lambda_0 = 86$, corespunzătoare oțelului cu 5% Ni (v. tab. 8.1), fapt pentru care:

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda = 461 - 2{,}25 \cdot 58{,}5 = 329{,}375 \text{ N/mm}^2;$$

Pentru $c_f = 5$, tensiunea admisibila are valoarea:

$$\sigma_{af} = \frac{\sigma_{cr}}{c_f} = \frac{329{,}375}{5} = 65{,}875 \text{ N/mm}^2;$$

care este mai mică decât tensiunea de compresiune din bielă:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{54{,}2876 \cdot 10^3}{576} = 94{,}25 \text{ N/mm}^2,$$

fapt pentru care se majorează valoarea lui t şi se adoptă $t = 10$ mm.

Rezultă:

$$I_{\min} = 4{,}75 \cdot 10^4 \text{ mm}^4; \qquad A = 900 \text{ mm}^2;$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{47500}{900}} = 7{,}265 \text{ mm}; \qquad \lambda = \frac{340}{7{,}265} = 46{,}8;$$

$$\sigma_{cr} = 461 - 2{,}25 \cdot 46{,}8 = 355{,}7 \text{ N/mm}^2;$$

$$\sigma_{af} = \frac{355{,}5}{5} = 71{,}14 \text{ N/mm}^2;$$

$$\sigma = \frac{54{,}2876 \cdot 10^3}{900} = 60{,}32 \text{ N/mm}^2 < \text{saf},$$

În concluzie ultima dimensiune adoptată este bună.

P.8.3. Să se dimensioneze un stâlp ($\sigma_a^{\text{comp}} = 10$ N/mm^2; $E = 0{,}1 \cdot 10^5$ N/mm^2; $c_f = 3{,}2$) cu secțiunea dreptunghiulară bxh şi de lungime $l = 3{,}2$ m. Stâlpul este încastrat la ambele capete, la partea superioară încastrarea fiind deplasabilă pe o direcție (fig. 8.9), şi este solicitat de o forță $P = 240$ kN.

Legăturile stâlpului în planul cu normala z (fig. 8.9, a) implică o lungime de flambaj $l_{fz} = 0{,}5l$, iar legăturile în planul cu normala y (fig. 8.9, b) implică o lungime de flambaj $l_{fz} = l$.

Deoarece, în cele două planuri lungimile de flambaj sunt diferite şi pentru că valoarea tensiunii admisibile la flambaj σ_{af} depinde de coeficientul de zveltețe λ, pentru o dimensionare rațională a secțiunii stâlpului este necesar ca $\lambda_z = \lambda_y$, adică:

$$\frac{l_{fz}}{i_z} = \frac{l_{fy}}{i_y};$$

Secțiunea având dimensiunile b şi h (fig. 8.9) rezultă:

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{hb^3}{12}\cdot\frac{1}{bh}} = \frac{b}{\sqrt{12}}; \qquad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{bh^3}{12}\cdot\frac{1}{bh}} = \frac{h}{\sqrt{12}}$$

Şi deci

$$\frac{0{,}5l}{\frac{b}{\sqrt{12}}} = \frac{l}{\frac{h}{\sqrt{12}}} \Rightarrow h = 2b$$

Daca $h = 2b$ flambajul este la fel de periculos în cele două planuri, şi deoarece, valoarea numerică a lui λ nu este cunoscută este necesară efectuarea unei predimensionări, care se face cu ajutorul formulei lui Euler:

$$I_{\min}^{nec} = \frac{240\cdot 10^3\cdot 3{,}2\cdot(0{,}5\cdot 3200)^2}{\pi^2\cdot 0{,}1\cdot 10^5} = 19{,}92055\cdot 10^6\ \text{mm}^4$$

Având în vedere că $h = 2b$, din egalitatea:

$$I_{\min}^{\dim} = \frac{hb^3}{12} = 19{,}92055\cdot 10^6$$

se obține $b = 104{,}5$ mm.

Se adoptă $b = 105$ mm şi $h = 210$ mm. Rezultă:

$$\lambda = \lambda_z = \lambda_y = \frac{0{,}5l\sqrt{12}}{b} = \frac{0{,}5\cdot 3200\sqrt{12}}{105} = 52{,}79$$

$< \lambda_0 = 100$ (v. tab.8.1).

Se trage concluzia că secțiunea este subdimensionată fapt pentru care se adoptă $b = 120$ mm şi $h = 240$ mm.

Cu valorile $a = 28{,}7$ N/mm^2 şi $b = 0{,}19$ N/mm^2, indicate în tabelul 8.1 pentru lemn, se calculează:

$$\lambda = \frac{0{,}5\cdot 3200\cdot\sqrt{12}}{120} = 46{,}19;$$

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda = 28{,}7 - 0{,}19\cdot 46{,}19 = 19{,}92\ \text{N/mm}^2;$$

$$\sigma_{af} = \frac{\sigma_{cr}}{c_f} = \frac{19{,}92}{3{,}2} = 6{,}22\ \text{N/mm}^2;$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{240\cdot 10^3}{120\cdot 240} = 8{,}33\ \text{N/mm}^2.$$

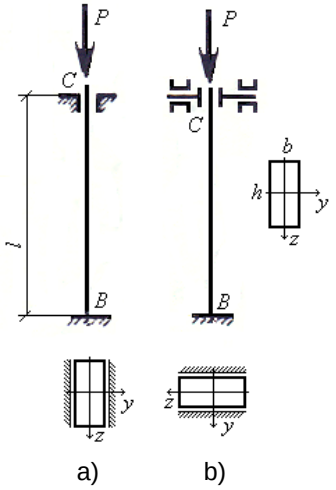


Fig. 8.9.

Deoarece $\sigma = 8{,}33$ N/mm^2 > $\sigma_{af} = 6{,}22$ N/mm^2 se măreşte secțiunea $b = 140$ mm şi $h = 280$ mm şi se reiau calculele. Rezultă:

$$\lambda = \frac{0{,}5 \cdot 3200 \cdot \sqrt{12}}{140} = 39{,}56\ ;$$

$$\sigma_{cr} = 28{,}7 - 0{,}19 \cdot 39{,}56 = 21{,}18\ \text{N/mm}^2;$$

$$\sigma_{af} = \frac{21{,}18}{3{,}2} = 6{,}62\ \text{N/mm}^2;$$

$$\sigma = \frac{240 \cdot 10^3}{140 \cdot 280} = 6{,}12\ \text{N/mm}^2 < \sigma_{af} = 6{,}62\ \text{N/mm}^2.$$

În concluzie stâlpul trebuie să aibă dimensiunile secțiunii 140x280 mm.

P.8.4. Cadrul din figura 8.10, a acționat de forța P = 480 kN după direcția barei AC, are barele DC şi CB de rigiditate foarte mare, astfel încât se pot considera practic, indeformabile. Să se dimensioneze stâlpul cu secțiunea casetată având forma şi poziția precizate în figura 8.10, *a*

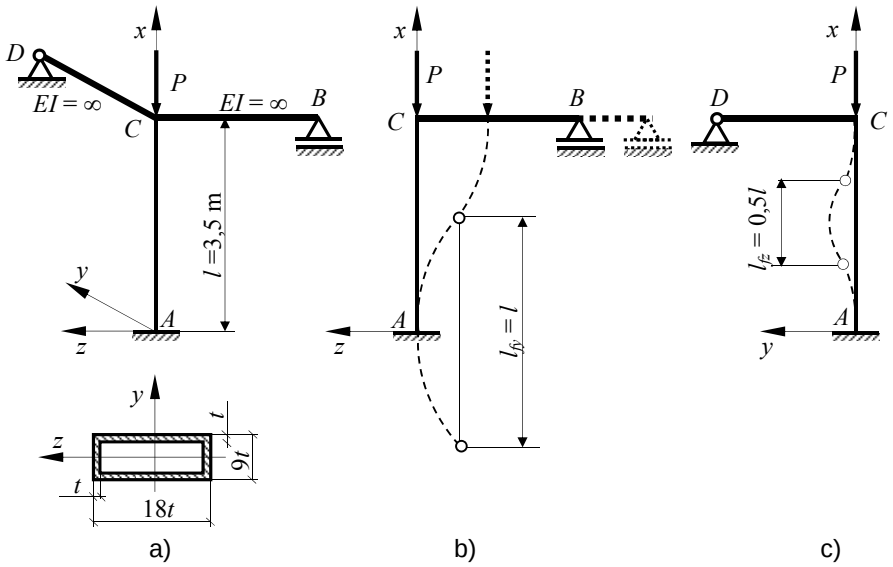


Fig. 8.10.

cunoscând că este confecționat din oțel S235.

În cazul barelor care au legături diferite în planele xOy şi xOz, axele y şi z fiind axe principale de inerție, dimensionarea corectă implică asigurarea la flambaj atât în planul xOy cât şi în planul xOz. Cum flambajul poartă numele normalei la planul în care se produce (în formula lui Euler momentul de inerție al secțiunii este cel în raport cu axa după care este dirijat momentul încovoietor), flambajul în planul xOy este denumit flambaj după z, iar flambajul în planul xOz este denumit flambaj după y.

Deoarece sarcina critică minimă $P_{cr}^{\min}$ corespunde valorii λ = max [λ_y; λ_z], dimensionarea rațională a secțiunii necesită valori cât mai apropiate pentru coeficienții de zveltețe (ideal ar fi ca $\lambda_y = \lambda_z$, așa cum s-a întâmplat în cazul problemei P.8.3). Aceasta se poate realiza orientând secțiunea, atunci când este posibil, astfel încât, axa în raport cu care momentul de inerție este maxim să coincidă cu axa normală la planul în care lungimea de flambaj este maximă.

În cazul nostru în planul *xz*, datorită rigidității infinite a barei *CB* şi reazemului simplu din *B* lungimea de flambaj a stâlpului este $l_{fy} = l$ = 3,5 m (fig. 8.10, *b*), iar în planul *xy*, datorită articulației din *D* şi rigidității infinite a barei *BC* lungimea de flambaj în acest plan este $l_{fz} = 0{,}5l$ = =1,75m (fig. 8.10, *c*).

Deoarece $l_{fy} > l_{fz}$, conform celor precizate anterior, pentru o dimensionarea rațională trebuie ca $I_y > I_z$, condiție îndeplinită de stâlpul *AC* prin poziționarea secțiunii aşa cum este prezentat în figura 8.10, *a*.

Caracteristicile geometrice ale secțiunii sunt:

$$I_y = \frac{(18t)^3(9t)}{12} - \frac{(16t)^3(7t)}{12} = 1984{,}67t^4\,;$$

$$I_z = \frac{(18t)(9t)^3}{12} - \frac{(16t)(7t)^3}{12} = 636{,}17t^4\,;$$

$$A = 18t \cdot 9t - 16t \cdot 7t = 50t^2$$

$$i_z = \sqrt{\frac{1984{,}67t^4}{50t^2}} = 6{,}3t\,; \qquad i_z = \sqrt{\frac{636{,}17t^4}{50t^2}} = 3{,}57t\,.$$

Coeficienții de zveltețe au valorile:

$$\lambda_y = \frac{l_{fy}}{i_y} = \frac{3500}{6{,}3t} = \frac{555{,}55}{t}\,;\ \lambda_z = \frac{l_{fz}}{i_z} = \frac{1750}{3{,}57t} = \frac{490{,}2}{t}\,.$$

Deoarece λ = max[λ_y, λ_z] = λ_y = 555,55/*t* flambajul stâlpului *AC* se produce după axa *y* (în planul *xz*).

Se face o predimensionare cu formula lui Euler, considerând că flambajul se produce în domeniul elastic:

$$I_y^{nec} = \frac{P \cdot c_f \cdot l_{fz}^2}{\pi^2 E} = \frac{480 \cdot 10^3 \cdot 2{,}3 \cdot 3500^2}{\pi^2 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5} = 6{,}525 \cdot 10^6\ \text{mm}^4.$$

Din egalitatea $I_y^{\dim} = I_y^{nec}$ rezultă

$$t = \sqrt[4]{\frac{6{,}525 \cdot 10^6}{1984{,}67}} = 7{,}57\ \text{mm}.$$

Se adoptă *t* = 8 mm şi se calculează coeficientul de zveltețe:

$$\lambda_y = \frac{l_{fy}}{i_y} = \frac{3500}{6{,}3 \cdot 8} = 69{,}44$$

Deoarece λ_y este mai mic decât $\lambda_0 = 105$, dar mai mare decât $\lambda_1 = 60$ (valori corespunzătoare oțelului S235 indicate în tabelul 8.1) tensiunea critică se calculează cu relația (8.16), iar coeficientul de flambaj cu (8.19):

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda = 304 - 1{,}12 \cdot 69{,}44 = 226{,}23 \text{ N/mm}^2;$$

$$c_f = 1{,}6 + 0{,}0066 \cdot 69{,}44 = 2{,}06 .$$

Rezultă

$$\sigma_{af} = \frac{\sigma_{cr}}{c_f} = \frac{226{,}23}{2{,}06} = 109{,}82 \text{ N/mm}^2.$$

Tensiunea de compresiune în stâlp este:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{480 \cdot 10^3}{50 \cdot 8^2} = 150 \text{ N/mm}^2 > \sigma_{af}.$$

Se mărește grosimea pereților secțiunii $t = 9{,}2$ mm şi se face din nou verificarea.
Se calculează:

$$\lambda_z = \frac{3500}{6{,}3 \cdot 9{,}2} = 60{,}39 ;$$

$$\sigma_{cr} = 304 - 1{,}12 \cdot 60{,}39 = 236{,}36 \text{ N/mm}^2;$$

$$c_f = 1{,}6 + 0{,}0066 \cdot 54{,}47 = 1{,}998 ;$$

$$\sigma_{af} = \frac{236{,}36}{1{,}998} = 118{,}3 \text{ N/mm}^2;$$

$$\sigma = \frac{480 \cdot 10^3}{50 \cdot 9{,}2^2} = 113{,}4 \text{ N/mm}^2.$$

Deoarece $\sigma < \sigma_{af}$ rezultă că valoarea adoptată pentru t este corespunzătoare.

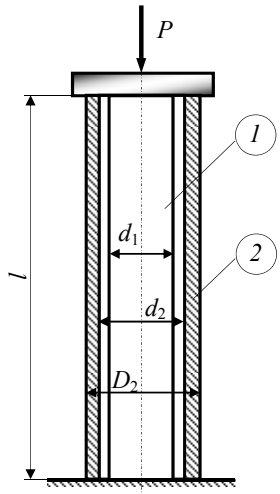


Fig. 8.11.

P.8.5. Un stâlp de înălțime $l = 3{,}4$ m se compune dintr-un cilindru de oțel *1* şi un tub de fontă *2* aşezați concentric (fig. 8.11). Ştiind că $d_1 = 100$ mm, $d_2 = 120$ mm, $D_2 = 150$ mm, $E_1 = 2{,}1 \cdot 10^5$ N/mm^2, $E_2 = 1{,}2 \cdot 10^5$ N/mm^2, $\underline{c_f} = 5$, să se calculeze forța capabilă a stâlpului. Forța P acționează asupra celor două elemente ale stâlpului printr-o placă orizontală foarte rigidă, iar stâlpul se consideră încastrat la capătul de jos.

