Elemente de mecanică şi rezistenţa materialelor folosite în ingineria mecanică

- **Mecanică teoretică**
  - Statica sistemelor de forţe aplicate solidului rigid
  - Echilibrul solidului rigid acţionat de forţe
  - Legăturile solidului rigid
  - Statica sistemelor de corpuri
  - Grinzi cu zăbrele plane

- **Rezistenţa materialelor**
  - Tensiuni şi deformaţii
  - Solicitările simple ale barelor drepte
  - Teorii de rezistenţă
  - Solicitările compuse ale barelor drepte
  - Flambajul barei drepte comprimate
  - calculul plăcilor subţiri de revoluţie în teoria de membrană
  - Solicitări variabile

Bibliografie

1. Pupăzescu Al., *Mecanică teoretică şi rezistenţa materialelor*, Vol. I, Editura Universităţii din Ploieşti, 2004;
2. Pupăzescu Al., *Mecanică teoretică şi rezistenţa materialelor*, Vol. II, Editura Universităţii Petrol-Gaze din Ploieşti, 2007;
3. Eparu I., *Mecanică teoretică*, Editura Universităţii din Ploieşti, 2002;
4. Popa I., Rezistenţa materialelor, Editura Universităţii din Ploieşti, 2002;

Mecanică Teoretică

2. STATICA PUNCTULUI MATERIAL

2.1. PUNCTUL MATERIAL LIBER

Un punct material este considerat liber atunci când poate ocupa orice poziție în spațiu, nestingherit din punct de vedere geometric de alt corp.

Din punct de vedere matematic coordonatele punctului P, (x, y, z) pot varia independent între ele.

Așadar punctul material liber are trei grade de libertate materializate prin cei trei parametri (coordonatele scalare x, y, z). Poziția punctului material este definită de vectorul de poziție $\bar{r}$:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \qquad (2.1)$$

în care $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ reprezintă versorii axelor sistemului de referință $Oxyz$ (fig. 2.1).

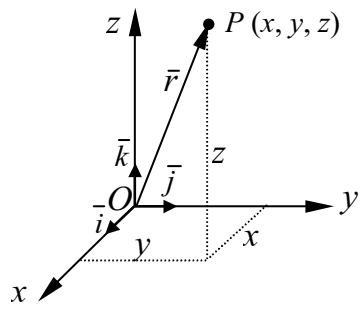


Fig. 2.1.

Se poate observa că în cazul punctului material, forțele care acționează asupra lui sunt, din punct de vedere matematic, vectori legați de acest punct. Rezultă că forțele care acționează asupra punctului material sunt forțe concurente.

2.1.1. Transformarea sistemelor de forţe concurente

Deoarece sistemele de forțe ce acționează asupra unui punct material sunt sisteme de forțe concurente, transformarea lor în sisteme de forțe echivalente simple se face utilizând principiul paralelogramului. În baza acestui principiu, efectul mecanic a două forțe ($\bar{F}_1, \bar{F}_2$) ce acționează asupra unui punct material P este același cu efectul unei singure forțe, egală cu

rezultanta vectorială $\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$, a acestora, având mărimea și direcția diagonalei mari a paralelogramului construit cu cele două forțe ca laturi (fig. 2.2). Mărimea forței rezultante se determină cu relația:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos(\overline{F}_1, \overline{F}_2)}\ , \tag{2.2}$$

iar direcția ei poate fi dedusă din egalitățile:

$$\frac{F_1}{\sin(\overline{R}, \overline{F}_2)} = \frac{F_2}{\sin(\overline{R}, \overline{F}_1)} = \frac{R_1}{\sin(\overline{F}_1, \overline{F}_2)}\ . \tag{2.3}$$

Rezultă că orice sistem de forțe ce acționează asupra unui punct material poate fi transformat, din aproape în aproape, într-o forță echivalentă.

Metoda paralelogramului, extinsă în metoda poligonului forțelor (fig. 2.3), este o metodă greoaie, mai ales în cazul în care sistemele de forțe conțin foarte multe forțe. Din această cauză, pentru calculul rezultantei $\overline{R}$ se utilizează metoda analitică. Astfel:

$$\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i = \overline{i} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} + \overline{j} \sum_{i=1}^{n} F_{iy} + \overline{k} \sum_{i=1}^{n} F_{iz}\ , \tag{2.4}$$

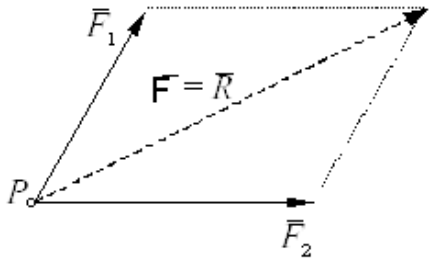


Fig. 2.2.

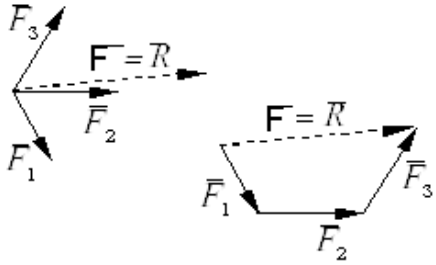


Fig.2.3.

în care F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} reprezintă proiecțiile forței $\overline{F}_i$ pe axele sistemului de referință *Oxyz*, iar *n* numărul forțelor aplicate punctului *P*.

Dacă se notează:

$$\overline{R} = \overline{i}\,X + \overline{j}\,Y + \overline{k}\,Z\ , \tag{2.5}$$

unde X, Y, Z reprezintă proiecțiile vectorului $\overline{R}$ pe axele sistemului de

referință *Oxyz*, atunci componentele vectorului rezultant sunt:

$$X = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} \ ; \ Y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} \ ; \ Z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} \ . \tag{2.6}$$

În consecință, orice sistem de forțe care acționează asupra unui punct matrerial poate fi înlocuit cu o forță, echivalentă din punct de vedere mecanic, aplicată punctului material, egală cu rezultanta sistemului de forțe:

$$\overline{F} = \overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i \ . \tag{2.7}$$

Rezultă că două sisteme de forțe $\overline{F}_i$ și $\overline{F}_j$ ($i = 1,2, ..., n$; $j = 1,2, ..., m$), aplicate independent asupra unui punct material, sunt echivalente (au același efect mecanic asupra punctului material) dacă au aceeași rezultantă:

$$\overline{R} = \overline{R}' ; \quad (\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i \ ; \ \overline{R}' = \sum_{j=1}^{m} \overline{F}_j \ ). \tag{2.8}$$

2.1.2. Echilibrul punctului material liber

Punctul material liber este punctul material care poate ocupa orice poziție în soațiu.