Pentru cilindrul de oțel caracteristicile geometrice ale secțiunii sunt:

– raza de inerție

$$i_1 = \frac{d_1}{4} = \frac{100}{4} = 25 \text{ mm};$$

– momentul de inerție principal axial al secțiunii cilindrului

$$I_1 = \frac{\pi d_1^4}{64} = \frac{\pi \cdot 100^4}{64} = 4{,}9087 \cdot 10^6 \text{ mm}^4;$$

– aria secțiunii

$$A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{\pi \cdot 100^2}{4} = 7853{,}98 \text{ mm}^2.$$

Coeficientul de zveltețe al cilindrului de oțel este

$$\lambda_1 = \frac{l_{f1}}{i_1} = \frac{2 \cdot 3400}{25} = 272 > \lambda_0 = 105;$$

din care cauză forța capabilă a cilindrului de oțel rezultă din formula lui Euler:

$$P_1 = \frac{\pi^2 E_1 I_1}{c_f l_f^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 4{,}9087 \cdot 10^6}{5 \cdot (2 \cdot 3400)^2} = 44004 \text{ N}.$$

Pentru tubul de fontă caracteristicile geometrice ale secțiunii sunt:
– raza de inerție a tubului de fontă

$$i_2 = \frac{1}{4}\sqrt{D_2^2 + d_1^2} = \frac{1}{4}\sqrt{150^2 + 120^2} = 48{,}02 \text{ mm};$$

– momentul de inerție principal axial al secțiunii

$$I_2 = \frac{\pi D_2^4}{64}\left[1 - \left(\frac{d_2}{D_2}\right)^4\right] = \frac{\pi \cdot 150^4}{64}\left[1 - \left(\frac{120}{150}\right)^4\right] = 14{,}6717 \cdot 10^6 \text{ mm}^4;$$

– aria secțiunii

$$A_2 = \frac{\pi D_2^3}{4}\left[1 - \left(\frac{d_2}{D_2}\right)^2\right] = \frac{\pi \cdot 150^2}{4}\left[1 - \left(\frac{120}{150}\right)^2\right] = 6361{,}72 \text{ mm}^2.$$

Coeficientul de zveltețe al tubului de fontă este

$$\lambda_2 = \frac{l_{f2}}{i_2} = \frac{2 \cdot 3400}{48{,}02} = 141 > \lambda_0 = 80;$$

Deci, forța capabilă a tubului de fontă este:

$$P_2 = \frac{\pi^2 E_2 I_2}{c_f l_f^2} = \frac{\pi^2 \cdot 1{,}2 \cdot 10^5 \cdot 14{,}6717 \cdot 10^6}{5 \cdot (2 \cdot 3400)^2} = 75158 \text{ N}.$$

Forța capabilă a stâlpului rezultă din relația de calcul a sistemelor static nedeterminate la solicitări axiale(v. P.3.10). Eforturile axiale din cilindru de oțel şi tubul de fontă, datorate forței P sunt:

$$N_1 = \frac{P}{1+\dfrac{E_2 A_2}{E_1 A_1}}; \qquad N_2 = \frac{P}{1+\dfrac{E_1 A_1}{E_2 A_2}}.$$

Din condițiile $N_1 = P1$ şi $N_2 = P_2$ rezultă două valori P' şi P'';

$$P' = P_1\left(1+\frac{E_2 A_2}{E_1 A_1}\right) = 44004\left(1+\frac{1{,}2\cdot 10^5\cdot 6361{,}72}{2{,}1\cdot 10^5\cdot 7853{,}98}\right) = 64371\ \text{N};$$

$$P'' = P_1\left(1+\frac{E_1 A_1}{E_2 A_2}\right) = 75158\left(1+\frac{2{,}1\cdot 10^5\cdot 7853{,}98}{1{,}2\cdot 10^5\cdot 6361{,}72}\right) = 237536\ \text{N}.$$

Rezultă că forța capabilă a stâlpului este $P_{cap} = \min[P', P''] = 64371$ N

Probleme suplimentare

P.8.6. Să se calculeze coeficientul de siguranță la flambaj pentru un stâlp de oțel de secțiune inelară D = 120 mm şi d = 100 mm, încastrat la un capăt şi articulat la celălalt, având lungimea l = 2,2 m. Stâlpul este comprimat de forța P = 94 kN. Se dă λ_0 = 105.

P.8.7. Un stâlp metalic de lungime l = 3 m (fig.8.12) este încastrat în A şi rezemat în B numai după direcția y. Să se dimensioneze stâlpul din S235, pentru P = 460 kN.

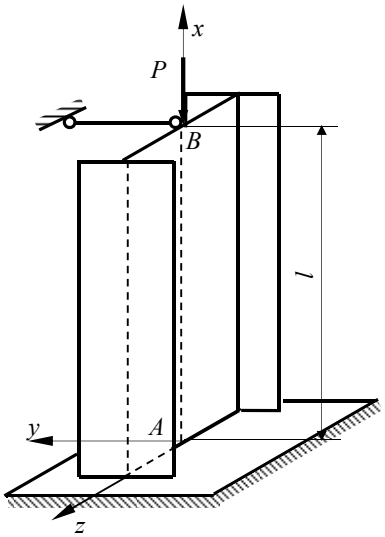


Fig. 8.12.

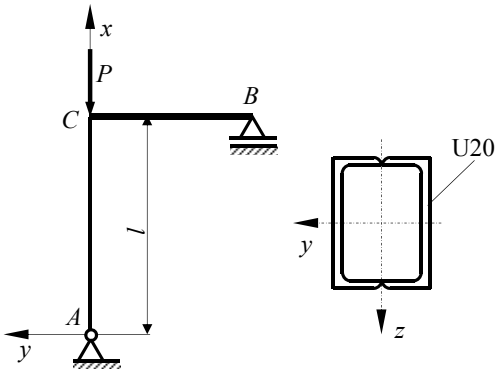


Fig. 8.13.

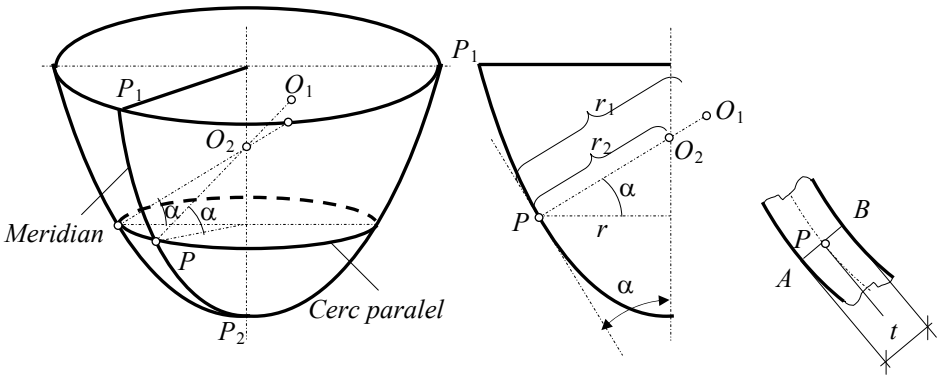
P.8.9. O bară cilindrică cu diametrul d = 100 mm şi lungime l = 6 m este fixată rigid, în plan vertical, între doi pereţi la temperatura $t_1 = 20^oC$. Să se calculeze temperatura limită până la care se poate încălzi uniform bara, fără ca aceasta să flambeze. Se dă coeficientul de dilataţie termică $\alpha = 12{,}5 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1} şi modulul de elasticitate $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ N/mm^2.

P.8.10. Să se dimensioneze un stâlp de lemn de lungime l = 3,2 m şi secţiune pătrată bxb solicitat la compresiune de o forţă P = 120 kN. Stâlpul este încastrat la un capăt şi simplu rezemat la celălalt.

P.8.11. Cadrul din figura 8.13 are bara AC alcătuită din două profile U20 şi bara BC de rigiditate infinită. Ştiind că nodul C nu se poate deplasa în direcţia normalei la planul cadrului (axa z) să se determine forţa critică de flambaj (bara AC este confecţionată din oţel S360).

9. CALCULUL PLĂCILOR SUBŢIRI DE REVOLUŢIE ÎN TEORIA DE MEMBRANĂ

Plăcile subţiri de revoluţie sunt plăci la care suprafaţa mediană se obţine prin rotirea unei curbe plane în jurul unei axe cuprinsă în planul ei. Curba plană se numeşte *curbă meridiană*, planul ei *plan meridian*, iar axa în jurul căreia se roteşte, *axă de revoluţie*. Fiecare punct P al meridianului descrie un cerc de rază r, cu centrul pe axa de revoluţie, denumit *cerc paralel* (fig. 9.1, *a*).



a) b) c)

Fig. 9.1.

Raza de curbură r_1 a meridianului reprezintă distanţa de la punctul P la centrul de curbură O_1 al acestuia, situat pe normala la planul tangent în punctul P la suprafaţa mediană (fig. 9.1, *b*). Intersecţia suprafeţei mediane cu un plan perpendicular pe planul meridian, care conţine normala în punctul P la planul tangent la suprafaţa mediană, reprezintă a doua curbă principală în punctul P al suprafeţei mediane (fig. 9.1, *a*). Raza de curbură a acestei curbe este notată cu r_2 şi reprezintă distanţa de la punctul P la centrul de curbură O_2 situat pe axa de simetrie (revoluţie).

Între raza de curbură r_2 şi raza cercului paralel r există relaţia (fig. 9.1, *b*):

$$r_2 = \frac{r}{\cos\alpha} \tag{9.1}$$

Normalele la planele tangente în fiecare punct P al suprafeţei mediane intersectează placa în punctele A şi B, dispuse simetric faţă de punctul P. Lungimea segmentului AB reprezintă grosimea t a plăcii în punctul P (fig. 9.1, *c*). Placa este de grosime constantă dacă valoarea lui t este aceeaşi în toate punctele suprafeţei mediane. Placa se consideră subţire atunci când raportul t/r_2 poate fi neglijat faţă de unitate.

Modul cel mai simplu de tratare a acestor vase este de a considera că peretele vasului se comportă ca o membrană şi în consecinţă el este solicitat numai la eforturi în planul tangent la suprafaţa mediană. Această ipoteză corespunde studiului vaselor în *teoria de membrană* sau *teoria fără momente*. Condiţia ca un vas de rotaţie cu pereţi subţiri să poată fi calculat în teoria de membrană este ca presiunea din interiorul lui, într-un plan normal pe axa de simetrie, să fie constantă. O astfel de solicitare este dată de forţe de presiune, pe care le exercită un fluid greu sau un material fără coeziune, aflat în interiorul vasului sau pe exteriorul unui vas de revoluţie cu axa verticală sau un gaz sub presiune aflat în interiorul unui vas de revoluţie închis.

Teoria de membrană admite distribuţia uniformă a tensiunilor pe grosimea plăcii. În consecinţă, este suficient să se determine starea de tensiuni din jurul punctului P de pe suprafaţa mediană.

9.1. EFORTURI SECŢIONALE ŞI TENSIUNI

Cu ajutorul a două meridiane şi a două cercuri paralele se izolează un element de înveliş $\mathrm{d}s_1$, $\mathrm{d}s_2$ (fig. 9.2, *a*). Arcul meridian $\mathrm{d}s_1$ are raza de curbură r_1, iar arcul paralel $\mathrm{d}s_2$ are raza de curbură r_2 (fig. 9.2, *b*). Între lungimile elementare ale arcelor şi razele de curbură există relaţiile:

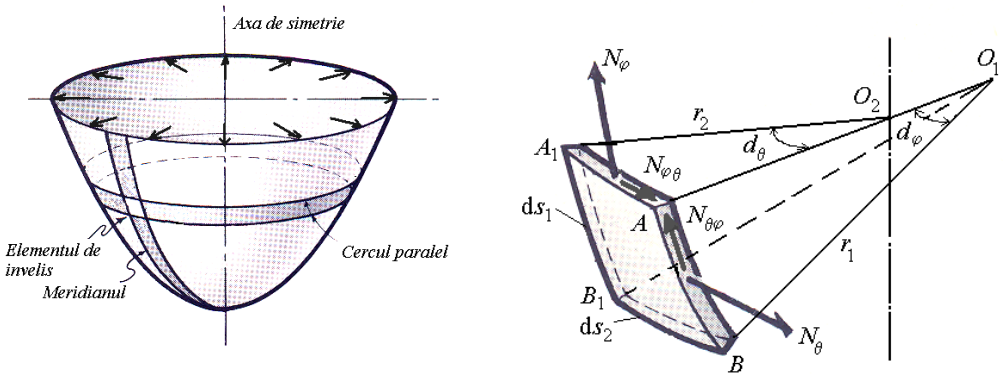
$$\mathrm{d}s_1 = r_1 \mathrm{d}\varphi\,; \qquad \mathrm{d}s_2 = r_2 \mathrm{d}\theta\,. \tag{9.2}$$

Deoarece în teoria de membrană distribuţia tensiunilor pe grosimea t a plăcii se consideră uniformă, eforturile din planele principale (fig. 9.2, *b*), denumite eforturi secţionale se reduc la componentele:

$$N_\varphi = \sigma_\varphi \cdot t\,; \quad N_{\varphi\theta} = \sigma_{\varphi\theta} \cdot t\,; \quad N_\theta = \sigma_\theta \cdot t\,; \quad N_{\theta\varphi} = \sigma_{\theta\varphi} \cdot t \tag{9.3}$$

care se dezvoltă în planul tangent al suprafeţei mediane şi se exprimă în N/m.

Deoarece, în baza dualităţii tensiunilor tangenţiale $\tau_{\varphi\theta} = \tau_{\theta\varphi}$, rezultă că $N_{\varphi\theta} = N_{\theta\varphi}$.



a) b)

Fig. 9.2.

Pe de altă parte, datorită încărcării simetrice faţă de axul de revoluţie, eforturile secţionale $N_{\varphi\theta} = 0$, momentul lor în raport cu axa de revoluţie este nul deoarece forţele exterioare, simetrice faţă de axul de revoluţie, dau moment nul în raport cu acesta. În consecinţă, la învelişurile de rotaţie încărcate simetric apar numai două necunoscute N_φ şi N_θ.

Pentru determinarea lor se izolează elementul infinitezimal $ds_1 ds_2$ (fig. 9.3, *a*). În centrul acestui element s-a reprezentat rezultanta încărcării exterioare de pe elementul respectiv $-p ds_1 ds_2$, iar pe grosimea peretelui, forţele corespunzătoare eforturile secţionale. Datorită simetriei, N_θ este constant, în schimb N_φ creşte odată cu creşterea unghiului φ. Din ecuaţia de proiecţie pe direcţia rezultantei forţelor exterioare $p ds_1 ds_2$ se obţine (fig. 9.3, *b* şi *c*):

$$\left(N_\varphi + N_\varphi + \frac{\partial N_\varphi}{\partial s_1}\right) ds_2 \sin\frac{d\varphi}{2} + 2N_\theta ds_1 \sin\frac{d\theta}{2} - p ds_1 ds_2 = 0\,. \qquad (9.4)$$

Dacă se fac aproximaţiile $\sin\frac{d\varphi}{2} \cong \frac{d\varphi}{2}$, $\sin\frac{d\theta}{2} \cong \frac{d\theta}{2}$, se împarte cu $ds_1 ds_2$ şi se trece la limită $d\varphi \to 0$, ecuaţia (9.4) devine:

$$\frac{N_\varphi}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_2} = p\,. \qquad (9.5)$$

Ecuaţia (9.5) este cunoscută sub numele de ecuaţia lui Laplace. În această ecuaţie p este pozitiv când acţionează în sens opus faţă de centrul de curbură.

Pentru rezolvarea completă a problemei mai este necesară o ecuație de echilibru. Această ecuație se poate obține dacă se folosește ecuația de echilibru general pentru acea parte din înveliș care nu are legături cu terenul.

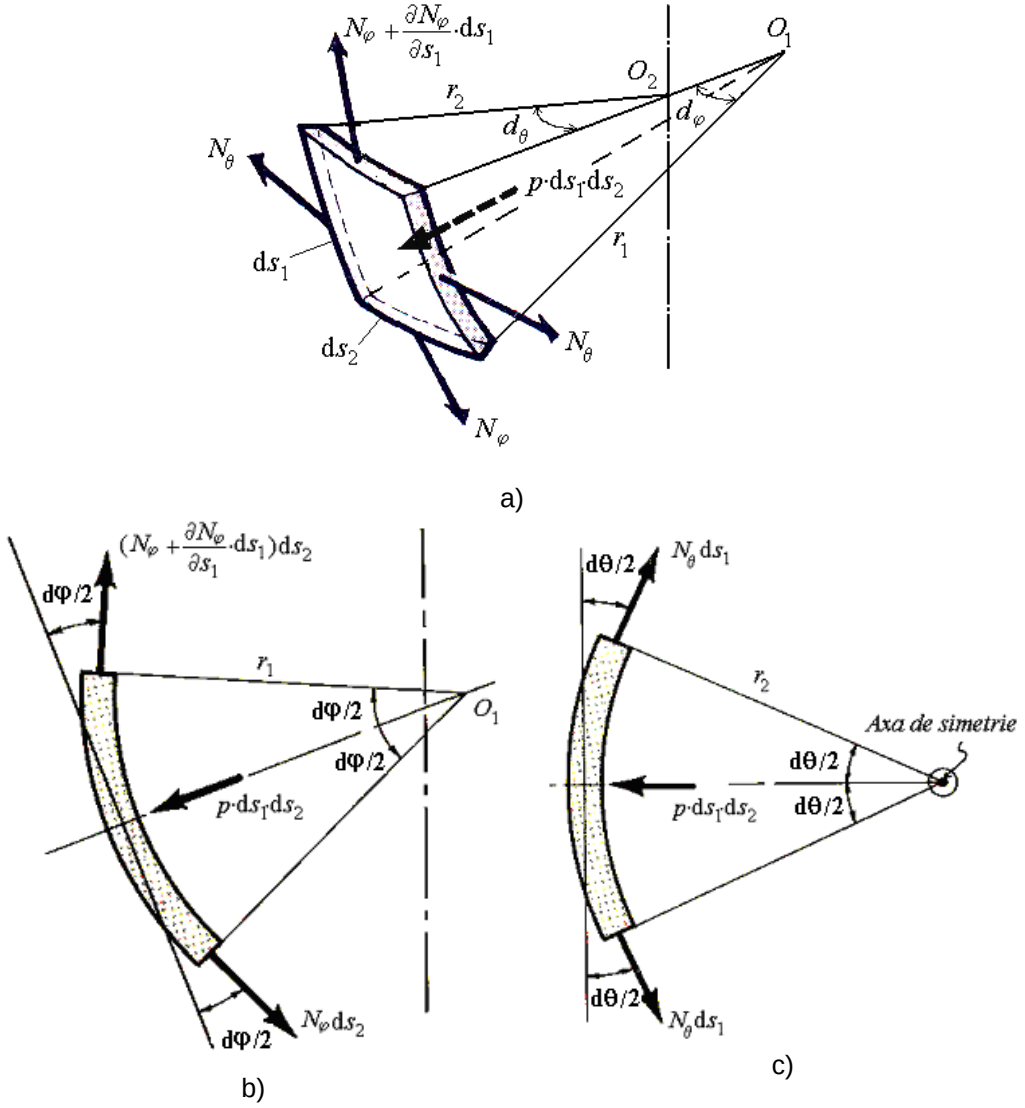
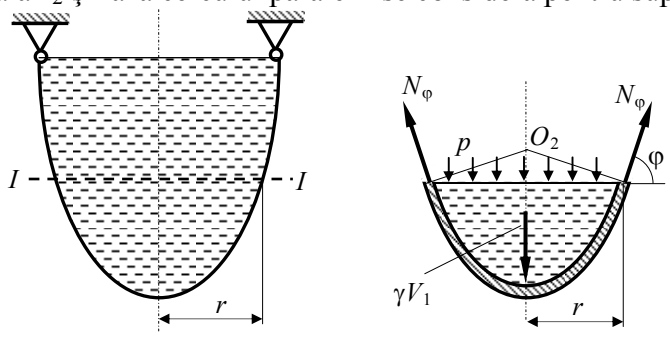


Fig. 9.3.