Problema echilibrului unui punct material liber, acționat de un sistem de forțe, se rezolvă folosind *principiul inerției* prezentat în paragraful 1.2.

Având în vedere acest principiu, precum și modalitățile de determinare a rezultantei unui sistem de forțe aplicat asupra unui punct material, se poate enunța următorul adevăr: condiția necesară și suficientă ca un punct material liber aflat inițial în repaus față de un sistem de referință dat să rămână în aceeași stare și după ce i se aplică un sistem de forțe (adică să rămână în echilibru sub acțiunea sistemului de forțe dat) este ca rezultanta vectorială a sistemului de forțe să fie nulă. Această condiție se exprimă vectorial astfel:

$$\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i = 0, \tag{2.9}$$

iar scalar:

$$X = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \; ; \; Y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \; ; \; Z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0. \qquad (2.10)$$

Dacă toate forțele ce alcătuiesc sistemul de forțe au suporturile coplanare atunci condiția (2.10) față de un sistem de referință convenabil ales (de exemplu planul *Oxy* să coincidă cu planul forțelor) se reduce la:

$$X = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \; ; \; Y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0. \qquad (2.11)$$

Având în vedere faptul că forțele ce acționează asupra punctului material sunt vectori legați, ele depinzând, în general de pozitia punctului material, condițiile scalare (2.10) și (2.11) devin în orice problemă de statica punctului material liber, trei ecuații de proiecție (2.10), respectiv două ecuații de proiecție (2.11), adică devin *ecuații de echilibru*.

Necunoscutele ce intervin în aceste ecuații pot fi de natură geometrică și/sau fizică.

Necunoscutele geometrice sunt cele legate de poziția de echilibru a punctului material față de un sistem de referință (coordonatele punctului material în sistemul de referință ales), cele de natură fizică sunt legate de sistemul de forțe ce acționează asupra punctului material (intensitatea forțelor). Din aceste motive, problema echilibrului punctului material îmbracă diferite forme. Astfel:

a) dacă sistemul de forțe ce acționează asupra punctului material este complet definit, atunci ca necunoscute în ecuațiile (2.8), respectiv (2.9) apar parametrii (coordonatele) ce determină poziția de echilibru a punctului material (*problema directă*);

b) dacă poziția de echilibru a punctului material este cunoscută, se impune determinarea intensității forțelor care acționează asupra lui pentru ca el să rămână în poziția precizată (*problema indirectă*).

c) dacă nu se cunoaște poziția de echilibru și nici sistemul de forțe ce acționează asupra punctului material nu este complet definit atunci problema îmbracă aspectul *mixt*, fiind necesar să se determine atât poziția de echilibru prin parametrii respectivi, cât și o parte din forțe, cele necunoscute.

Se poate constata cu ușurință că problema directă are soluție dacă sistemul de ecuații este compatibil, problema este static determinată; ea nu are soluție când sistemul de ecuații este incompatibil și are o infinitate de soluții când sistemul de ecuații este nedeterminat.

Problema indirectă este, în general, static nedeterminată.

2.2. PUNCTUL MATERIAL LEGAT

Atunci când, din anumite motive, mișcarea unui punct material este stânjenită (restrânsă), el fiind obligat să rămână tot timpul fie pe o suprafață, fie pe o curbă sau într-o anumită poziție în spațiu, spunem că punctul material este supus la legături.

Din punct de vedere geometric punctul material liber are trei grade de libertate (v.par. 1.1). Orice legătură aplicată punctului material îi micșorează numărul gradelor de libertate.

Astfel un punct material obligat să rămână pe o suprafață solidar legată cu reperul de referință are două grade de libertate, deoarece între cei trei parametrii (x, y, z) care determină poziția punctului există o relație dată de ecuația ce definește suprafața în același sistem de referință:

$$f(x, y, z) = 0. \tag{2.12}$$

Un punct obligat să rămână pe o curbă solidar legată de sistemul de referință are un singur grad de libertate deoarece cei trei parametri (x, y, z) ce definesc poziția punctului material, trebuie să satisfacă cele două ecuații ce definesc curba în sistemul de referință ales:

$$\begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}. \tag{2.13}$$

Un punct obligat să nu-și schimbe poziția față de sistemul de referință ales nu mai are nici-un grad de libertate.

Din punct de vedere fizic, se observă că orice legătură a unui punct material cu reperul de referință ales se manifestă ca o acțiune din partea acestuia asupra punctului material, denumită reacțiune.

În consecință, pentru studierea echilibrului punctului material legat, se aplică *principiul forțelor de legătură*.

În baza acestui principiu, orice legătură (care impune restricții de natură geometrică punctului material) poate fi înlocuită prin echivalentul ei mecanic – prin forțe.

După eliminarea legăturii și înlocuirii ei cu forțe, numite *forțe de legătură*, punctul material poate fi asimilat unui punct material liber, care însă, rămâne cu restricțiile de natură geometrică impuse de legături.

Fie $\overline{F}_i$ (i =1,2, ..., n) sistemul de forțe efectiv aplicate asupra punctului

material și $\overline{F_j}$ (j =1,2, ..., m) sistemul de forțe de legătură. Condiția de echilibru a punctului material (2.9) devine:

$$\overline{R} + \overline{R} = 0 \tag{2.14}$$

în care $\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F_i}$ și $\overline{R} = \sum_{j=1}^{m} \overline{F_j}$.

Relația vectorială (2.14) se transpune în trei ecuații scalare. Aceste ecuații se completează cu ecuațiile de natură geometrică (2.12) sau (2.13) în funcție de tipul legăturii pe care o are punctul material.

2.2.1. Punctul material legat de o suprafaţă

În cazul punctului material legat de o suprafață rezultanta forțelor de legătură $\overline{R}$ se descompune într-o forță $\overline{N}$ dirijată după direcția normalei $\overline{n}$ la suprafață în punctul P și în forța $\overline{T}$ ce are suportul cuprins în planul tangent la suprafață în punctul P (fig. 2.4).

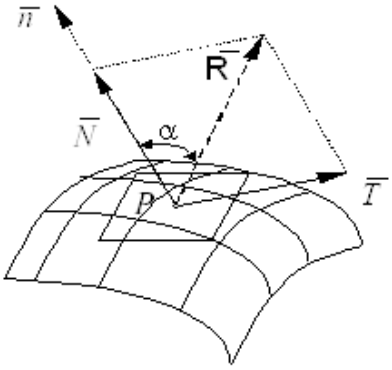


Fig. 2.4.

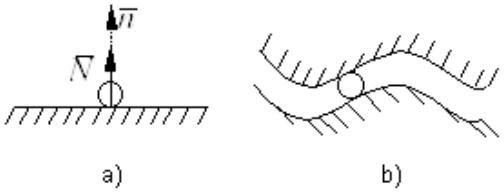


Fig. 2.5.