În acest scop se secționează placa printr-un con cu vârful în O_2 iar, materialul din interiorul vasului, cu un plan care conține cercul paralel pe care se află punctul în care se caută valoarea lui N_φ, de exemplu secțiunea $I-I$ în figura 9.4, *a*. Din cele două parți în care vasul a fost împărțit, se reține partea de jos, adică acea parte care nu are legături cu terenul. Forțele de legătură care trebuie introduse sunt cele

corespunzătoare efortului secţional N_φ şi presiunii p în planul de secţionare (fig. 9.4, *b*). Deoarece grosimea peretelui vasului este mică în raport cu razele învelişului, raza principală r_2 şi raza cercului paralel r se consideră pentru suprafaţa mediană.



a) b)

Fig. 9.4.

Din ecuaţia de proiecţie pe axul de revoluţie a tuturor forţelor ce acţionează pe porţiunea de înveliş reţinut (fig. 9.4, *b*):

$$(N_\varphi \cdot 2\pi r)\cdot \sin\varphi - p\cdot \pi r^2 - \gamma V_1 = 0 \tag{9.6}$$

în care γV_1 reprezintă greutatea lichidului sau gazului din interiorul părţii izolate, se obţine:

$$N_\varphi = \frac{p\cdot \pi r^2 + \gamma V_1}{2\pi r \sin\varphi} \tag{9.7}$$

Se poate reţine şi porţiunea din vas care prezintă legăturile cu terenul dar, în acest caz, trebuie determinate mai întâi forţele de legătură exterioare şi apoi efortul secţional N_φ.

9.2. DIMENSIONAREA ÎNVELIŞULUI

În fiecare punct din peretele vasului se dezvoltă o stare plană de tensiuni ale căror valori se deduc din relaţiile (9.3):

$$\sigma_\varphi = \frac{N_\varphi}{t}; \quad \sigma_\theta = \frac{N_\theta}{t}. \tag{9.8}$$

Pentru dimensionare se aplică una din teoriile de rezistență recomandate. De exemplu în cazul teoriei T_τ, condiția de rezistență este

$$\sigma_{ech} = \max\left[\left|\sigma_\varphi\right|,\ \left|\sigma_\varphi\right|,\ \left|\sigma_\varphi - \sigma_\theta\right|,\right] \le \beta \cdot \sigma_a, \tag{9.9}$$

în care β este un coeficient care ține seama de capacitatea mai mică de rezistență a plăcii în secțiunile de îmbinare dintre tablele din care este confecționat vasul. Dacă placa se realizează din table sudate cap la cap, $\beta \in (0{,}8 \div 0{,}85)$.

Folosind relațiile (9.8) grosimea necesară a peretelui vasului se determină astfel:

– dacă $N_\varphi \cdot N_\theta < 0$,

$$t \ge \frac{\left|N_\varphi\right| + \left|N_\theta\right|}{\beta\sigma_a}; \tag{9.10}$$

– dacă $N_\varphi \cdot N_\theta > 0$, ,

$$t \ge \frac{\max\left[\left|N_\varphi\right|,\ \left|N_\theta\right|\right]}{\beta\sigma_a}. \tag{9.11}$$

La grosimea t a peretelui, rezultată din calculul de rezistență, trebuie să se țină seama de adaosul tehnologic t_t şi adaosul de coroziune t_c care depinde de agresivitatea fluidului conținut în vas.

9.3. CALCULUL INELELOR DE RIGIDIZARE

Pentru ca să fie posibilă starea de echilibru de membrană este necesar ca legăturile să fie după direcția tangentei la meridian pe inelul de sprijin adică suprafața de sprijin să fie normală pe suprafața mediană a plăcii (fig. 9.5, *a*).

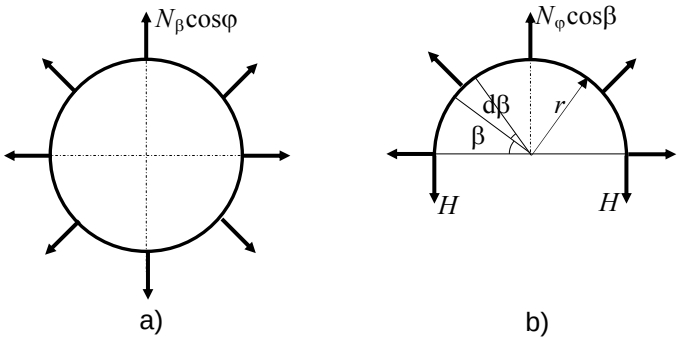


Fig. 9.6.

De obicei suprafaţa de sprijin este orizontală (fig. 9.5, *b*), fapt pentru care efortul secţional se descompune şi apare o solicitare suplimentară datorită componentei $N_\varphi \cdot \cos\varphi$. Această solicitare apare şi în cazul zonelor de racordare a învelişurilor (de exemplu racordarea unei părţi cilindrice cu o calotă sferică prezentată în figura 9.5, *c*). Componenta orizontală $N_\varphi \cdot \cos\beta$ trebuie preluată de un inel numit inel de rigidizare. Neglijând deformaţiile inelului şi ale învelişului se poate calcula efortul axial H din inel, considerând echilibrul unei jumătăţi de inel (fig. 9.6, *b*):

$$2H = \int_0^\pi N_\varphi \cos\beta \cdot r d\alpha \sin\alpha = 2N_\varphi r \cos\beta \tag{9.12}$$

de unde

$$H = N_\varphi \cdot r \cdot \cos\beta \,. \tag{9.13}$$

În cazul vaselor de revoluţie, în zonele de racordare ale învelişurilor (fig. 9.6, *a*) inelele de rigidizare sunt comprimate, verificarea lor făcându-se la flambaj cu relaţia:

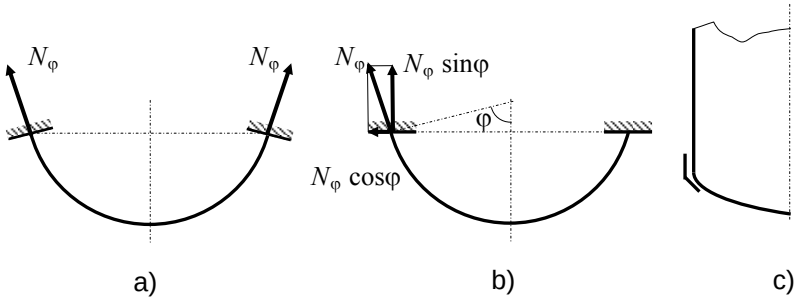


Fig. 9.5.

$$N_i = |Hr| \le N_{af} = \frac{N_{cr}}{c_f} = \frac{3EI}{c_f r^2} \tag{9.14}$$

în care N_i este efortul axial din inel, c_f – coeficientul de siguranță la flambaj, I – momentul de inerție al secțiunii inelului față de axa centrală proprie normală pe planul inelului, E – modulul de elasticitate longitudinal al materialului din care este confecționat inelul.

Calculul exact al tensiunilor ce se dezvoltă în zonele de racordare şi de rezemare ale vaselor subțiri necesită luarea în considerare a momentelor încovoietoare, calculul prezentat mai sus reprezintă un calcul simplificat pentru inelele de rigidizare, el constituind o soluție satisfăcătoare pentru unele cazuri practice.

Probleme rezolvate

P.9.1. Să se determine eforturile secționale în pereții unui vas conic rezemat la partea superioară, de înălțime H şi rază R, plin cu un lichid de greutatea specifică γ (fig. 9.8, *a*).

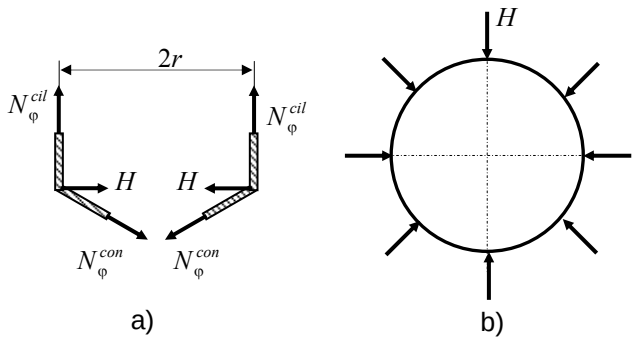


Fig. 9.7.

Deoarece în cazul rezervorului conic meridianul este o linie dreaptă $r_1 = \infty$ şi formula lui Laplace (9.5) ia forma:

$$\frac{N_\theta}{r_2} = p\,,$$

în care $p = \gamma y$ este presiunea la cota y a vasului, iar

$$r = \frac{r}{\cos\alpha} = r\sqrt{1+\tan^2\alpha} = \frac{R}{H}(H-y)\sqrt{1+\left(\frac{R}{H}\right)^2}\,.$$

Rezultă:

$$N_\theta = \gamma\frac{R}{H}y(H-y)\sqrt{1+\left(\frac{R}{H}\right)^2}$$

Se constată că efortul secțional N_θ are o variație parabolică reprezentată în figura 9.8, *c*. Pentru determinarea punctului în care efortul secțional are valoare maximă se derivează expresia lui N_θ şi se egalează cu zero:

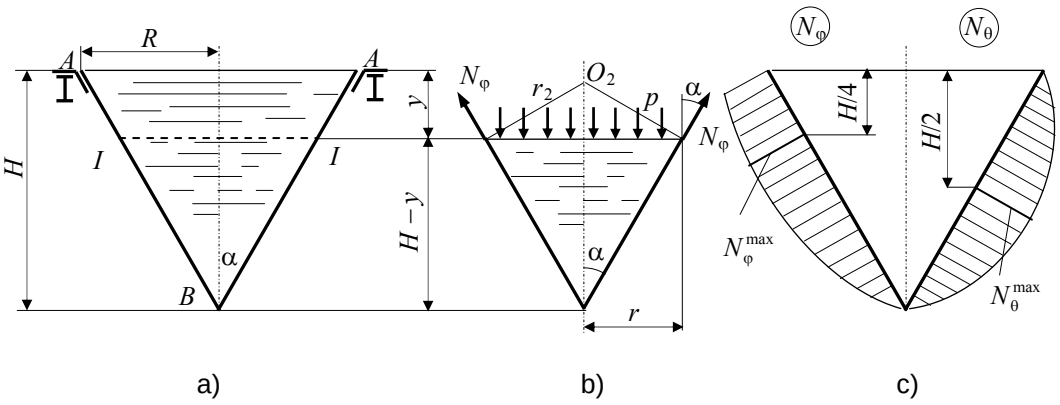


Fig. 9.8.

$$\frac{\mathrm{d}N_\theta}{\mathrm{d}y} = \gamma\frac{R}{H}(H-2y)\sqrt{1+\left(\frac{R}{H}\right)^2} = 0 \Rightarrow y = \frac{H}{2}\,.$$

Valoarea maximă este:

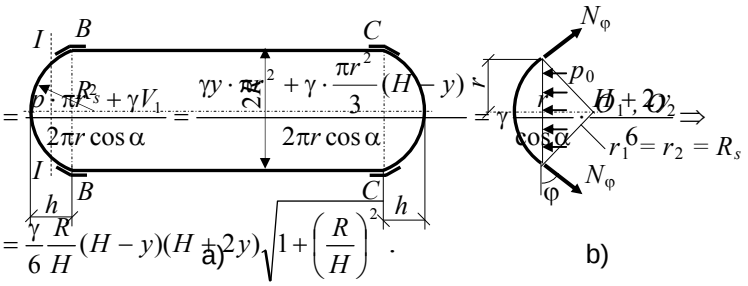
$$N_\theta^{\max} = \frac{1}{4}\gamma RH\sqrt{1+\left(\frac{R}{H}\right)^2}\,.$$

Pentru determinarea lui N_φ la cota y a vasului se face o secțiune $I - I$ şi se izolează partea inferioară (cea care nu prezintă legături cu terenul) (fig. 9.8, *b*). Din ecuația de proiecție pe axa de revoluție:

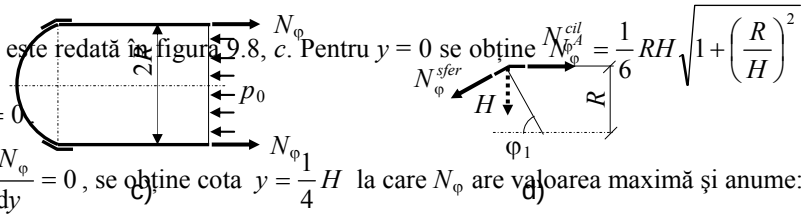
$$N\varphi \cdot 2\pi r \cdot \cos\alpha - p \cdot \pi r^2 - \gamma V_1 = 0 ,$$

rezultă:

$$N_\varphi = \frac{p \cdot \pi r^2 + \gamma V_1}{2\pi r \cos\alpha} = \frac{\gamma y \cdot \pi r^2 + \gamma \cdot \frac{\pi r^2}{3}(H - y)}{2\pi r \cos\alpha} = \frac{\gamma}{6}\frac{R}{H}(H - y)(H + 2y)\sqrt{1 + \left(\frac{R}{H}\right)^2} .$$



Variația lui N_φ este redată în figura 9.8, *c*. Pentru $y = 0$ se obține $N_\varphi^A = \frac{1}{6}RH\sqrt{1 + \left(\frac{R}{H}\right)^2}$, iar pentru $y = H$, $N_\varphi^B = 0$.



Din condiția $\frac{dN_\varphi}{dy} = 0$, se obține cota $y = \frac{1}{4}H$ la care N_φ are valoarea maximă şi anume:

$$N_\varphi^{\max} = \frac{3}{16}\gamma RH\sqrt{1 + \left(\frac{R}{H}\right)^2} .$$

Fig. 9.9.

Se constată că $N_\theta^{\max} > N_\varphi^{\max}$.

În inelul de rezemare apare efortul:

$$N_i = -HR = -\left(N_\varphi^A \cdot \sin\alpha\right)R = -\frac{1}{6}\gamma R^3 .$$

P.9.2. Un recipient pentru depozitarea gazelor lichefiate are raza R = 1 m şi fundurile sub formă de calote sferice de înălțime h = 0,42 m (fig. 9.9, *a*). Presiunea interioară la care sunt depozitate gazele este p_0 = 8 bar. Mantaua rezervorului este confecționată din virole cilindrice în construcție sudată, cu îmbinare cap la cap, iar asamblarea fundurilor la manta se face tot prin sudură. Ştiind că rezistența admisibilă a materialului este σ_a = 120 N/mm^2, iar β = 0,8, să se dimensioneze pereții rezervorului.

În cazul unui înveliş sferic cele două raze de curbură sunt egale cu raza sferei $r_1 = r_2 = R_s$, fapt pentru care formula (9.5) devine:

$$N_\varphi + N_\theta = pR_s,$$

în care $p = p_0 = 8$ bar = 0,8 N/mm^2, iar, din considerente geometrice, (fig. 9.9, *a*)

$$R_s = \frac{R^2 + h^2}{2h} = \frac{1 + 0{,}42^2}{2 \cdot 0{,}42} = 1{,}4 \text{ m}.$$

Pentru determinarea eforturilor secționale mai este necesară o ecuație. Pentru aceasta se efectuează secțiunea $I - I$ prin fundul sferic (fig. 9.9, *a*) şi se proiectează pe axa de simetrie forțele corespunzătoare efortului secțional N_φ şi presiuni p_0 (fig. 9.9, b):

$$(N_\varphi \sin\varphi) \cdot 2\pi r - p_0 \pi r^2 = 0.$$

Rezultă

$$N_\varphi = \frac{p_0}{2} \cdot \frac{r}{\sin\varphi} = \frac{p_0}{2} R_s = \frac{0{,}8}{2} \cdot 1{,}4 \cdot 10^3 = 560 \text{ N/mm}$$

Înlocuind în relația lui Laplace rezultă:

$$N_\theta = p_0 R_s - N_\varphi = \frac{p_0}{2} R_s = 560 \text{ N/mm}.$$

Deoarece pentru fundurile sferice al rezervorului $N_\varphi = N_\theta = 560$ N/mm^2, din condiția de rezistență (9.11) rezultă

$$t = \frac{560}{0{,}8 \cdot 120} = 5{,}83 \text{ mm}.$$

Grosimea efectivă a peretelui fundurilor rezervorului, ținând seama de adaosul tehnologic (t_t) şi de coroziune (t_c) este $s = 8$ mm.

Pentru mantaua cilindrică raza de curbură a meridianului este $r_1 = \infty$, iar cea a paralelului este $r_2 = R$. Formula lui Laplace devine:

$$N_\theta = p_0 R = 0{,}8 \cdot 10^3 = 800 \text{ N/mm}.$$

Efectuând o secțiune în zona cilindrică a rezervorului (fig. 9.9, *c*) şi proiectând toate forțele pe axa de simetrie se obține:

$$N_\varphi \cdot 2\pi R - p_0 \pi R^2 = 0 \Rightarrow N_\varphi = \frac{p_0}{2} R = \frac{0{,}8}{2} 1000 = 400 \text{ N/mm}.$$

Din condiția de rezistență (9.11) se determină grosimea de calcul a peretelui mantalei:

$$t = \frac{800}{0{,}8 \cdot 120} = 8{,}33 \text{ mm},$$

care majorată cu adaosul tehnologic (t_t) şi cel de coroziune (t_c), conduce la $s = 12$ mm.

Izolând zona de racordare (fig. 9.9, *d*) se determină efortul în inelul de rigidizare:

$$N_i = -HR = -(N_\varphi^{sfer} \cos\varphi_1)R = -N_\varphi^{sfer} \frac{R_s - h}{R_s} R = -560 \cdot \frac{1{,}4 - 0{,}42}{1{,}4} \cdot 1 \cdot 10^3 = 392 \text{ kN}.$$

P.9.3. Rezervorul din figura 9.10, este format dintr-o parte cilindrică, o parte conică şi un capac sferic. Rezervorul este plin până la nivelul inelului de rigidizare $A - A$ cu un lichid de greutate specifică $\gamma = 12$ kN/m^3, iar în calota sferică se află un gaz la presiunea $p_0 = 4$ bar. Să se dimensioneze pereții din tole de oțel sudate ($\sigma_a = 100$ N/mm^2, $\beta = 0{,}8$) după teoria a III-a de rezistență (T_τ) şi să se calculeze eforturile în inelele de rigidizare $A - A$ şi $B - B$.

Dimensionarea pereților implică mai întâi determinarea eforturilor secționale N_φ şi N_θ pentru cele trei zone: sferică, cilindrică, respectiv conică.

Zona sferică

Deoarece pentru un înveliş sferic $r_1 = r_2 = R_s$ formula lui Laplace capătă forma:

$$N_\varphi^{sf} + N_\varphi^{sf} = p_0 R_s$$

în care

$$R_s = \frac{R^2 + h_1^2}{2h_1} = \frac{1{,}4^2 + 1}{2 \cdot 1} = 1{,}48 \text{ m}.$$

Pentru determinarea lui N_φ se face secțiunea $I - I$ reprezentată în figura 9.10, *c*. Neglijând greutatea gazului, din ecuație de proiecție pe axa de simetrie:

$$(N_\varphi^{sf} \cdot \sin\varphi) \cdot 2\pi r - p_0 r^2 = 0$$

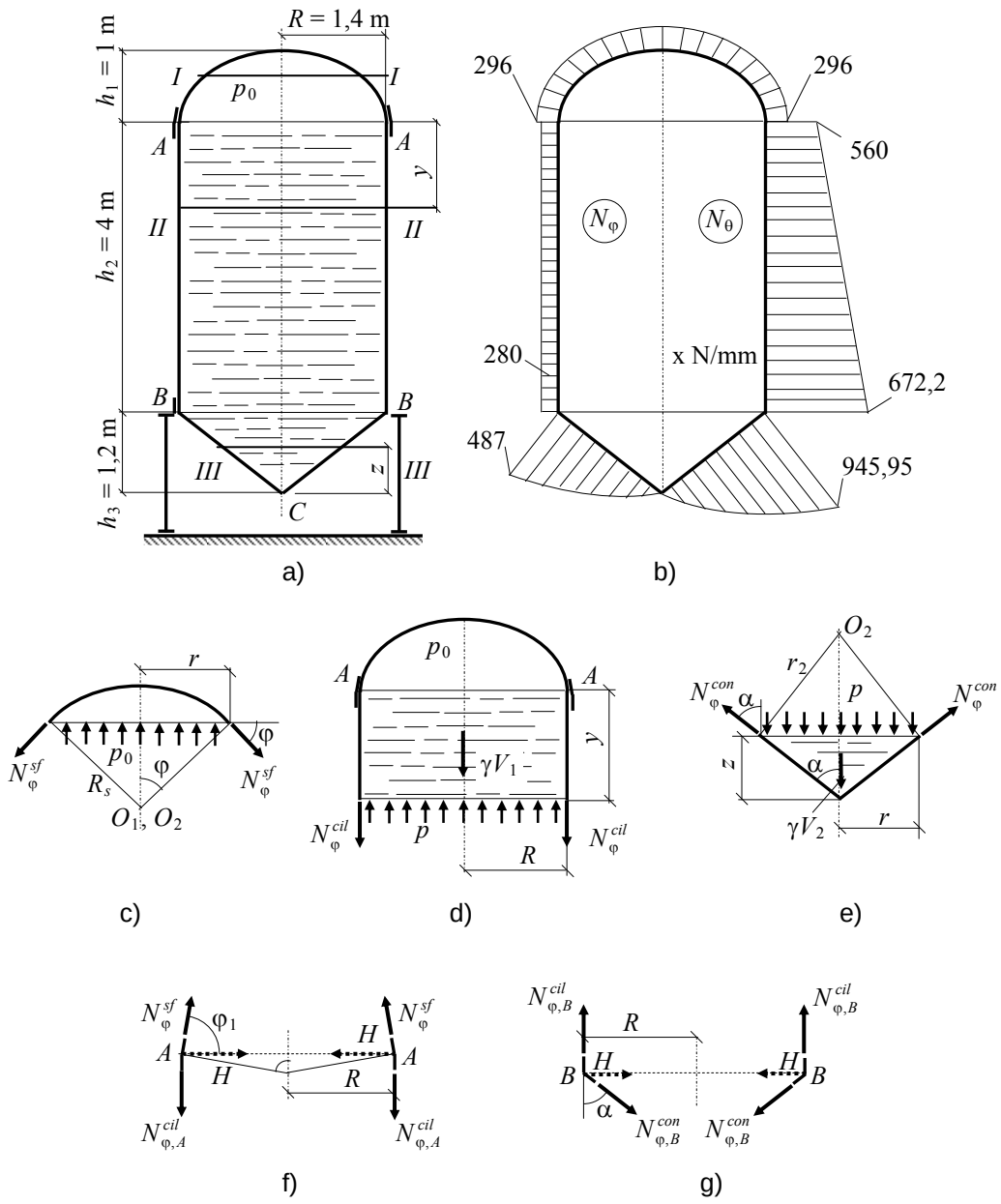


Fig. 9.10.

rezultă:

$$N_{\varphi}^{sf} = \frac{p_0}{2} \cdot \frac{r}{\sin\varphi} = \frac{p_0 R_s}{2}.$$

Înlocuind în formula lui Laplace se obține

$$N_{\theta}^{sf} = N_{\varphi}^{sf} = \frac{p_0 R_s}{2} = \frac{0{,}4 \cdot 1{,}48 \cdot 10^3}{2} = 296 \text{ N/mm}.$$

Reprezentarea celor două eforturi secționale – constante – este prezentată în figura 9.10, *b*.

Deoarece $N_{\theta}^{sf} = N_{\varphi}^{sf} = 296$ N/mm

$$\sigma_{\max}^{sf} = \frac{N_{\varphi}^{sf}}{t^{sf}} \le \beta\sigma_a$$

de unde rezultă grosimea de calcul a peretelui zonei sferice,

$$t^{sf} = \frac{N_{\varphi}^{sf}}{\beta\sigma_a} = \frac{296}{0.8 \cdot 100} = 3{,}7.$$

Ținând seama de adaosul pentru coroziune $t_c = 1{,}3$ mm rezultă $s^{sf} = 5$ mm.

<u>Zona cilindrică</u>

Pentru mantaua cilindrică $r_1 = \infty$; $r_2 = R$. Din formula (9.5) rezultă;

$$N_{\theta}^{cil} = pR = (p_0 + \gamma y)R$$

deoarece presiunea p la cota y este $p = p_0 + \gamma y$. Se constată că N_{θ}^{cil} are o variație liniară între valorile:

$$N_{\theta,A}^{cil}\Big|_{y=0} = p_0 R = 0{,}4 \cdot 1{,}4 \cdot 10^3 = 560 \text{ N/mm},$$

$$N_{\theta,B}^{cil}\Big|_{y=h2} = (p_0 + \gamma h_2)R = (0{,}4 + 12 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^3) \cdot 1{,}4 \cdot 10^3 = 672{,}2 \text{ N/mm}.$$

Pentru determinarea lui N_{φ}^{cil} se face secțiunea *II – II* şi se izolează partea superioară pentru că nu are legături cu terenul şi deci, nu apar necunoscute suplimentare (fig. 9.10, *d*).

Din ecuația de proiecție pe axul de revoluție

$$N_{\varphi}^{cil} \cdot 2\pi R^2 + \gamma V_1 - p\pi R^2 = 0$$

rezultă

$$N_{\varphi}^{cil} = \frac{p\pi R^2 - \gamma\pi R^2 y}{2\pi R} = \frac{p_0 + \gamma y - \gamma y}{2} R = \frac{p_0 R}{2} = \frac{0{,}4 \cdot 1{,}4 \cdot 10^3}{2} = 280 \text{ N/mm}.$$

Variația celor două eforturi secționale este redată în figura 9.10, *b*. Deoarece $N_{\theta,\max}^{cil} > N_{\varphi,\max}^{cil}$ din condiția de rezistență (9.11) rezultă

$$t^{cil} = \frac{N_{\theta,\max}^{cil}}{\beta\sigma_a} = \frac{672{,}2}{0{,}8 \cdot 100} = 8{,}4 \text{ mm}$$

Ținând sema de adaosul de coroziune t_c = 1,6 mm rezultă s^{cil} = 9 mm.

Zona conică

Se face secțiunea *III – III* la cota *z* de punctul *C* (fig. 9.10, *e*). Din ecuația de proiecție pe axa de simetrie

$$(N_\varphi^{con} \cos\alpha) \cdot 2\pi r - p\pi r^2 - \gamma V_2 = 0$$

rezultă

$$N_\varphi^{con} = \frac{p\pi r^2 - \gamma V_2}{2\pi r \cos\alpha} .$$

Deoarece

$$r = \frac{R}{h_3} z ; \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{h_3}\right)^2}} ; \quad V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 z ; \quad p = \gamma[p_0 + (h_2 + h_3 - z)] ;$$

se obține

$$N_\varphi^{con} = \frac{1}{2}\frac{R}{h_3} z \left[p_0 + \gamma\left(h_2 + h_3 - \frac{2}{3} z \right)\right] \sqrt{1 + \left(\frac{R}{h_3}\right)^2} .$$

Pentru

$$z = 0 \Rightarrow N_{\varphi,C}^{con} = 0 ;$$

$$z = h_3 \Rightarrow N_{\varphi,B}^{con} = \frac{1}{2} R \left[p_0 + \gamma\left(h_2 + \frac{h_3}{3} \right)\right] \sqrt{1 + \left(\frac{R}{h_3}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1{,}4 \cdot 10^3 \left[0{,}4 + 12 \cdot 10^{-6} \left(4 + \frac{1{,}2}{3} \right) \cdot 10^3 \right] \sqrt{1 + \left(\frac{1{,}4}{1{,}2}\right)^2} = 487 \text{ N/mm}.$$

Variația efortului secțional N_φ^{con} este redată în figura 9.10, *b*.

Se constată că pentru zona conică $r_1 = \infty$, iar

$$r_2 = \frac{r}{\cos\alpha} = \frac{R}{h_3} z \sqrt{1 + \left(\frac{R}{h_3}\right)^2} ,$$

caz în care din formula lui Laplace (9.5) rezultă

$$N_\theta^{con} = p \cdot r_2 = [p_0 + \gamma(h_2 + h_3 - z)]\frac{R}{h_3} z\sqrt{1+\left(\frac{R}{h_3}\right)^2}$$

Pentru

$$z = 0 \Rightarrow N_{\theta,C}^{con} = 0;$$

$$z = h_3 \Rightarrow N_{\theta,B}^{con} = R[p_0 + \gamma h_2]\sqrt{1+\left(\frac{R}{h_3}\right)^2} =$$

$$= 1{,}4 \cdot 10^3 \left[0{,}4 + 12 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^3\right]\sqrt{1+\left(\frac{1{,}4}{1{,}2}\right)^2} = 945{,}95 \text{ N/mm}.$$

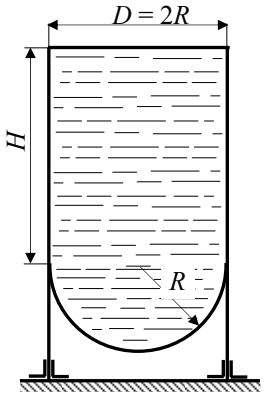


Fig. 11.

Variația efortului secțional N_θ^{con} este redată în figura 9.10, *b*.

Deoarece $N_{\theta,\max}^{con} = N_{\varphi,\max}^{con}$, din condiția de rezistență (9.11) se determină grosimea de calcul a peretelui zonei conice:

$$t^{con} = \frac{N_{\theta,\max}^{con}}{\beta\sigma_a} = \frac{945{,}95}{0{,}8 \cdot 100} = 11{,}8 \text{ mm}.$$

Ținând seama de adaosul de coroziune t_c = 1,2 mm se obține s^{con} = 13 mm.

Pentru calculul eforturilor în inelele de rigidizare se izolează acestea şi se introduc eforturile secționale. În conformitate cu figura 9.10, *f* rezultă:

$$N_i^{A-A} = -HR = -(N_\varphi^{sf}\cos\varphi_1)R = -N_\varphi^{sf}\frac{R_s - h_1}{R_s}R = -296\frac{1{,}48-1}{1{,}48}\cdot 1400 = -134{,}4 \text{ kN}.$$

Pentru inelul *B*- *B* (fig. 9.10, *g*)

$$N_i^{b-B} = -HR = -(N_{\varphi,B}^{con}\sin\alpha)R = -487\frac{\frac{1{,}4}{1{,}2}}{\sqrt{1+\left(\frac{1{,}4}{1{,}2}\right)^2}}\cdot 1400 = -527{,}4 \text{ kN}.$$

Probleme suplimentare

P.9.5. Să se determine eforturile secționale N_φ şi N_q în pereții rezervorului cilindric cu fund sferic din figura 9.11. Diametrul vasului este $D = 2R$ = 3,6 m, înălțimea H = 6 m, iar lichidul are greutatea specifică γ = 15 kN/m^3.

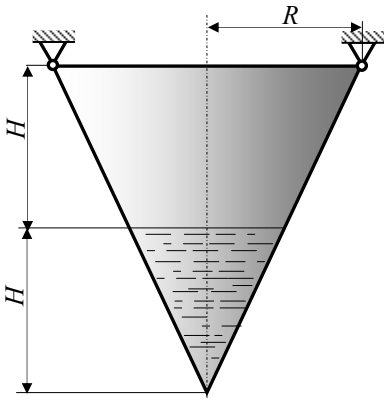


Fig. 9.12.

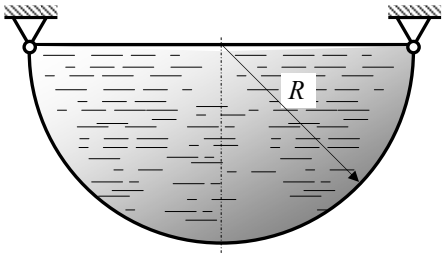


Fig. 9.13.

P.9.4. Un vas conic de rază R =1,8 m şi înălțime $2H$ = 5 m este plin pe jumătate cu un lichid de greutate specifică γ = 16 kN/m^3 (fig. 9.12). Să se dimensioneze peretele vasului cunoscând că este confecționat din virole sudate cap la cap (σ_a = 120 N/mm^2, β = 0,8).

P.9.5. Un rezervor semisferic de rază R = 1m şi este plin cu apă (γ = 10 kN/m^3) . Vasul este suspendat la partea superioară aşa cum se poate vedea în figura 9.13. Să se determine eforturile secționale N_φ şi N_q şi să se dimensioneze peretele vasului daca σ_a = 100 N/mm^2, iar β = 0,8.