Forța $\overline{N}$ este numită *forță de legătură normală* sau *reacțiune normală*. Ea are punctul de aplicație în P, suportul dirijat după normala $\overline{n}$ la suprafață în punctul P. Sensul reacțiunii normale $\overline{N}$ este definit în funcție de tipul legăturii pe care o poate avea punctul.

În figura 2.5, *a* este prezentată o legătură *unilaterală* a punctului P. În acest caz forța de legătură normala $\overline{N}$ are sensul bine definit, determinat de sensul posibilității de mișcare a punctului P după direcția normalei $\overline{n}$ la

suprafață. În cazul legăturii *bilaterale*, figura 2.5, *b*, sensul lui $\overline{N}$ se alege apriori, urmând ca acesta să rezulte din calcul (prin semnul mărimii scalare a intensității reacțiunii normale $\overline{N}$).

Mărimea reacțiunii $\overline{N}$ poate lua orice valoare în mod teoretic ($N \geq 0$ în cazul legăturii unilaterale, $N \geq 0$ sau $N \leq 0$ în cazul legăturii bilaterale), deoarece în mecanica teoretică corpurile sunt considerate rigide perfecte.

Forța $\overline{T}$, denumită *forță de legătură tangențială* sau *forță de frecare*, este generată de rezistența la alunecare a punctului pe suprafața de sprijin, rezistență cauzată de frecare. Are punctul de aplicație este în *P*, direcția cuprinsă în planul tangent la suprafață în punctul *P* și sensul invers tendinței de mișcare a punctului *P* pe suprafață.

Experimental s-a constata că mărimea forței de frecare $\overline{T}$ nu poate depăși o valoare limită T^l:

$$T \leq T^l. \tag{2.15}$$

Tot experimental s-a constatat că:

$$T^l = \mu N. \tag{2.16}$$

În relația (2.16) factorul de proporționalitate μ este un coeficient adimensional, denumit coeficient de frecare la alunecare.

Coulomb a constatat experimental că acest coeficient μ depinde de:

– natura corpurilor în zona de contact;

– gradul de prelucrare a suprafețelor corpurilor în zona de contact;

– existența sau lipsa unui material interpus între cele două corpuri;

și nu depinde de:

– mărimea suprafețelor de contact;

– viteza relativă a corpurilor.

Aceste observații sunt cunoscute sub denumirea de *legile lui Coulomb*. Ele au fost însă criticate, în special independența coeficientului μ de mărimea forței de legătură normale și de viteza relativă a celor două corpuri care alunecă unul față de celălalt.

Cercetări ulterioare au demonstrat că pentru valori foarte mari ale reacțiunii normale $\overline{N}$, μ nu mai este constant ci crește foarte lent cu *N*. De asemenea, Galton a demonstrat că μ depinde de viteza relativă a celor două corpuri, valoarea lui scăzând sensibil cu creșterea vitezei relative. În această situație coeficientul de frecare corespunzător vitezei $v = 0$ se numește *coeficient de aderență*.

Coeficentul de frecare μ mai depinde de temperatura corpurilor în

contact și de timpul cât au stat corpurile în contact.

Cu toate acestea, legile frecării rămân valabile în cadrul valorilor pe care le-a experimentat Coulomb.

Coeficientul de frecare μ se determină experimental cu ajutorul unui aparat numit *tribometru*. Un exemplu de tribometru este reprezentat de un plan înclinat ce poate să-și modifice ungiul de înclinare α (fig. 2.6).

Se constată că pentru valori ale unghiului α cuprinse între 0 și o valoare limită, punctul material rămâne în repaus. Acesta se explică prin faptul că rezultanta forțelor de legătură $\overline{R}$ face echilibrul greutății $\overline{G}$.

Fie φ valoarea unghiului α la care mișcarea punctului material începe să se producă. Deci pentru $\alpha \leq \varphi$ punctul material rămâne în repaus, iar pentru $\alpha > \varphi$ punctul material începe să lunece.

Se poate constata că:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{T}{N} \tag{2.17}$$

și dacă avem în vedere relația (2.16) rezultă:

$$\mathrm{tg}\varphi = \mu. \tag{2.15}$$

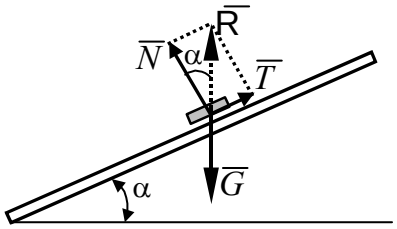


Fig. 2.6.

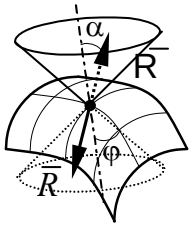


Fig. 2.7.

Din cele prezentate se observă că în cazul punctului material legat de o suprafață, condiția de echilibru este îndeplinită dacă rezultanta forțelor de legătură $\overline{R}$ face echilibrul rezultantei forțelor efectiv aplicate $\overline{R}$. Dacă se ține seama de relația (2.18), pentru ca echilibrul unui punct material să subziste, într-o anumită poziție pe o suprafață, trebuie ca direcția rezultantei forțelor active $\overline{R}$ să fie cuprinsă în interiorul unui con circular drept, denumit *con de frecare*, cu axa de simetrie după direcție normalei la

suprafață în poziția de echilibru și cu unghiul la vârf egal cu 2φ (fig. 2.7). Situația limită corespunde cazului când rezultanta forțelor efectiv aplicate $\overline{R}$ are direcția unei generatoare a conului (α = φ).

Deoarece pe lângă *necunoscutele principale ale problemei*, parametrii *x, y, z* ai poziției de echilibru, apar și *necunoscute secundare* – una este mărimea scalară a reacțiunii normale $\overline{N}$ și două sunt: direcția și mărimea forței de frecare $\overline{T}$ (în cazul general în spațiu), ecuațiile de echilibru ale punctului material *P* legat de o suprafață se scriu astfel:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \overline{F_i} + \overline{N} + \overline{T} = 0 & \text{(conditia statică)} \\ f(x, y, z) = 0 & \text{(conditia geometrică)} \\ T \le \mu N & \text{(conditia fizică)} \end{cases} \tag{2.19}$$

În acest caz problema are aspect mixt: se caută poziția de echilibru, precum și intensitatea forțelor de legătură.

Exprimarea analitică a condiției fizice de echilibru. Considerațiile geometrice făcute anterior permit să se exprime condițiile de echilibru cu frecare într-o formă foarte generală.

Fie ecuația suprafeței dată de relația (2.12). Se știe că gradientul unei forțe:

$$\nabla f = \text{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\bar{k} \tag{2.20}$$

reprezintă un vector care are direcția normalei $\overline{n}$ la suprafață. La echilibru, unghiul dintre acest vector și rezultatnta forțelor efectiv aplicate $\overline{R} = \bar{i}X + \bar{j}Y + \bar{k}Z$, trebuie să fie mai mic decât unghiul φ al conului de frecare.

Din produsul scalar al celor doi vectori:

$$\overline{R} \cdot \nabla f = |\overline{R}||\nabla f|\cos\alpha \tag{2.21}$$

rezultă:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{R} \cdot \nabla f}{|\overline{R}||\nabla f|} \tag{2.21'}$$

sau în funcție de proiecțiile pe axe ale celor doi vectori:

$$\cos\alpha = \frac{X\dfrac{\partial f}{\partial x} + Y\dfrac{\partial f}{\partial y} + Z\dfrac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}. \tag{2.22}$$

Dacă măsura unghiului dintre vectorul rezultant $\overline{R}$ și normala la suprafață, măs$\angle(\overline{R}, \nabla f) < \pi/2 \Rightarrow \cos\alpha > 0$, iar dacă măs$\angle(\overline{R}, \nabla f) > \pi/2$ $\Rightarrow \cos\alpha < 0$.

Din această cauză, în continuare vom considera $|\cos\alpha|$ a cărui valoare este:

$$|\cos\alpha| = \frac{\left|X\dfrac{\partial f}{\partial x} + Y\dfrac{\partial f}{\partial y} + Z\dfrac{\partial f}{\partial z}\right|}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}$$

Pentru echilibru trebuie ca $\alpha \le \varphi$ şi deci $|\cos\alpha| \ge \cos\varphi$. Având în vedere că $\mathrm{tg}\varphi = \mu \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$, condiția de echilibru se scrie:

$$\frac{\left|X\dfrac{\partial f}{\partial x} + Y\dfrac{\partial f}{\partial y} + Z\dfrac{\partial f}{\partial z}\right|}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \ge \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}. \tag{2.23}$$

Legături ideale sunt legăturile pentru care se neglijează frecările, și deci $\overline{T} = 0$, situație în care suprafața de care este legat punctul material se numește suprafață *lucie*. În acest situație, din prima ecuație (2.19) rezultă:

$$\overline{R} + \overline{N} = 0 \tag{2.24}$$

și cum se poate scrie:

$$\overline{N} = \lambda \nabla f = \lambda \,\mathrm{grad}\, f, \tag{2.25}$$

relația (2.24) devine:

$$\overline{R} + \lambda \nabla f = 0. \qquad (2.24')$$

Această ecuație vectorială, proiectată pe axele sistemului de referință ales, conduce la următoarele ecuații de echilibru scalare:

$$X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0; \quad Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0; \quad Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \qquad (2.26)$$

care conțin patru necunoscute: coordonapele punctului pentru poziția de echilibru x, y, z și parametrul λ. Pentru rezolvarea sistemului format din cele trei ecuații scalare (2.26) se utilizează și ecuația (2.12).

2.2.2. Punctul material legat de o curbă

În cazul punctului material legat de o curbă rezultanta forțelor de legătură $\overline{R}$ poate fi descompusă astfel (fig. 2.8): o forță $\overline{N}$ (*forța de*

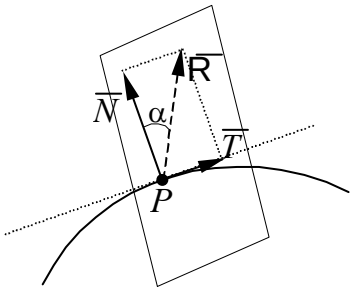


Fig. 2.8.

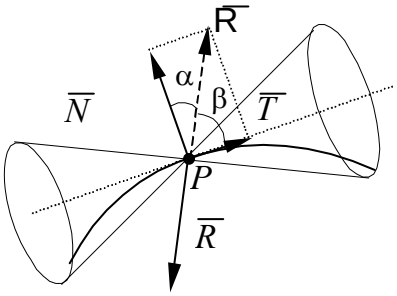


Fig. 2.9.

legătură normală sau reacțiunea normală) dirijată după direcția normalei la curbă în punctul P și forța $\overline{T}$ (*forța de frecare de alunecare*) dirijată după direcția tangentei la curbă în punctul P.

Observațiile cu privire la aceste forțe făcute în cazul punctului material legat de o suprafață sunt, în general, valabile și în acest caz, cu deosebirile următoare:

a) reacțiunea normală $\overline{N}$ poate avea orice direcție în planul normal la curbă în punctul P;

b) forța de frecare de alunecare $\overline{T}$ are direcția tangentei la curbă în punctul P și sensul opus sensului de mișcare sau tendinței de mișcare. Dacă din datele problemei nu rezultă sensul de mișcare, atunci se adoptă un sens arbitrar, iar pentru sensul contrar este suficient ca în rezultatele finale să se schimbe semnul coeficientului de frecare de lunecare μ.

În baza aceloraşi consideraţii geometrice asupra forţelor $\overline{N}$ şi $\overline{T}$ se poate scrie (fig. 2.8): $N = \mathscr{R}\cos\alpha$; $T = \mathscr{R}\sin\alpha$, de unde rezultă $T = N\mathrm{tg}\alpha$.

În situaţia limită, când frecarea nu mai poate genera o reacţiune tangenţială care să păstreze echilibrul punctului material, unghiul α atinge valoarea limită egală cu valoarea unghiului de frecare φ: $T^l = N\mathrm{tg}\varphi$. Pentru echilibru trebuie îndeplinită condiţia (2.15) care conduce la $\alpha \le \varphi$, dar, în acest caz unghiul α se măsoară faţă de o direcţie oarecare cuprinsă în planul normal la curbă în punctul P. Din această cauză se consideră complementul acestuia $\beta = \pi/2 - \alpha$, iar condiţia $\alpha \le \varphi$ capătă forma: $\pi/2 - \beta \le \varphi \Rightarrow \beta \ge \pi/2 - \varphi$ (fig. 2.9).

Rezultă că un punct material poate rămâne în echilibru pe o curbă, într-o anumită poziţie dacă direcţia rezultantei forţelor efectiv aplicate asupra punctului material $\overline{R}$ în poziţia de echilibru se găseşte în afara unui con circular drept ce are axa de simetrie identică cu tangenta la curbă în punctul P, semiunghiul la vârf $\beta = \pi/2 - \varphi$ şi care este denumit *con de frecare*.