P.9.7. Să se verifice tensiunile din pereții unui vas cilindric cu diametrul D = 2,8 m, ştiind că grosimea tablei este s = 10 mm, presiunea interioară p = 1,2 MPa, iar tensiunea admisibilă σ_a = 180 N/mm^2. Vasul are la capete două capace plate.

10. SOLCITĀRI VARIABILE

În capitolul 1, în cadrul clasificării încarcărilor, s-a precizat că, în funcție de efectele interne pe care le induc, încărcările se împart în două categorii: încărcări constante – la care efectele interne sunt aceleaşi pe toată durata solicitării – şi încărcări variabile – la care efectele interne, produse de acestea, variază în timp.

Solicitările care induc tensiuni (σ, τ) variabile în timp, periodic, între o limită inferioară şi alta superioară, sunt denumite *solicitări variabile*.

Solicitările variabile întâlnite în exploatarea unor piese sau structuri pot fi:

– solicitări rezultate din aplicarea sistemelor de forțe, care apar de exemplu în cazul podurilor, macaralelor, al pieselor în mişcare din cadrul maşinilor, locomotivelor, sau din aplicarea unor presiuni variabile, întâlnite la recipiente, conducte, containere etc.;

– solicitări produse de variațiile de temperatură, care apar de exemplu la echipamentele care lucrează cu materiale sau fluide calde;

– vibrații ale sistemelor de transmisii mecanice sau datorate unor forțe aerodinamice sau hidrodinamice;

– solicitări rezultate din condiții de mediu, cum sunt cele generate de forța vântului sau a valurilor în cazul navelor, platformelor de foraj, pilonilor de susținere ai podurilor, recipientelor de tip coloană etc.

Ruperea pieselor supuse solicitărilor variabile se produce la tensiuni mult mai mici decât în cazul solicitărilor statice. Acestui fenomen i s-a dat numele de *oboseala materialului*. Atunci când o piesă dintr-un material ductil este solicitată static, ruperea finală este precedată de deformații plastice mari. În cazul în care piesa respectivă este supusă unor solicitări variabile ruperea se produce la tensiuni mai mici decât limita de curgere şi aparent fără deformații plastice. La început apar una sau mai multe fisuri de dimensiuni mici, care, sub acțiunea solicitărilor variabile, se dezvoltă pană când, la un moment dat, se produce ruperea finală. Din această cauză *oboseala materialului* poate fi definită ca *un proces de inițiere şi propagare stabilă a uneia sau mai multor fisuri ca rezultat al aplicării repetate a solicitării, fiecare aplicare fiind, prin ea însăşi, insuficientă pentru a produce ruperea*.

Solicitările variabile pot avea un caracter *determinist* sau *aleator*. În cazul solicitărilor deterministe se pot stabili anumite relaţii care pot caracteriza evoluţia lor la un moment dat. Solicitărilor aleatoare nu se pot exprima prin relaţii analitice din care cauză, evoluţia lor în timp se studiază prin înregistrări; prin calculul probabilităţilor se pot face apoi estimări privind comportarea în viitor a pieselor supuse la astfel de solicitări.

10.1. CICLURI DE SOLICITĂRI VARIABILE

Dintre solicitările deterministe, cele mai frecvente sunt solicitările periodice cu variaţie continuă. Aceste solicitări variabile pot fi exprimate prin intermediul unor funcţii cu variaţie ciclică în timp, definite prin mărimile caracteristice unui ciclu de referinţă şi prin numărul de repetări al acestuia (fig.10.1).

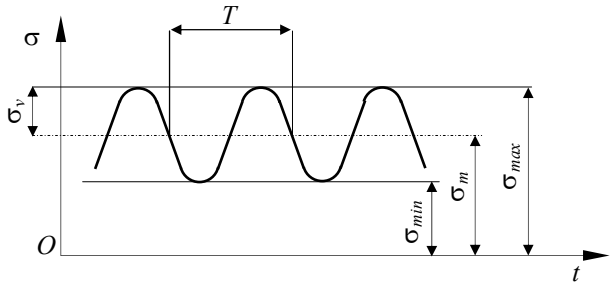


Fig. 10.1.

Ciclul de solicitare reprezintă totalitatea valorilor pe care le ia tensiunea, într-un punct al piesei, în intervalul de timp de referinţă. Timpul de referinţă *T*, dintre două valori consecutive, de acelaşi semn ale tensiunii, poartă numele de *perioadă*. În decursul unui ciclu, tensiunea trece o singură dată printr-o valoare maximă, numită tensiune maximă σ_{max}, şi o valoare minimă σ_{min} numită tensiune minimă.

În funcţie de σ_{max} şi σ_{min} se definesc:

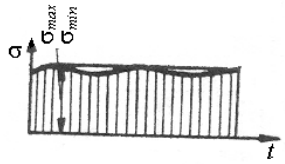
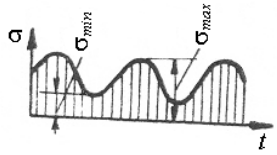
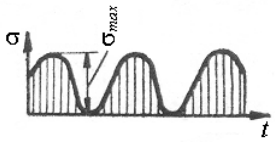
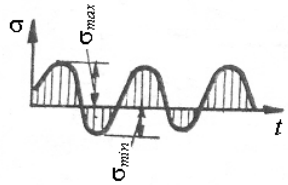
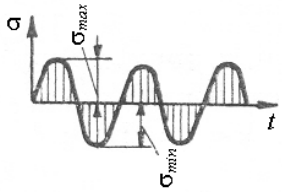
– tensiunea medie:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}; \tag{10.1}$$

– amplitudinea tensiunii, reprezentând componenta alternantă:

$$\sigma_v = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}; \tag{10.2}$$

Tabelul 10.1.

Nr. crt.	Ciclul	σ_{max} , σ_{min}	σ_m , σ_v	R
Cicluri ondulante (σ_{max} şi σ_{min} au acelaşi semn)				
1	 Ciclul static pozitiv	$\sigma_{max} = \sigma_{min} > 0$	$\sigma_m = \sigma_{max} = \sigma_{min}$ $\sigma_v = 0$	$R = +1$
2	 Ciclul ondulant pozitiv	$\sigma_{max} > 0$ $\sigma_{min} > 0$	$\sigma_m > 0$ $\sigma_v \neq 0$	$0 < R < +1$
3	 Ciclul pulsator pozitiv	$\sigma_{max} > 0$ $\sigma_{min} = 0$	$\sigma_m = \sigma_v = \frac{1}{2}\sigma_{max}$	$R = 0$
Cicluri alternante (σ_{max} şi σ_{min} au semne contrarii)				
4	 Ciclul alternant	$\sigma_{max} > 0$ $\sigma_{min} < 0$ $\sigma_{max} \geq \lvert\sigma min\rvert$	$\sigma_m > 0$ $\sigma_v \neq 0$	$-1 < R < 0$
5	 Ciclul alternant simetric	$\sigma_{max} = -\sigma_{min} > 0$ $\sigma_{min} < 0$	$\sigma_m = 0$ $\sigma_v = \sigma_{max}$	$R = -1$

– coeficientul de asimetrie al ciclului:

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}; \qquad (10.3)$$

– caracteristica ciclului:

$$\rho = \frac{\sigma_v}{\sigma_m} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{\sigma_{max} + \sigma_{min}} = \frac{1-R}{1+R}. \qquad (10.4)$$

Întrucât, între mărimile definite anterior există diferite relații, în parte precizate, se constată că un ciclu este complet caracterizat prin două astfel de marimi: (σ_{max}; σ_{min})

După mărimile şi semnele pe care le au σ_{max} şi σ_{min}, se disting diferite tipuri de cicluri de solicitări variabile care sunt redate în tabelul 10.1.

10.2. REZISTENŢA LA OBOSEALĂ

Caracteristica mecanică a unui material din care este confecționată o piesă supusă la solicitări variabile, este *rezistența la oboseală*.

Rezistența la oboseală se determină experimental şi depinde de coeficientul de asimetrie al ciclului *R*.

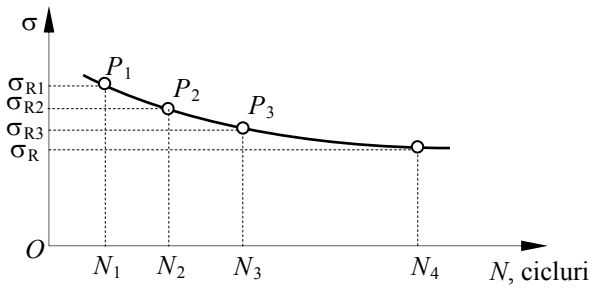


Fig. 10.2.

În acest scop, conform STAS 5878-69, se încearcă minim opt epruvete identice, la o solicitare variabilă cu acelaşi coeficient de asimetrie *R* şi se înscriu pe diagramă diferitele seturi de valori (σ_{Ri}, N_i); σ_R este intensitatea maximă – în valoarea absolută – a tensiunii la care se rupe epruveta după *N* cicluri, cu coeficientul de asimetrie *R*. În felul acesta se trasează punctele P_i (i = 1,2, ..., 8), prin unirea cărora se obține *curba de durabilitate*, curbă care este cunoscută sub numele de curba lui *Wöhler* (fig. 10.2). Valoarea către care tinde asimptotic această curbă este rezistența la oboseală σ_R, pentru solicitarea variabilă cu coeficientul de asimetrie *R*. Rezistența la oboseală pentru cilul alternat simetric se

va nota σ_{-1}, pentru ciclul pulsator, cu σ_0, iar pentru ciclul static σ_{+1} (σ_{+1} corespunde rezistenței la rupere la solicitarea statică).

În mod practic, σ_R reprezintă valoare maximă a tensiunii de solicitare a epruvetei la care aceasta nu se rupe după un număr convențional de cicluri N_0. Pentru oțeluri se ia $N_0 = 10^6 \ldots 10^7$ cicluri, iar pentru aliaje uşoare se ia $N_0 = 5 \cdot 10^7 \ldots 10^8$ cicluri.

În cele mai multe cazuri punctele P_i obținute experimental prezintă o dispersie destul de mare astfel încât curba de durabilitate nu este uşor de definit. Din această cauză pentru determinări precise este necesar să se încerce un număr relativ mare de epruvete – câteva zeci . Rezultatele experimentale se prelucrează statistic şi se trasează curbe care indică *probabilitatea de rupere*.

Dificultăți la determinarea rezistenței la oboseală se întâmpină şi în ceea ce priveşte metodologia experimentală atunci când se studiază şi altfel de cicluri decât cel alternant simetric.

10.3. RUPEREA PRIN OBOSEALĂ

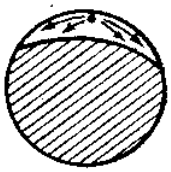
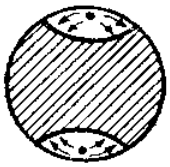
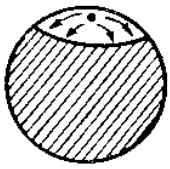
De mai mult de un secol, de când s-a constat fenomenul de oboseală, s-a căutat să se explice modul de producere a ruperii prin oboseală şi cum aceasta diferă de ruperea la solicitari statice.

Din analiza comparativă dintre secțiunea unei bare ruptă la oboseală şi una aparținând unei bare solicitată static rezultă deosebiri semnificative. În cazul barei rupte prin oboseală se disting două zone: una lucioasă, cauzată de frecarea materialului în timpul propagării fisurii şi una grăunțoasă, în zona în care are loc, brusc, ruperea finală. Procesul de rupere prin oboseală este inițiat prin apariția unei microfisuri, care prin extindere formează o fisură, a cărei poziție poate fi uşor identificată în secțiunea piesei rupte. Când viteza de propagare a fisurii nu este constantă, pe suprafața lucioasă se observă anumite linii de repaus care marchează întreruperile de propagare a fisurii.

Aspectul ruperii la oboseală depinde şi de natura ciclului de solicitare. În tabelul 10.2 sunt redate diferite secțiuni de rupere pentru diferite solicitări şi diferite tipuri de peruvete. Săgețile indică direcțiile de propagare a fisurilor, iar zonele haşurate reprezintă zonele mate (cu asperități) corespunzătoare zonelor active din momentul ruperii.

Pentru solicitările de încovoiere rotativă sau întindere-compresiune, de obicei există o singură fisură inițială. În cazul încovoierii plane apar două fisuri dispuse față în față. Atunci când valoarea maximă a tensiunii este mică (solicitare mică) fisura se propagă aproape în toată secțiunea, zona ruperii bruşte (cea haşurată) fiind mică.

Tabelul 10.2.

Felul solicitării	Epruvetă netedă		Epruvetă cu concentrator inelar
	Solicitare mică	Solicitare mare	Solicitare mică
Încovoiere rotativă			
Încovoiere plană			
Întindere-compresiune			

Trebuie remarcat faptul că în cazul ruperii prin oboseală nu apare acea gâtuire specifică ruperii statice a materialelor tenace, ceea ce conduce la concluzia că ruperea prin oboseală are carater fragil.

10.4. FACTORI CARE INFLUENŢEAZĂ REZISTENŢA LA OBOSEALĂ

Rezistența la oboseală este o mărime complexă care depinde de o serie întreagă de factori. Unii dintre aceştia pot fi luați în considerare în calculele de rezistență prin intermediul unor coeficienți; de alții se poate ține seama la alegerea materialului, a formei piesei şi a tehnologiei de fabricație.

Se poate face o sistematizare a acestor factorii astfel:

– factori constructivi;
– factori tehnologici;
– factori de exploatare.

10.4.1. FACTORI CONSTRUCTIVI

În piesele de tip bară, distribuția tensiunilor dată de rezistența materialelor este stabilită în ipoteza că secțiunea este constantă, iar abaterile de la această distribuție sunt nesemnificative în cazul în care secțiunea barei are o variație lentă. În practică sunt puține cazurile în care piesele au secțiuni constante. Schimbările bruşte ale secțiunii transversale, cum sunt cele determinate de trecerea de la o secțiune la alta, de găuri sau crestături, produc în zona lor o modificare semnificativă a legii de distribuție a tensiunilor şi deformațiilor specifice. La materiale ductile, în astfel de zone în care se produc concentrări de tensiuni, de regulă la suprafața piesei, valoarea acestora poate depăşi limita de curgere a materialului. Ca urmare viața pieselor este redusă semnificativ.

În calculele inginereşti astfel de fenomene se iau în considerare prin intermediul unor *factori constructivi*, care cuprind:

a) *Forma piesei şi modul de asamblare* (cu celelalte piese ale construcției), care necesitând schimbări bruşte de secțiune constituie concentratori de tensiuni. Aceşti factori se ia în considerare prin coeficientul:

$$\beta_k = \frac{(\sigma_{-1})_{d_0}}{(\sigma_{-1,k})_{d_0}} > 1, \tag{10.5}$$

unde $(\sigma_{-1})_{d_0}$ este rezistența la oboseală – în ciclul alternant simetric – a unei epruvete cu diametrul standardizat d_0, ideală, adică fără incluziuni străine şi cu suprafața perfect lustruită şi lipsită de concentratori de tensiuni; $(\sigma_{-1,k})_{d_0}$ este rezistența la oboseală – în ciclul alternant simetric – a unei epruvete cu diametrul standardizat d_0, dar având forma şi modul de asamblare a piesei reale (la care apare deci concentratorul de tensiuni), dar cu suprafața perfect lustruită şi fără incluziuni de material străin.

b) *Dimensiunile piesei*. Acestea se iau în considerare prin coeficientul:

$$\varepsilon_k = \frac{(\sigma_{-1,k})_d}{(\sigma_{-1,k})_{d_0}} = \frac{(\sigma_{-1,k})_d}{(\sigma_{-1})_{d_0}} \cdot \beta_k < 1, \tag{10.6}$$

unde $(\sigma_{-1,k})_d$ este rezistența la oboseală, în ciclul alternant simetric, a piesei, având forma, modul de asamblare şi dimensiunile piesei reale, dar cu suprafața perfect lucie şi fără incluziuni de material străin. Acest coeficient este subunitar deoarece la piese cu dimensiuni mai mari probabilitatea existenței unor microfisuri este mai mare decât la piese cu dimensiuni mici.

10.4.2. FACTORI TEHNOLOGICI

Factorii tehnologici iau în considerare *calitatea şi omogenitatea materialului* precum şi *gradul de prelucrare al suprafeţei piesei*.

Rezistenţa la oboseală, ca şi celelalte caracteristici mecanice, diferă de la un material la altul. Din această cauză datele informative despre caracteristicile mecanice ale diferitelor materiale, cuprinse în normative şi standarde, conţin şi valoarea rezistenţei la oboseală, determinată pe epruvete netede (de obicei standardizate) cu diametrul în jur de 8 – 10 mm.

Dintre factorii tehnologici care au o influenţă negativă asupra rezistenţei la oboseală se menţionează: structura neuniformă a materialului, structura cu granulaţie mare, existenţa crustei de turnare, forjare, laminare, tratamente termice sau neuniforme. În schimb tratamentele termice corecte, crearea de fibre longitudinale prin forjare sau laminare, ca şi tratamentele superficiale au efect favorabil asupra rezistenţei la oboseală.