În această situaţie condiţiile de echilibru ale punctului material legat de o curbă aspră se exprimă sub forma:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \overline{F_i} + \overline{N} + \overline{T} = 0 & \text{(conditia statică)} \\ \begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases} & \text{(conditiile geometrice)} \\ T \le \mu N & \text{(conditia fizică)} \end{cases} \tag{2.27}$$

În sistemul de ecuaţii (2.27) apar 6 necunoscute: parametrii x, y, z ce determină poziţia de echilibru; mărimea scalară şi direcţia reacţiunii normale $\overline{N}$; mărimea scalară a forţei de frecare $\overline{T}$. Pentru determinarea acestor necunoscute avem la dispoziţie: 3 ecuaţii scalare obţinute din condiţia de natură statică (2.27), 2 ecuaţii de natură geometrică şi o ecuaţie, la limită, obţinută din condiţia de natură fizică. Rezultă că problema echilibrului punctului material legat de curbă poate fi rezolvată.

Exprimarea analitică a condiţiei fizice de echilibru. O curbă poate fi exprimată prin ecuaţiile parametrice:

$$x = x(t);\ \ y = y(t);\ \ z = z(t). \tag{2.28}$$

Vectorul $\overline{v}$ dirijat în lungul tangentei la curbă în punctul P are expresia:

$$\overline{v} = \dot{x}\,\overline{i} + \dot{y}\,\overline{j} + \dot{z}\,\overline{k}$$

în care $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ reprezintă prima derivată în raport cu parametrul t a relațiilor (2.28) (mai târziu, în cadrul capitolului de cinematica punctului, se va constata ca vectorul $\overline{v}$ poartă numele de viteză, iar parametrul t reprezintă timpul).

Având în vedere notația (2.5) se poate scrie:

$$\cos\beta = \frac{\overline{R}\cdot\overline{v}}{|\overline{R}||\overline{v}|} = \frac{\dot{x}X + \dot{y}Y + \dot{z}Z}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}. \tag{2.29}$$

Deoarece, pentru echilibru $\beta \geq \pi/2 - \varphi$, adică $|\cos\beta| \leq \sin\varphi$ condiția de echilibru este:

$$\frac{|\dot{x}X + \dot{y}Y + \dot{z}Z|}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} \leq \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}. \tag{2.30}$$

Aplicații

A.2.1. Se consideră un punct material de greutate P, acționat printr-un fir care are la capete greutățile G și Q (fig. 2.10, *a*). Să se determine pozitia de echilibru, precizată de unghiurile α și β.

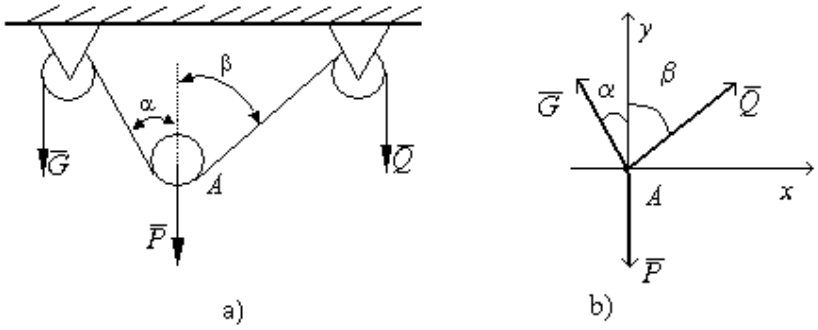


Fig.2.10.

Asupra punctului material acționează forțele precizate în figura 2.10, *b*. Deoarece cele teri forțe care acționează asupra punctului material formează un sistem de forțe coplanar, se pot scrie două ecuații de echilibru: ecuație de proiecție pe orizontală,

$$Q\sin\beta - G\sin\alpha = 0,$$

și ecuație de proiecție pe verticală,

$$Q\cos\beta - G\cos\alpha - P = 0.$$

Din cele două ecuații: $\sin\beta = \frac{G}{Q}\sin\alpha$; $\cos\beta = \frac{P - G\cos\alpha}{Q}$.

Înlocuind expresiile de mai sus în sistemul ecuațiilor de echilibru se obțin relațiile:

$$\frac{G^2}{Q^2}\sin^2\alpha + \frac{P^2 - 2PG\cos\alpha + G^2\cos^2\alpha}{Q^2} = 1.$$

$$G^2 + P^2 - 2PG\cos\alpha = Q^2 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{G^2 + P^2 - Q^2}{2PG}$$

$$\cos\beta = \frac{P}{Q} - \frac{G}{Q}\cdot\frac{G^2 + P^2 - Q^2}{2PG} \Rightarrow \cos\beta = \frac{P^2 + Q^2 - G^2}{2PQ}.$$

Deoarece funcția trigonometrică a unghiului γ trebuie să îndeplinească condiția $-1 \le \cos\gamma \le 1$, pentru ca soluțiile prezentate să aibă sens este necesar şi suficient ca:

$$-1 \le \frac{G^2 + P^2 - Q^2}{2PG} \le 1,\ -1 \le \frac{P^2 + Q^2 - G^2}{2PQ} \le 1.$$

Inegalitățile se mai pot scrie astfel:

$$|P - G| \le Q \le |P + G|;\ |P - Q| \le G \le |P + Q|$$

A.2.2. Un punct material greu de masă *m*, este așezat pe suprafața interioară aspră a unei calote sferice de rază *R*; coeficientul de frecare dintre punctul material și suprafața sferică este μ. Se cere să se studieze echilibrul punctului material indicându-se condițiile de echilibru.

Datorită frecării, punctul material poate rămâne în echilibru și în altă poziție decât cea evidentă, din punctul cel mai de jos al calotei sferice (poziția de echilibru stabil) (fig. 2.11, *a*).

a) Pentru a determina pozițiile în care punctul material rămâne în repaus, presupunem că punctul material se află într-o poziție oarecare definită de coordonatele: R, α, γ.

Asupra punctului material acționează forța efectiv aplicată $m\,\overline{g}$ și forțele de legătură: $\overline{N}$ – reacțiunea normală (al cărui sens este dat de caracterul unilateral al legăturii) și $\overline{T}$ – forța de frecare (după o direcție oarecare conținută în planul tangent la sferă în punctul *P*).

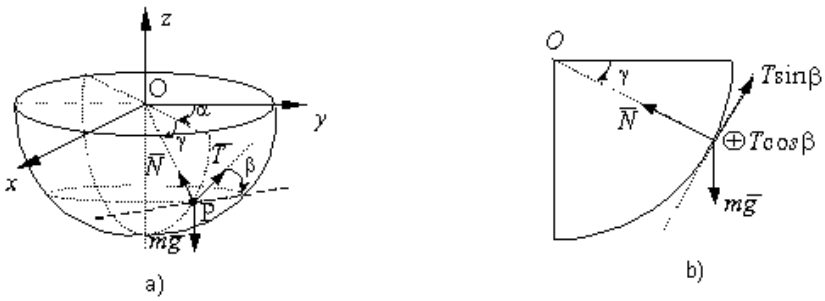


Fig. 2.11.