Un alt factor esenţial care influenţează rezistenţa la oboseală îl constituie starea suprafeţei piesei. Dintre cauzele care fac ca starea suprafeţei piesei să influenţeze puternic rezistenţa la oboseală se menţionează:

– suprafaţa are întotdeauna zgârieturi rezultate din prelucrare, care constituie amorse de fisuri;

– la suprafaţa piesei grăunţii cristalini sunt în parte distruşi din cauza prelucrării, fapt ce conduce la o slăbire a rezistenţei materialului;

– la încovoiere şi răsucire, tensiunile maxime se dezvoltă la suprafaţa pieselor.

Factorii tehnologici se iau în considerare prin coeficientul:

$$\gamma_k = \frac{(\sigma_{-1,k})_{d,s}}{(\sigma_{-1,k})_d} = \frac{(\sigma_{-1,k})_d}{(\sigma_{-1})_{d_0}} \cdot \frac{\beta_k}{\varepsilon_k} < 1, \tag{10.7}$$

unde $(\sigma_{-1,k})_{d,s}$ este rezistenţa la oboseală în ciclul alternant simetric a piesei reale: σ'_{-1}. Acest coeficient este subunitar deoarece rezistenţa la oboseală a piesei cu microfisuri exterioare şi interioare este mai mică decât a piesei perfect lustruite şi fără incluziuni străine de material.

Din relaţia (10.7) rezultă ca rezistenţa la oboseală, în ciclul alternant simetric, a piesei reale este:

$$\sigma'_{-1} = \frac{\gamma_k \cdot \varepsilon_k}{\beta_k} \cdot \sigma_{-1}. \tag{10.8}$$

10.4.3. FACTORI DE EXPLOATARE

În aceşti factori sunt cuprinşi:

a) *Condițiile în care funcționează piesa*. Experiențele au arătat că rezistența la oboseală este influențată defavorabil de existența suprasolicitărilor, adică a unor solicitări de durată limitată dar având o valoare mai mare decât rezistența la oboseală. Cu cât solicitarea inițială a piesei este mai mare sau de mai lungă durată cu atât rezistența la oboseală scade mai mult. De asemenea rezistența la oboseală scade la temperaturi înalte, fapt pentru care sunt necesare determinări ale rezistenței la oboseală la temperaturile respective. Tipul de solicitare (de întindere, încovoiere sau de torsiune) – care este prins în factorii β_k, ε_k, γ_k – influențează, de asemenea, rezistența la oboseală.

b) *Influența mediului*. S-a constatat că rezistența la oboseală se diminuează foarte mult atunci când piesa lucrează într-un mediu corosiv. Acest efect se combate prin acoperiri anticorosive, sau prin alegerea de materiale care rezistă mai bine la agenții corosivi.

c) *Gradul de asimetrie al ciclului*. Acest factor, în comparație cu primii doi, este factorul principal care influențează în mod decisiv rezistența la oboseală. Toți ceilalți factori se iau în considerare în mod global. Influența gradului de simetrie este pusă în evidență prin intermediul unei diagrame, denumită *diagrama ciclurilor limită* care stabileşte legătura între două mărimi caracteristice ale ciclului, la limită, adică în momentul în care se produce ruperea prin oboseală.

10.5. DIAGRAMA CICLURILOR LIMITĂ

Diagrama ciclurilor limită, indiferent de mărimile caracteristice ale ciclului în care este exprimată, se determină numai pe cale experimentală. Trasarea unei astfel de diagrame necesită un număr mare de determinări experimentale şi ea reprezintă variația rezistenței la oboseală cu coeficientul de asimetrie al ciclului de solicitare, pentru o piesă dată.

Într-un sistem de axe de coordonate σ_m, σ_v (fig. 10.3) ciclul de solicitare variabilă dintr-o piesă se poate reprezenta printr-un punct M de coordonate (σ_m,σ_v). Între panta dreptei OM şi coeficientul de asimetrie R al ciclului de solicitare corespunzător punctului M există relația:

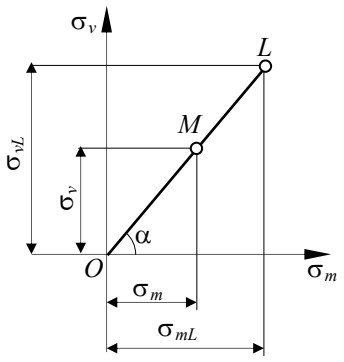


Fig. 10.3.

$$\tan\alpha = \frac{\sigma_v}{\sigma_m} = \frac{1-R}{1+R}. \qquad (10.9).$$

În baza relațiilor (10.1) şi (10.2), suma coordonatelor punctului *M* reprezintă tensiunea σ_{max} a cilului. Prelungind dreapta *OM*, se găseşte un punct *L*, corespunzător unui ciclu limită la care tensiunea maximă este egală cu rezistența la oboseală a materialului, corespunzătoare ciclului cu coeficientul de asimetrie dat:

$$\sigma_{maxL} = \sigma_{mL} + \sigma_{vL}. \qquad (10.10)$$

Locul geometric al punctelor *L* reprezintă *diagrama rezistențelor la oboseală* sau *diagrama ciclurilor limită*.

10.5.1. DIAGRAMA HAIGH

Această diagramă reprezintă relația grafică între σ_v şi σ_m la limită, adică:

$$\sigma_{vL} = f(\sigma_{mL}). \qquad (10.11)$$

O astfel de diagramă este reprezentată în figura 10.4, *a*. Pe ea se disting următoarele puncte caracteristice:

– punctul $A(0,\sigma_{-1})$, care reprezintă ciclul limită alternant simetric;

– punctul $B(\sigma_{+1},0)$, care reprezintă ciclul static la limită (ruperea la solicitarea statică);

– punctul $P(\sigma_0/2, \sigma_0/2)$, care reprezintă ciclul pulsator, la limită.

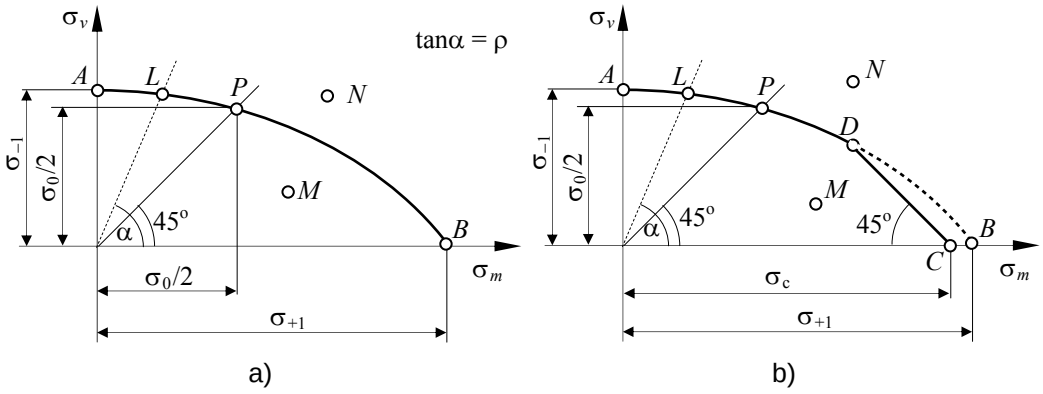


Fig. 10.4.

Un punct oarecare pe curbă $L(\sigma_{vL}\ ,\ \sigma_{mL})$ reprezintă un ciclu limită (deci la care s-a produs ruperea prin oboseală, a cărui caracteristică este dată de relația (10): $\rho = \sigma_{vL}/\sigma_{mL}$ şi al cărui coeficient de asimetrie rezultă din relația $\rho = (1-R)/(1+R)$.

Un punct oarecare $M(\sigma_m,\sigma_v)$, care se găseşte în interiorul suprafeței diagramei, reprezintă o solicitare ciclică a cărei caracteristică este $\rho = \sigma_v/\sigma_m$, dar care nu a atins limita, deci la care epruveta nu se rupe.

În cazul materialelor tenace:

$$\sigma_{maxL} = \sigma_{mL} + \sigma_{vL} = \sigma_c, \tag{10.12}$$

unde σ_c reprezintă limita de curgere. Din această cauză diagrama ciclurilor limită trebuie limitată printr-o dreaptă la 45°, a cărei ecuație este (10.12) şi reprezentată pe figura 10.4, *b* prin dreapta *CD*.

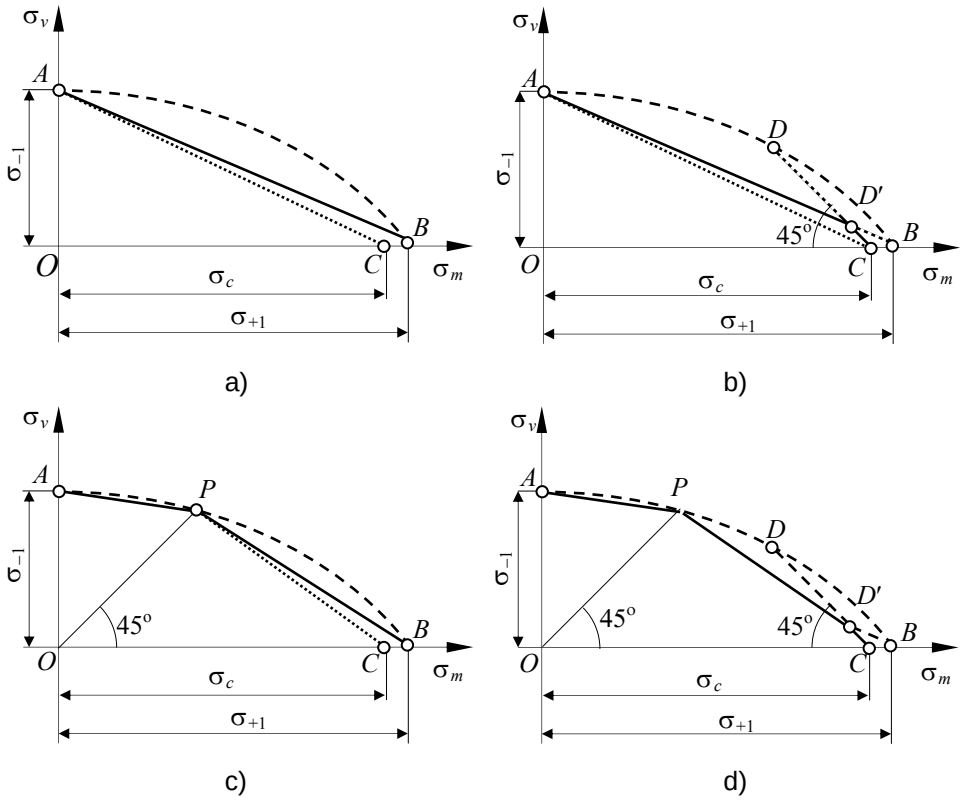


Fig. 10.5.

Deoarece pentru fiecare punct *L* este necesară o diagramă Wohler (fig. 10.2), o asemenea diagramă nu poate fi trasată exact, din care cauză s-a recurs la schematizarea ei. S-au propus doua schematizări, una de către Soderberg (SUA),

cealaltă de către Serensen (RFR).

Schematizarea propusă de Soderberg constă în dreapta *AB* pentru materiale fragile şi dreapta *AC*, pentru materialele tenace (fig. 10.5, *a*). Pentru materialele tenace, o diagramă mai puţin restrictivă este formată din dreptele *AB* şi *CD* care se intersectează în *D′* (fig. 10.5, *b*).

Schematizarea propusă de Serensen se bazează pe determinarea lui σ_0 şi constă în două drepte: *AP* şi *PB* pentru materialele fragile, respectiv *AP* şi *PC* pentru materialele tenace (fig. 10.5, *c*). Pentru materialele tenace, o diagramă mai puţin restrictivă este formată din dreptele *AP*, *PD′* şi *D′C*, unde *D′* reprezintă intersecţia dreptelor *PB* şi *CD* (fig. 10.5, *d*).

10.5.2. DIAGRAMA SCHMIDT

Această diagramă reprezintă grafic relaţia, care se stabileşte la limită, intre σ_{max} şi σ_m, respectiv σ_{min} şi σ_m

$$\sigma_{maxL} = f(\sigma_{mL});\ \sigma_{minL} = g(\sigma_{mL}). \qquad (10.13)$$

În această diagramă fiecare ciclu limită este reprezentat prin două puncte. Astfel ciclul alternant simetric este reprezentat prin punctele $A(0, \sigma_{-1})$ şi $A'(0, -\sigma_{-1})$ (fig. 10.6,*a*). Ciclul pulsator este reprezentat prin punctele $P(\sigma_0/2,0)$ şi P' $(\sigma_0/2,\sigma_0/2)$. Ciclul static este reprezentat prin punctele *B* şi *B′* care coincid

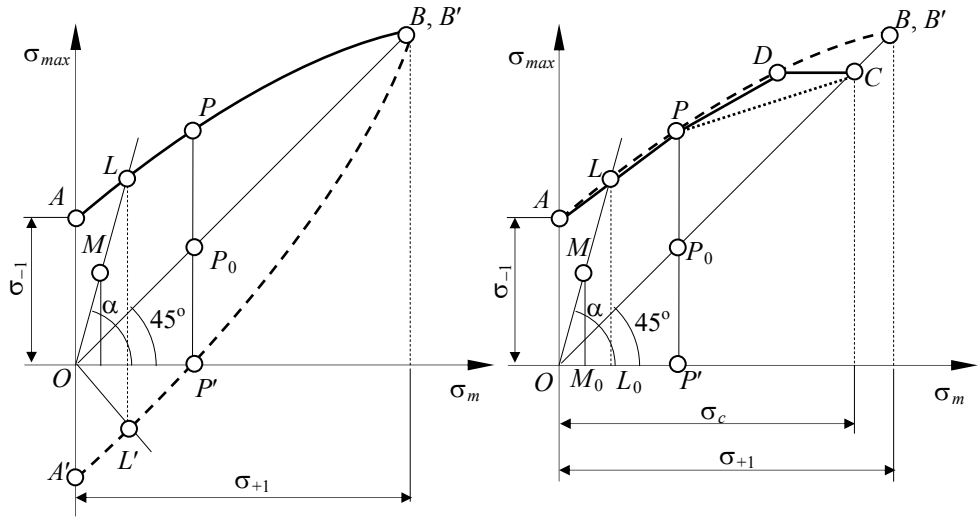


Fig. 10.6.

având aceleaşi coordonate (σ_{+1}, σ_{+1}).

Un ciclu oarecare limită este reprezentat prin punctele $L(\sigma_{maxL}, \sigma_{mL})$ şi $L'(\sigma_{minL}, \sigma_{mL})$ (fig. 10.6, *a*).

Se poate constata că diagrama Schmidt este formată din două diagrame Haigh răsturnate, reprezentate în coordonate oblice.

În figura 10.6, *b* este reprezentată diagrama schematizată Schmidt pentru materiale tenace, pentru domeniul în care tensiunea medie este pozitivă ($\sigma_m > 0$), (domeniu cel mai studiat prin încercări experimentale).

O solicitare variabilă oarecare, care nu a atins limita, este reprezentată, pentru domeniul pentru care $\sigma_m > 0$, prin punctul *M* de coordonate (σ_m, σ_{max}). Înclinarea dreptei *OM* este dată de unghiul a cărui tangentă este $\tan \alpha = \sigma_{max}/\sigma_m = 1 + \rho$. Rezultă că toate ciclurile care au aceeaşi caracteristică ρ cu ciclul reprezentat de punctul *M*, se află pe dreapta *OM* şi punctul *L* reprezintă starea limită pentru toate aceste cicluri.

10.6. CALCULUL DE REZISTENŢĂ LA SOLICITĂRI VARIABILE

Datorită multitudinii factorilor care condiționează starea limită, calculul de rezistență la solicitări variabile constă fie într-un calcul de verificare, caz în care se determină coeficientul de siguranță, fie într-un calcul de dimensionare la una din solicitările variabile simple (de întindere, încovoiere sau torsiune).

În cazul în care este necesar să se determine coeficientul de siguranță trebuiesc cunoscute următoarele elemente:

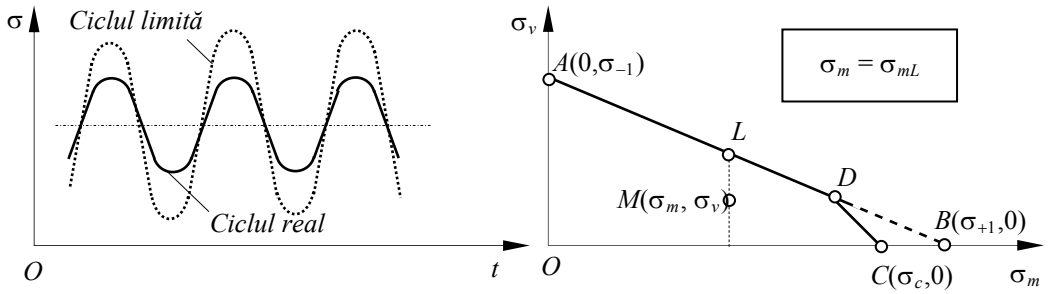
– ciclul real de solicitare al piesei ce implică cunoaşterea a două valori, de exemplu: σ_{max}, σ_{min}, calculate cu formulele clasice din rezistența materialelor; celelalte mărimi: σ_m, σ_v, *R* şi ρ fiind exprimate în funcție de σ_{max} şi σ_{min} cu ajutorul relațiilor (10.1 – 10.4);

– materialul din care este confecționată piesa ce implică cunoaşterea valorilor σ_{-1}, σ_0, σ_c, $\sigma_{+1}(=R_m)$, respectiv construirea diagramelor ciclurilor limită;

– cunoaşterea factorilor ce influențează rezistența la oboseală; în general aceşti factori sunt: β_k – coeficient de formă; ε_k – coeficient dimensional; γ_k – coeficient de stare a suprafeței.