Din condiția vectorială de echilibru:

$$m\overline{g} + \overline{N} + \overline{T} = 0 \qquad \text{(a)}$$

se obțin ecuațiile scalare de echilibru:

$$\begin{cases} mg\sin\gamma - N = 0 \\ mg\cos\gamma - T\sin\beta = 0 \\ T\cos\beta = 0 \end{cases} \qquad \text{(b)}$$

care conțin 4 necunoscute: necunoscutele geometrice γ și β și necunoscutele fizice N și T (mărimile lor scalare). Deoarece numărul necunoscutelor depășește numărul ecuațiilor (b), este necesar o ecuație suplimentară.

O ecuație suplimentară poate fi dată dată de restricția de natură geometrică, impusă de legătură (punctul material nu poate părăsi suprafața interioară a sferei): $r = R$. Dar, această condiție a fost utilizată, implicit, atunci când unghiul dintre direcția forței de greutate $m\overline{g}$ și tangenta la meridian în punctul P a fost egal cu γ (fig. 2.11).

O a doua ecuație suplimentară se obține din condiția fizică considerată la limită:

$$T = \mu N. \qquad \text{(c)}$$

Deoarece T nu poate avea mărimea scalară egală cu zero, din ultima ecuație (b) rezultă $\cos\beta = 0 \Rightarrow \beta = \pi/2$. După eliminarea necunoscutelor secundare N și T rezultă :

$$\mathrm{tg}\gamma_0 = 1/\mu$$

și deci:

$$\gamma_0 = \mathrm{arctg}(1/\mu).$$

Poziția de echilibru stabil fiind dată de valoarea $\gamma = \pi/2$, rezultă că, pentru echilibru $\gamma \in [\gamma_0 ; \pi/2]$. Deoarece poziția de echilibru nu depinde de unghiul α, punctul material rămâne în repaus pe calota sferică mărginită de cercul de rază $r_c = R\cos\gamma_0 = \dfrac{R\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$.

Valoarea forțelor de legătură, la limită, este:

$$N = mg\sin\gamma_0 = mg\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}; \qquad T = mg\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

b) Pentru determinarea poziției de echilibru se poate folosi realția (2.21) în care, pentru situația considerată, rezultanta forțelor efectiv aplicate este: $\overline{R} = -mg\,\overline{k}$.

Cum ecuația suprafeței sferice față de sistemul de axe considerat (fig.2.11) este $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$, versorul normalei la suprafața sferică în punctul P este $\overline{n} = 2x\,\overline{i} + 2y\,\overline{j} + 2z\,\overline{k}$. Înlocuind în ecuația (2.21) rezultă:

$$\frac{\left|-mg\cdot 2z\right|}{\left|G\right|\cdot 2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}},$$

care conduce la relația: $\left|z\right| \geq \dfrac{R}{\sqrt{1+\mu^2}}$, adică: $z \leq -\dfrac{R}{\sqrt{1+\mu^2}}$.

Deoarece $z = -R\sin\gamma$, prin prelucrarea inegalității anteriaore se obține poziția de echilibru: $\gamma_0 = \mathrm{arctg}\,(1/\mu)$.

A.2.3. O bilă grea de masă m poate culisa pe o sârmă aspră (coeficient de frecare μ) îndoită sub forma unui arc de parabolă $y = x^2/2p$ cu axa verticală (fig. 2.12). Se cere să se determine pozițiile în care bila rămâne în repaus pe sârmă.

Pentru reprezentarea forțelor de legătură trebuie avut în vedere următoarele aspecte:

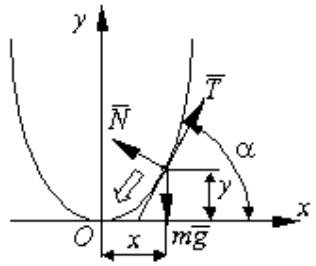


Fig. 2.12.

– bila sub acțiunea forței efectiv aplicate $m\,\overline{g}$ nu poate aluneca decât în jos din care cauză forța de lunecare $\overline{T}$ are sensul indicat în figura 2.12;

– deoarece foarța efectiv aplicată $m\,\overline{g}$ și forța de frecare $\overline{T}$ sunt cuprinse în planul xOy, forța $\overline{N}$ nu poate avea decât o singură componentă cea cuprinsă în planul vertical ce conține arcul de parabolă, iar sensul cel din figura 2.12.

Proiectând ecuația vectorială de echilibru:

$$m\,\overline{g} + \overline{N} + \overline{T} = 0 \qquad \text{(a)}$$

pe direcția normalei și pe direcția tangentei la curbă se obține:

$$N - mg\cos\alpha = 0 \;;\; T - mg\sin\alpha = 0. \qquad \text{(b)}$$

Restricția geometrică este dată de ecuația parabolei: $y = x^2/2p$.

Se poate observa că parametrii x și y ai poziției de echilibru nu sunt expliciți în relațiile de natură statică (b). Ei pot fi însă explicitați deoarece:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{p} = \mathrm{tg}\alpha \qquad \text{(c).}$$

În baza acestei relații se pot elimina necunoscutele N și T din relațiile (b) și se pot înlocui în relația de natură fizică pentru situația limită: $T = \mu N$. Se obțin valorile parametrilor corespunzătoare poziției de echilibru:

$$x_0 = \mu p; \quad y_0 = \mu^2 p/2. \qquad \text{(d)}$$

Pe arcul din stânga al parabolei, deoarece sensul forței de frecare $\overline{T}$ se schimbă față de axa Ox condiția de echilibru (d) devine:

$$x_0 = -\,\mu p; \quad y_0 = \mu^2 p/2. \text{ (e)}$$

Teste

T.2.1. Dacă un punct material legat de o curbă aspră are rezultanta forțelor efectiv aplicate $\overline{R}$ situată în interiorul conului frecării atunci:

a) punctul material se află în echilibru;
b) punctul material este în repaus;
c) punctul material se află în echilibru la limită;
d) punctul material nu se află în echilibru.

T.2.2. Dacă un punct material legat de o suprafață aspră are rezultanta forțelor efectiv aplicate $\overline{R}$ situată în interiorul conului frecării atunci:

a) punctul material se află în echilibru;
b) punctul material este în repaus;
c) punctul material se află în echilibru la limită;
d) punctul material nu se află în echilibru.

T.2.3. Un punct material obligat să rămână tot timpul în contact cu o curbă strâmbă are:

a) trei grade de libertate;
b) două grade de libertate;
c) un grad de libertate;
d) nici un grad de libertate.

T.2.4. Un punct material obligat să rămână în permanență în contact cu o suprafață are:

a) trei grade de libertate;
b) două grade de libertate;
c) un grad de libertate;
d) nici un grad de libertate.

T.2.5. În cazul unui punct material legat de o suprafață aspră forțele efectiv aplicate și forțele de legătură pot alcătui:

a) un sistem de forțe oarecare;
b) un sistem de forțe concurente;
c) un sistem de forțe coplanare;
d) un sistem de forțe paralele.

T.2.6. Dacă asupra unui punct material *P* acționează următoarele forțe: $\overline{F}_1 = 3\overline{i} - 5\overline{j} + 2\overline{k}$; $\overline{F}_2 = \overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$; $\overline{F}_3 = -2\overline{i} + 3\overline{j} - 6\overline{k}$; $\overline{F}_4 = 2\overline{k}$; $\overline{F}_5 = -2\overline{i} + 3\overline{j} + \overline{k}$ atunci:

a) $\overline{R} = \overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$ și punctul material *P* este în echilibru;

b) $\overline{R} = \overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$ și punctul material *P* nu este în echilibru;

c) $\overline{R} = 0$ și punctul material *P* este în echilibru;

d) $\overline{R} \neq 0$ și punctul material *P* nu este în echilibru.

T.2.7. Pentru ca punctul material *P* de masă *m* situat pe un plan înclinat aspru (coeficient de frecare μ), cu linia de cea mai mare pantă ce face ungiul α cu orizontala, și acționat de forță orizontală $\overline{F}$ (fig. 2.13) să rămână în echilibru trebuie ca:

$$a)\, mg\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mu}{1-\mu\mathrm{tg}\alpha} \le F \le mg\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mu}{1+\mu\mathrm{tg}\alpha};\; b)\; mg\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mu}{1+\mu\mathrm{tg}\alpha} \le F \le mg\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mu}{1-\mu\mathrm{tg}\alpha};$$

$$c)\; mg\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mu}{1-\mu\mathrm{tg}\alpha} \ge F \ge mg\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mu}{1+\mu\mathrm{tg}\alpha};\quad d)\; mg\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mu}{1+\mu\mathrm{tg}\alpha} \ge F \ge mg\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mu}{1-\mu\mathrm{tg}\alpha}.$$

T.2.8. Un punct material *M* de greutate neglijabilă se află pe un inel semicircular luciu și este acționat de forțele *F* și *Q* așa cum se arată în figura 2.14. Atunci când punctul *M* se află în echilibru:

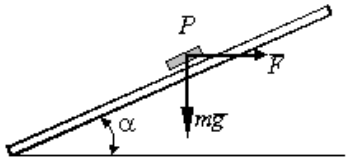


Fig. 2.13

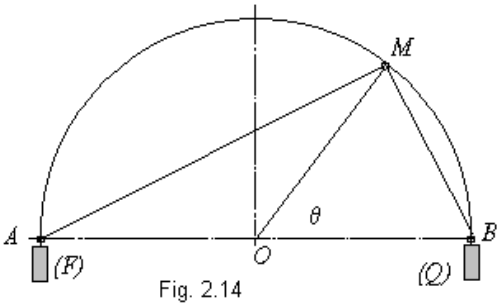


Fig. 2.14

$$a)\; \mathrm{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{F}{Q};\qquad b)\; \mathrm{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{Q}{F};$$

$$c)\; \mathrm{tg}\theta = \frac{F}{Q};\qquad d)\; \mathrm{tg}\theta = \frac{Q}{F}.$$

T.2.9. Pentru cazul punctului material precizat la punctul 8 valoarea forței de legătură normale în poziția de echilibru este:

$$a)\; N = \sqrt{P^2+2Q^2};\qquad b)\; N = \sqrt{P^2-Q^2};$$

$$c)\; N = \sqrt{P^2-2Q^2};\qquad d)\; N = \sqrt{P^2+Q^2}.$$

T.2.10. Conform legilor lui Coulomb, coeficientul de frecare de alunecare μ :

a) depinde de natura corpurilor în zona de contact;

b) depinde de gradul de prelucrare al suprafețelor corpurilor în zona de

contact;
c) nu depinde de mărimea suprafețelor în contact;
d) nu depinde de viteza relativă a corpurilor aflate în contact.

T.2.11. Valoarea maximă a forței de frecare de alunecare este:
a) $T > \mu N$;
b) $T = \mu N$;
c) $T < \mu N$;
d) $T \neq \mu N$.

T.2.12. Forțele aplicate unui punct material sunt:
a) vectori liberi;
b) vectori alunecători;
c) vectori legați;
d) vectori paraleli.

3. STATICA SISTEMELOR DE PUNCTE MATERIALE

Prin sistem de puncte materiale se înțelege o mulțime de puncte materiale (discrete sau continue) a căror mișcare, față de un sistem de referință oarecare, se studiază împreună, din anumite motive, neesențiale.

3.1. FORŢE APLICATE UNUI SISTEM DE PUNCTE MATERIALE

În cadrul forțelor aplicate unui sistem de puncte materiale se pot distinge două tipuri de forțe: forțe exterioare și forțe interioare.

a) **Forțe exterioare** sunt acele forțe care reprezintă acțiunea unor corpuri din afara sistemului asupra diferitelor puncte materiale din sistem. Ele sunt notate $\overline{F}_i^{ext}$ (i = 1, 2, ..., n) unde n reprezentând numărul de puncte materiale ce alcătuiesc sistemul. Forțele exterioare pot fi: *forțe exterioare efectiv aplicate* $\overline{F}_{is,a}^{ext}$ și *forțe exterioare de legătură* $\overline{F}_{ik,l}^{ext}$ care, în baza principiului legături-lor, sunt introduse prin ruperea legăturilor de natură geometrică pe care punctele le au cu sistemul de repere. Indicii s și k identifică numărul forțelor efectiv aplicate, respectiv de legătură, care acționează asupra punctului material i. Evident:

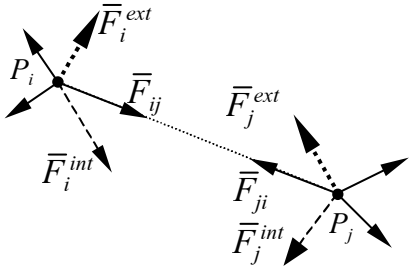


Fig. 3.1

$$\overline{F}_i^{ext} = \sum_s \overline{F}_{is,a}^{ext} + \sum_k \overline{F}_{ik,l}^{ext} ; \qquad (3.1)$$

b) **Forțe interioare**. Ele reprezintă interacțiunile dintre diferitele puncte materiale ce alcătuiesc sistemul. Sunt notate: $\overline{F}_{ij}$, $\overline{F}_{ji}$ (i, j=1,2,...,n; $i \neq j$) (fig. 3.1).