Din cele prezentate mai sus reiese faptul că, atunci când se pune problema de dimensionare a unei piese supusă la solicitări variabile, este necesară o predimensionare pe baza formulelor clasice din rezistența materialelor, după care se face verificare. Dacă verificarea nu este îndeplinită – coeficientul de siguranță

este nesatisfăcător – se modifică dimensiunile piesei până când condiţia impusă



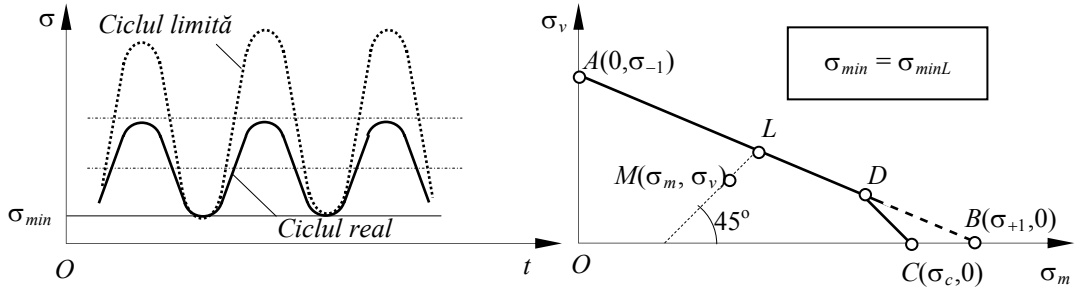
a) b)

Fig.10.7.

este îndeplinită.

Pentru determinarea coeficientului de siguranţă trebuie precizat în prealabil ciclul limită în raport cu care se compară ciclul real. În această privinţă în literatura tehnică s-au formulat mai mult criterii, dintre care cele mai importante sunt prezentate în cele ce urmează.

a) Ciclul limită trebuie să se caracterizeze prin aceeaşi valoare a tensiunii medii σ_m, ca şi ciclul dat (fig.10.7, *a*). În consecinţă pe diagrama Haigh schematizată a ciclurilor limită, ciclul limită al solicitării considerate corespunde punctului *L* din figura 10.7, *b*. Dezavantajul acestui criteriu constă în faptul că pentru un ciclu real ondulant, ciclul la limită poate fi un ciclu alternant.

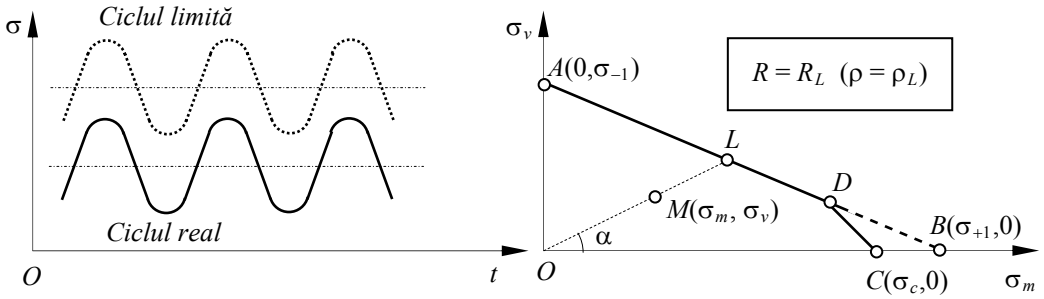


a) b)

Fig.10.8.

b) Ciclul limită trebuie să aibă aceeaşi valoare a tensiunii minime σ_{min} (în valoare absolută) ca şi ciclul real (fig 10.8, *a*). Pe diagrama Haigh schematizată a ciclurilor limită, ciclul limită al solicitării considerate corespunde punctului *L*, obţinut prin intersecţia unei drepte dusă prin *M* şi care face cu axa σ_m un unghi de 45°, cu diagrama ciclurilor limită (fig. 10.8, *b*). Acest criteriu este respectat numai

la determinarea rezistenţei la oboseală în ciclul pulsator. El are însă avantajul că dă valori mai acoperitoare în cazul ciclurilor apropiate de ciclul alternant simetric,



a) b)

Fig.10.9.

care este ciclul cel mai periculos.

c) Ciclul limită trebuie să aibă acelaşi coeficient de asimetrie R, respectiv aceeaşi caracteristică ρ a ciclului, ca şi ciclul real (fig. 10.9, *a*). Pe diagrama Haigh schematizată a ciclurilor limită, ciclul limită al solicitării considerate corespunde punctului L din figura 10.9, *b*. Dezavantajul acestui criteriu constă în faptul că procesul prin care se produce apariţia stării limită nu are o justificare fizică. Cu toate acestea, acest criteriu este folosit pentru determinarea rezistenţei la oboseală atât în cazul ciclului alternat simetric, cât şi al ciclului pulsator sau al ciclului static, fapt pentru care el va fi folosit în continuare pentru coeficientului de siguranţă.

Condiţia care trebuie îndeplinită atunci când se efectuează verificarea unei piese supusă la solicitări variabile este:

$$c \geq c_a \tag{10.14}$$

unde c_a este coeficientul de siguranţă admisibil la solicitări variabile.

În absenţa unor reglementări exprese, tratatele de specialitate prevăd următoarele valori orientative pentru c_a:

– piese de maşini confecţionate din oţel c = 1,5 ... 1,7
– piese de maşini uşoare, din oţel c = 1,3 ... 1,4
– piese importante, din oţel când încercarea la oboseală s-a făcut pe piesă c = 1,35
– piese din oţel turnat c = 1,4 ... 2,0
– piese din fontă c = 2,0 ... 3,0

10.6.1. SOLICITĂRI VARIABILE SIMPLE

După cum s-a arătat mai înainte rezistenţa la oboseală a unei piese este influenţată de foarte mulţi factori şi ea diferă mult faţă de valoarea stabilită pe epruvete standardizate. Din această cauză rezistenţa la oboseală a unei piese reale se calculează cu relaţia (10.8) în care σ_{-1} este rezistenţa la oboseală – în ciclul alternant simetric – a unei epruvete cu diametrul standardizat d_0, ideală, adică fără incluziuni străine şi cu suprafaţa perfect lustruită şi lipsită de concentratori de tensiuni.

Utilizând diagrama Haigh schematizată prin dreapta *AC* (fig. 10.5, a), diagrama similară, dar pentru piesa reală, poate fi aproximată prin dreapta *A′C* (fig. 10.10), deoarece concentratorii de tensiuni nu modifică limita de curgere la solicitarea statică, punctul *C* fiind corect.

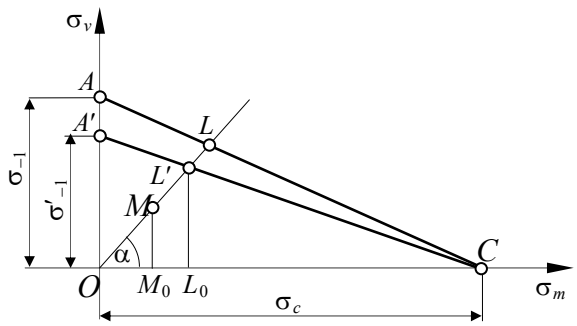


Fig. 10.10.

În consecinţă, aproximaţia făcută faţă de dreapta *AC*, constă în considerarea unei variaţii liniare pentru grupul de coeficienţi $\varepsilon_k \cdot \gamma_k / \beta_k$.

Limita de rezistenţă a unei piese, solicitată la ciclul definit de punctul $M(\sigma_m, \sigma_v)$, având caracteristica $\rho = \tan\alpha = MM_0/OM_0 = \sigma_v/\sigma_m$ corespunde punctului *L′* (fig. 10.10).

În această situaţie, când piesa este solicitată printr-un ciclu alternat simetric, iar încercarea la oboseală nu s-a făcut pe piesa reală, coeficientul de siguranţă se determină cu relaţia:

$$c = \frac{\sigma'_{-1}}{\sigma_v} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_v} \cdot \frac{\varepsilon_k \gamma_k}{\beta_k} \tag{10.15}$$

în care $\sigma_v = \sigma_{max}$ este tensiunea normală maximă din secţiunea periculoasă.

10.6.1.1. Solicitări care produc numai tensiuni σ

Se admite că ciclul de solicitare reprezentat prin punctul $M(\sigma_m, \sigma_v)$ (fig.10.10) păstrează aceeaşi caracteristică până la limită. Rezultă că starea limită este reprezentată de punctul L' de coordonate $(\sigma_{mL}, \sigma_{vL})$ care se află la intersecția dreptelor $A'C$ şi OM.

Din asemănarea triunghiurilor OM_0M şi OL_0L' se deduce:

$$\frac{\sigma_{mL}}{\sigma_m} = \frac{\sigma_{vL}}{\sigma_v} = \frac{\sigma_{mL} + \sigma_{vL}}{\sigma_m + \sigma_v} = \frac{\sigma_{\max L}}{\sigma_{\max}} = c_\sigma \tag{10.16}$$

unde c_σ este coeficientul de siguranță al ciclului real pentru tensiuni normale, față de ciclul limită.

Rezultă:

$$\sigma_{mL} = c_\sigma \cdot \sigma_m \; ; \; \sigma_{vL} = c_\sigma \cdot \sigma_v \tag{10.17}$$

valori care trebuie să satisfacă ecuația dreptei $A'C$:

$$\frac{\sigma_{mL}}{\sigma_c} + \frac{\sigma_{vL}}{\sigma'_{-1}} = 1 . \tag{10.18}$$

După înlocuire şi ținând seama de (10.15) se obține:

$$c_\sigma = \frac{1}{\dfrac{\sigma_m}{\sigma_c} + \dfrac{\sigma_v}{\sigma_{-1}} \left(\dfrac{\beta_k}{\varepsilon_k \gamma_k} \right)_\sigma} . \tag{10.19}$$

Pentru un ciclu alternant simetric pentru care $\sigma_m = 0$ şi $\sigma_v = \sigma_{max}$ rezultă relația (10.15).

Valoarea coeficientului de siguranță calculată fie cu (10.19), fie cu (10.15) trebuie să îndeplinească condiția (10.14).

10.6.1.2. Solicitări care produc numai tensiuni τ

Pentru solicitări variabile simple care produc tensiuni τ (forfecare pură, torsiune), admițând o diagramă limită similară cu cea din figura 10.10, dar în coordonate (τ_m, τ_v), în care $A'(0, \tau'_{-1})$, iar $C(\tau_c, 0)$, expresia coeficientului de siguranță c_τ se obține din (10.19) prin înlocuirea tensiunilor σ cu tensiunile corespunzătoare τ. Rezultă:

$$c_\tau = \frac{1}{\dfrac{\tau_m}{\tau_c} + \dfrac{\tau_v}{\tau_{-1}}\left(\dfrac{\beta_k}{\varepsilon_k \gamma_k}\right)_\tau}. \tag{10.20}$$

Pentru un ciclu alternant simetric:

$$c_\tau = \frac{\tau'_{-1}}{\tau_v} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_v} \cdot \left(\frac{\varepsilon_k \gamma_k}{\beta_k}\right)_\tau, \tag{10.21}$$

în care $\tau_v = \tau_{max}$.

10.6.2. SOLICITĂRI VARIABILE COMPUSE

Condiția de rezistență, la o bară solicitată static la încovoiere cu torsiune, în cazul ipotezei a III-a de rezistență (T_τ), este:

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_{max}^2 + 4\tau_{max}^2} \le \sigma_a = \frac{\sigma_{+1}}{c}$$

Prin ridicarea la pătrat şi împărțirea cu σ_{+1}/c şi ținând seama că în teoria T_τ, $\sigma_{+1} = 2\tau_{+1}$, la limită se obține relația:

$$\left(\frac{c \cdot \sigma_{\max}}{\sigma_{+1}}\right)^2 + \left(\frac{c \cdot \tau_{\max}}{\tau_{+1}}\right)^2 = 1 \tag{10.22}$$

care reprezintă ecuația unei elipse, având semiaxele egale cu σ_{+1} şi τ_{+1}.

Numeroasele experiențe, în special cele efectuate de către Gough şi Pollard, au arătat că ecuația anterioară rămâne valabilă şi în cazul solicitărilor variabile de încovoiere şi torsiune, în fază, ambele în ciclul alternant simetric. În consecință, se poate scrie:

$$\left(\frac{c \cdot \sigma_{\max}}{\sigma_{-1}}\right)^2 + \left(\frac{c \cdot \tau_{\max}}{\tau_{-1}}\right)^2 = 1. \tag{10.23}$$

În această relație $c \cdot \sigma_{max} = \sigma_L$ şi $c \cdot \tau_{max} = \tau_L$ reprezintă valorile limită ale tensiunilor σ, respectiv τ pentru ciclul de solicitare efectiv, iar σ_{-1} şi τ_{-1} rezistențele la oboseală pentru ciclurile alternant simetric la încovoiere, respectiv torsiune. Elipsa definită de (10.23) este redată în figura 10.11.

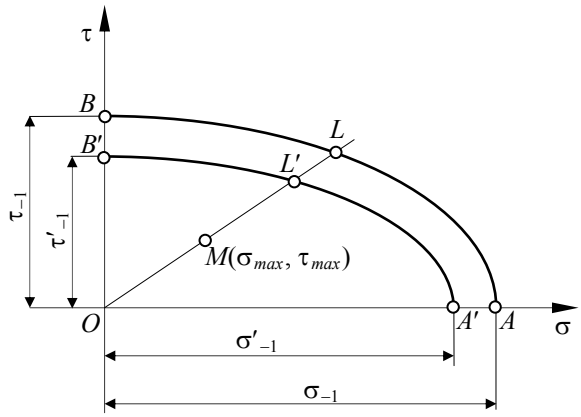


Fig. 10.11.

În cazul pieselor reale ecuația (10.23) capătă forma:

$$\left(\frac{c\cdot\sigma_{\max}}{\sigma'_{-1}}\right)^2+\left(\frac{c\cdot\tau_{\max}}{\tau'_{-1}}\right)^2=1\,, \tag{10.24}$$

în care σ'_{-1} şi τ'_{-1} se calculează cu relația (10.8).

Dacă se notează:

$$\frac{\sigma'_{-1}}{\sigma_{\max}}=c_\sigma\,;\quad \frac{\tau'_{-1}}{\tau_{\max}}=c_\sigma\,,$$

reprezentând coeficienții de siguranță în cazul solicitărilor variabile simple, după înlocuirea în relația (10.24) rezultă:

$$c=\frac{c_\sigma\cdot c_\tau}{\sqrt{c_\sigma^2+c_\tau^2}} \tag{10.25}$$

relație cu ajutorul căreia se calculează coeficientul de siguranță al unei piese supusă la solicitări variabile compuse, de încovoiere cu torsiune, în fază, în ciclul alternant simetric.

Formula (10.25) se poate aplica şi pentru ciclurile asimetrice, dar în aceste cazuri coeficienții de siguranță c_σ şi c_τ se determină cu relațiile (10.19), respectiv (10.20).

Valoarea coeficientului c calculată cu relația (10.25) trebuie să îndeplinească condiția (10.14).

Probleme rezolvate

P.10.1. Un oțel prezintă la încercările de laborator tensiunile $R_m = \sigma_{+1} = 390$ N/mm^2 şi $\sigma_{-1} = 180$ N/mm^2. Să se determine rezistența la oboseală pentru ciclurile cu $R = 0{,}25$ şi $R = 0{,}5$ folosind diagrama Haigh schematizată din figura 10.5, *a*.

Dreapta *AB* din figura 10.5, *a*, în cazul oțelului dat, are ecuația:

$$\frac{\sigma_m}{390} + \frac{\sigma_v}{180} = 1.$$

Rezistența la oboseală corespunzătoare ciclului cu coeficientul de asimetrie $R = 0{,}25$ corespunde punctului L_1 din figura 10.12, care reprezintă intersecția dreptei *AB* cu dreapta OL_1 a cărei ecuație este:

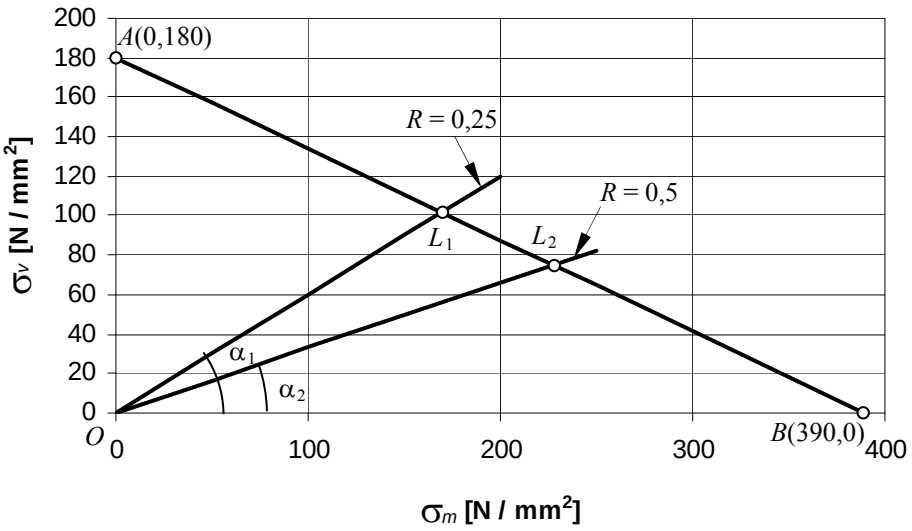


Fig. 10.12.

$$\sigma_v = (\tan\alpha)\cdot\sigma_m \Rightarrow \sigma_v = \left(\frac{1-R}{1+R}\right)\cdot\sigma_m = \frac{1-0{,}25}{1+0{,}25}\sigma_m \Rightarrow \sigma_v = 0{,}6\cdot\sigma_m.$$

Rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\sigma_m}{390} + \dfrac{\sigma_v}{180} = 1 \\ \sigma_v = 0{,}6\sigma_m \end{cases},$$

se determină coordonatele punctului L_1:

$$\sigma_{mL_1} = 169{,}5 \text{ N/mm}^2 \text{ şi } \sigma_{vL_1} = 101{,}7 \text{ N/mm}^2.$$

Rezistența la oboseală pentru ciclul cu R = 0,25 va fi:

$$\sigma_{0,25} = 169,5 + 101,7 = 271,2 \text{ N/mm}^2.$$

Pentru ciclul caracterizat de $R = -0,5$ se procedează analog şi se ajunge la sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\sigma_m}{390} + \dfrac{\sigma_v}{180} = 1 \\ \sigma_v = 0,3\sigma_m \end{cases}$$

prin rezolvarea căruia se obține:

$$\sigma_{mL_2} = 227,4 \text{ N/mm}^2 \text{ şi } \sigma_{vL_2} = 75 \text{ N/mm}^2.$$

În consecință rezistența la oboseală pentru ciclul cu coeficientul de asimetrie $R = 0,5$ este:

$$\sigma_{0,5} = 227,4 + 75 = 302,4 \text{ N/mm}^2.$$

P.10.2. Arcul elicoidal din figura 10.13, solicitat de forța F, care variază între valorile $F_{max} = 8$ kN şi $F_{min} = 3$ kN, are diametrul spirei $d = 24$ mm şi raza de înfăşurare $R = 60$ mm. El este confecționat din oțel de arc, călit şi ecruisat cu alice, cu caracteristicile $\tau_c = 600$ N/mm^2, $\tau_{-1} = 300$ N/mm^2.
Tensiunile corespunzătoare lui F_{max} şi F_{min} se calculează cu relația (3.115)

$$\tau_{\max} = \frac{FR}{W_p}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{d}{R}\right) = \frac{8000 \cdot 60}{2714,34}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{24}{60}\right) = 200,4 \text{ N/mm}^2;$$

$$\tau_{\min} = \frac{FR}{W_p}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{d}{R}\right) = \frac{2500 \cdot 60}{2714,34}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{24}{60}\right) = 62,6 \text{ N/mm}^2;$$

unde

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi \cdot 24^3}{16} = 2714,34 \text{ mm}^3.$$

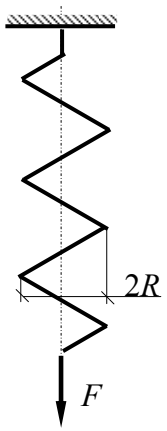


Fig. 10.13.

Rezultă că, în punctele de la interiorul arcului tensiunea tangențială variază între $\tau_{\max} = 200,4$ N/mm^2 şi $\tau_{\min} = 62,6$ N/mm^2.

Pe baza acestor valori cu relațiile (10.1) şi (10.2) se determină τ_m, respectiv τ_v:

$$\tau_m = \frac{\tau_{max} + \tau_{min}}{2} = \frac{200,4 + 62,6}{2} = 131,5 \text{ N/mm}^2.$$

$$\tau_v = \frac{\tau_{max} - \tau_{min}}{2} = \frac{200,4 - 62,6}{2} = 68,9 \text{ N/mm}^2.$$

Caracteristica ciclului va avea valoarea:

$$\rho_\tau = \frac{\tau_v}{\tau_m} = \frac{68,9}{131,5} = 0,52 .$$

Valorile factorilor, pentru arcuri de acest tip, se pot lua:

$\beta_k = 1,1$; $\varepsilon_k = 1$; $\gamma_k = 1,6$.

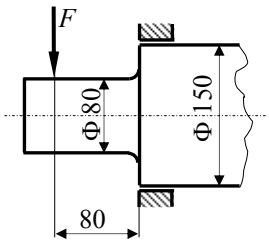


Fig. 10.14.

Folosind relația (10.20) se determină coeficientul de siguranță la solicitări variabile al arcului dat:

$$c_\tau = \frac{1}{\dfrac{\tau_m}{\tau_c} + \dfrac{\tau_v}{\tau_{-1}}\left(\dfrac{\beta_k}{\varepsilon_k \gamma_k}\right)_\tau} = \frac{1}{\dfrac{131{,}5}{600} + \dfrac{68{,}9}{300}\left(\dfrac{1{,}1}{1 \cdot 1{,}6}\right)} = 2{,}6 \,.$$

P.10.3. Să se determine forța maximă F_{max} pe care o poate suporta fusul din figura 10.14, de lungime l = 80 mm şi diametrul d = 80 mm, solicitat la un ciclu alternant simetric pentru un coeficient de siguranță c_a = 2,4. Materialul din care este confecționat fusul este un oțel care are σ_{-1} = 350 N/mm^2. Suprafața fusului este şlefuită fin, iar în zona racordării a suferit o ecruisare prin rulare, ceea ce face ca γ_σ = 1,38.

Tensiunea normală maximă care se dezvoltă în fus corespunde momentului de încovoiere maxim $M_{max} = F \cdot l$ şi are expresia:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} = \frac{32 \cdot F \cdot l}{\pi d^3} \,.$$

Coeficientul de siguranță se determină cu relația (10.15):

$$c = \frac{\sigma'_{-1}}{\sigma_v} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{max}} \cdot \frac{\varepsilon_k \gamma_k}{\beta_k} \,.$$

Înlocuind pe σ_{max} şi punând condiția $c \le c_a$ rezultă:

$$F \le \frac{\sigma_{-1} \cdot \pi \cdot d^3}{32 \cdot c \cdot l} \cdot \frac{\varepsilon_k \gamma_k}{\beta_k} \,.$$

Pentru forma constructivă a fusului se poate lua β_k = 1,5 şi ε_k = 0,7. Înlocuind numeric se obține:

$$F_{max} = \frac{350 \cdot \pi \cdot 80^3}{32 \cdot 2{,}4 \cdot 80} \cdot \frac{0{,}7 \cdot 1{,}38}{1{,}5} = 59000 \text{ N}.$$

P.10.3. Arborele din figura 10.15 are diametrul d = 60 mm şi transmite puterea P = 25 kW la turația n = 300 rot/min. Raportul eforturilor din ramura conducătoare şi ramura condusă a fiecărei curele de transmisie este 2. Razele roților sunt: R_1 = 400 mm, R_2 = 500 mm. Să se verifice rezistența arborelui şi să se determine coeficientul de siguranță la solicitări variabile ştiind că materialul din care este confecționat arborele este OLC 60 (C 60 – conform noii codificări).

Pentru verificarea de rezistență trebuie să se traseze diagramele de eforturile secționale.

Momentul de torsiune la care este supus arborele este:

$$M_x = 9{,}55 \cdot 10^3 \frac{P}{n} = 9{,}55 \cdot 10^3 \frac{25}{300} = 795{,}83 \text{ Nm}.$$

şi el se manifestă pe porțiunea cuprinsă între cele două roți (fig. 10.15)

Reducând, în axa arborelui, eforturile din ramurile curelelor, se obțin forțele (fig. 10.15):

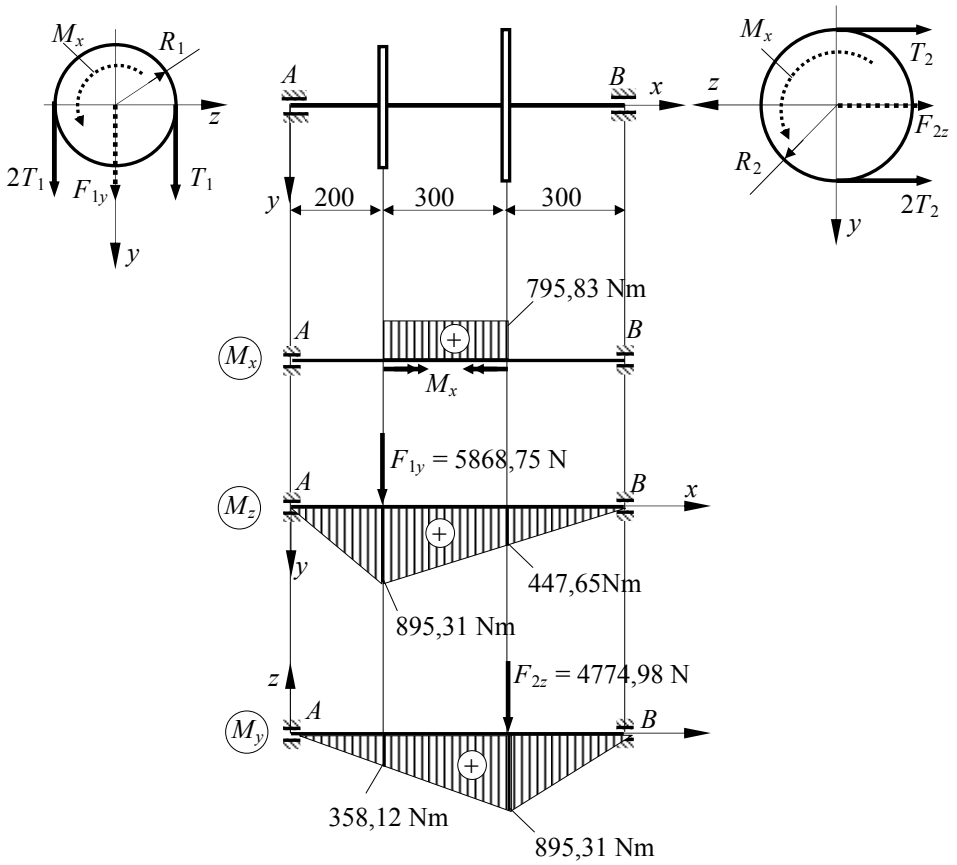


Fig. 10.15

$$F_{1y} = 3T_1 = 3\frac{M_x}{R_1} = 3 \cdot \frac{795{,}83 \cdot 10^3}{400} = 5968{,}75\ \text{N};$$

$$F_{2z} = 3T_2 = 3\frac{M_x}{R_2} = 3 \cdot \frac{795{,}83 \cdot 10^3}{500} = 4774{,}98\ \text{N};$$

deoarece între eforturile din ramurile curelelor şi momentul M_x existe egalităţile:

$$M_x = 2T_1R_1 - T_1R_1 = T_1R_1;$$

$$M_x = 2T_2R_2 - T_2R_2 = T_2R_2.$$

Cele două forţe acţionând în plane diferite vor produce momente de încovoiere atât în planul cu normala z (M_z), cât şi în planul cu normala y (M_y). Pe baza diagramelor de eforturi (fig. 10.15) se stabileşte secţiunea în care momentul total de încovoiere este maxim:

$$M_i^1 = \sqrt{358{,}12^2 + 895{,}31^2} = 964{,}28\ \text{Nm}; \qquad M_i^2 = \sqrt{895{,}31^2 + 447{,}65^2} = 1000{,}98\ \text{Nm}.$$

Secțiunea periculoasă este în dreptul roții 2 deoarece în această secțiune atât momentul încovoietor cât şi momentul de torsiune au valorile maxime.

Deoarece pe tronsonul dintre cele două roți arborele este solicitat la încovoiere cu torsiune, calculul de proiectare se face cu relația (7.32) în care:

$$K_{T\tau} = \sqrt{1+\left(\frac{M_x}{M_i^{\max}}\right)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{795{,}83}{1000{,}98}\right)^2} = 1{,}277\ .$$

Rezultă:

$$\sigma_{\max}^{\text{ef}} = \frac{M_i^{\max}}{W_i^{ef}} K_{T\tau} = \frac{1000{,}98\cdot 10^3\cdot 32}{\pi\cdot 60^3}\cdot 1{,}277 = 60{,}3\ \text{N/mm}^2 < \sigma_a = 70\ \text{N/mm}^2.$$

Ciclul de încovoiere este alternant simetric. Pentru punctul cel mai solicitat al secțiunii corespunzătoare roții 2 tensiunile maxime, respectiv minime au valorile:

$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = \pm\frac{M_i^{\max}}{W_i} = \pm\frac{1000{,}98\cdot 10^3\cdot 32}{\pi\cdot 60^3} = 47{,}2\ \text{N/mm}^2.$$

Coeficientul de siguranță la solicitări variabile simple se determină cu relația (10.19). Deoarece ciclul solicitării de încovoiere este alternant simetric $\sigma_m = 0$, iar $\sigma_v = \sigma_{max}$.

Din Anexa 2 pentru oțelul OLC 60 se adoptă: σ_c = 410 N/mm^2; σ_{-1} = 340 N/mm^2; τ_c = 210 N/mm^2; τ_{-1} = 195 N/mm^2. Pentru arborele dat se consideră $\left(\frac{\beta_k}{\varepsilon_k\gamma_k}\right)_\sigma$ =2,3.

În acest caz, coeficentul de siguranță la solicitări variabile simple care produc tensiunile σ este:

$$c_\sigma = \frac{1}{\frac{\sigma_m}{\sigma_c}+\frac{\sigma_v}{\sigma_{-1}}\left(\frac{\beta_k}{\varepsilon_k\gamma_k}\right)_\sigma} = \frac{1}{\frac{\sigma_v}{\sigma_{-1}}\left(\frac{\beta_k}{\varepsilon_k\gamma_k}\right)_\sigma} = \frac{1}{\frac{47{,}2}{340}\cdot 2{,}3} = 3{,}13$$

Ciclul de torsiune se consideră pulsator ca urmare a pornirilor şi opririlor dese. Din această cauză $\tau_m = \tau_v = \tau_{max}/2$, unde

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_p} = \frac{795{,}83\cdot 10^3\cdot 16}{\pi\cdot 60^3} = 18{,}76\ \text{N/mm}^2.$$

Considerând $\left(\frac{\beta_k}{\varepsilon_k\gamma_k}\right)_\tau$ = 1,8, coeficientul de siguranță la solicitări variabile simple care produc tensiunile τ are valoarea:

$$c_\tau = \frac{1}{\frac{\tau_m}{\tau_c}+\frac{\tau_v}{\tau_{-1}}\left(\frac{\beta_k}{\varepsilon_k\gamma_k}\right)_\tau} = \frac{1}{\frac{18{,}76}{2}\left(\frac{1}{210}+\frac{1}{195}\cdot 1{,}8\right)} = 7{,}62\ .$$

Coeficientul de siguranță pentru solicitarea variabilă compusă se determină cu relația (10.25):

$$c = \frac{c_\sigma \cdot c_\tau}{\sqrt{c_\sigma^2 + c_\tau^2}} = \frac{3{,}13 \cdot 7{,}62}{\sqrt{3{,}13^2 + 7{,}62^2}} = 2{,}89 .$$

Probleme suplimentare

P.10.4. Să se verifice la oboseală un arbore de diametru d = 70 mm din OL60, solicitat la răsucire de un moment care variază între limitele $M_{x\ max}$ = 2,4 kNm, $M_{x\ min}$ = – 1,2 kNm. Se cunoaşte $(\beta_k/\varepsilon_k\gamma_k)_\tau = 1{,}74$.

P.10.5. Să se calculeze coeficientul de siguranță la solicitări variabile compuse la un arbore din OLC 60 de diametu d = 76 mm, solicitat la încovoiere şi răsucire de momentele: $M_{i\ max}$ = 3,6 kNm; $M_{i\ min}$ = – 2,4 kNm; $M_{x\ max}$ = 4,0 kNm; $M_{x\ min}$ = –1,0 kNm. Se dau $(\beta_k/\varepsilon_k\gamma_k)_\sigma = 2{,}3$; $(\beta_k/\varepsilon_k\gamma_k)_\tau = 1{,}8$.