Rezultanta acțiunilor diferitelor puncte P_j din sistem asupra punctului P_i se determină astfel:

$$\overline{F}_i^{int} = \sum_{j=1}^{n} \overline{F}_{ij} \; ; \quad (i \neq j) \qquad (3.2)$$

În baza principiului egalității acțiunii cu reacțiunea, forțele $\overline{F}_{ij}$ și $\overline{F}_{ji}$ sunt egale în modul două câte două, se manifestă pe aceeași direcție și sunt de sensuri contrare.

Forțele interioare $\overline{F}_{ij}$ se pot manifesta la distanță, ca *forțe interioare efectiv aplicate* $\overline{F}_{ij}^{a}$ (de atracție sau de respingere) sau prin contact, ca *forțe interioare de legătură* $\overline{F}_{ij}^{l}$.

Se identifică:

– rezultanta forțelor interioare efectiv aplicate asupra punctului P_i:

$$\overline{F}_{i,a}^{int} = \sum_{j=1}^{n} \overline{F}_{ij}^{a} \; ; \quad (i \neq j) \qquad (3.3)$$

– rezultanta forțelor interioare de legătură asupra punctului P_i:

$$\overline{F}_{i,l}^{int} = \sum_{j=1}^{n} \overline{F}_{ij}^{l} \; ; \quad (i \neq j). \qquad (3.4)$$

Rezultă că acțiunea celorlalte puncte materiale ce alcătuiesc sistemul asupra punctului P_i este:

$$\overline{F}_i^{int} = \overline{F}_{i,a}^{int} + \overline{F}_{i,l}^{int} = \sum_{j=1}^{n} \overline{F}_{ij}^{a} + \sum_{j=1}^{n} \overline{F}_{ij}^{l} \; ; \quad (i \neq j). \qquad (3.5)$$

Forțele interioare efectiv aplicate pun în evidență influența reciprocă a punctelor materiale asupra mișcării lor. Această influență se face fără să se reducă numărul gradelor de libertate de mișcare a punctelor. În schimb, forțele interioare de legătură arată că libertatea de mișcare a punctului P_i față de P_j (și reciproc) este împiedicată pe direcția $\overline{P_i P_j}$.

Forețele interioare formează sisteme de forțe în echilibru deoarece, după cum s-a mai sublinat, ele sunt două câte două egale și direct opuse. Cu toate acestea forțele interioare nu pot fi neglijate, deoarece, după cum se va arăta mai departe, lucrul mecanic al acestor forțe este diferit de zero, cu excepția cazului sistemelor perfect rigide.

3.2. ECHILIBRUL UNUI SISTEM DE PUNCTE MATERIALE ACŢIONAT DE FORTE

Fie un sistem de n puncte materiale acționat de forțe exterioare și ale cărui puncte (unele sau chiar toate) au legături de natură geometrică cu corpurile sistemului de referință. Echilibrul acestui sistem este realizat atunci când el se află în repaos față de un sistem de referință. Deoarece acest lucru implică repaosul fiecărui punct material în parte față de sistemul de referință considerat rezultă că, pentru studiul echilibrului sistemului de puncte materiale este necesar izolarea și studierea fiecărui punct material sub acțiunea forțelor exterioare și a forțelor interioare ce îi revin.

Condiția necesară și suficientă pentru existența echilibrului unui punct material i din cadrul sistemului de n puncte materiale, este:

$$\overline{F}_i^{ext} + \overline{F}_i^{\text{int}} = 0, \tag{3.6}$$

în care $\overline{F}_i^{ext}$ se calculează cu relația (3.1), iar $\overline{F}_i^{\text{int}}$ cu relația (3.5).

Se obțin astfel n ecuații vectoriale ce se transpun în $3n$ relații scalare, care vor constitui ecuațiile de echilibru ale sistemului de puncte materiale. Aceste ecuații de echilibru scalare vor fi completate cu ecuațiile furnizate de aspectele geometric și fizic.

3.3. FIRUL

Foarte mulți autori consideră firele ca fiind corpuri care, din punct de vedere geometric, au două dimensiuni neglijabile și care sunt perfect flexibile și torsionabile, ele neputând prelua eforturi de încovoiere și de răsucire.

Firul poate fi modelat însă și ca un sistem continuu format din puncte

materiale infinit apropiate de mase neglijabile dispuse geometric în "lanț" și legate, două câte două, rigid între ele. În acest fel firul reprezintă un sistem de puncte materiale a căror dispunere mutuală fizico-geometrică este analogă, în sensul că trecerea de la un punct la altul se poate face în mod continuu (adică din punct de vedere matematic, această trecere poate fi descrisă prin variațuia unei funcții continue de coordonatele curente ale punctului). În această situație este suficientă studierea echilibrului unui punct și extinderea rezultatelor la celelalte puncte, printr-un calcul integral (sau cu diferențe finite), constantele de integrare urmând a se determina din condiții extreme, adică aplicând relațiile obținute punctelor de la limita geometrică a domeniului ocupat de sistemul de puncte materiale.

Această modelare susține proprietățile atribuite firului: perfect flexibil și torsionabil, el neputând prelua eforturi de încovoiere și de răsucire.

Forțele interioare, efectiv aplicate, care se exercită între punctele învecinate ale unui fir – de exemplu forțele datorate unor acțiuni intermoleculare – nu pot fi determinate prin calcul mecanic, cel mult pe cale experimentală. Forțele interioare ce pot fi calculate sunt forțele de legătură interioare care apar ca urmare a forțelor exterioare ce se aplică asupra firului.

Aceste forțe vor fi puse în evidență, în baza principiului forțelor de legătură prin ruperea legăturii dintre două puncte alăturate. Aceasta presupune secționarea firului între cele două puncte. Forțele de legătură interioare ce apar (fig. 3.2, *a*) vor fi egale și de sensuri opuse, reprezentând acțiunile reciproce ale celor două puncte, direcția forțelor fiind cea a dreptei ce le unește, tangentă la curba pe care firul o face datorită forțelor exterioare efectiv aplicate și a forțelor exterioare de legătură. Sensul forțelor trebuie să conducă la o solicitare de întindere a celor două bucăți de fir.

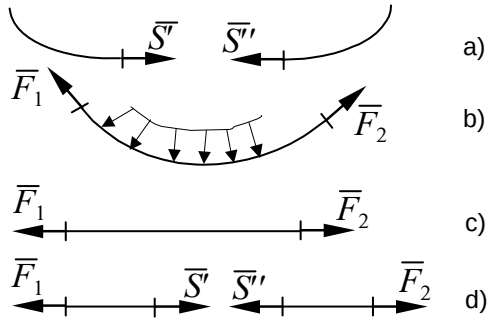


Fig. 3.2.

Conform principiului egali-tății acțiunii cu reacțiunea se poate scrie:

$$\left|\overline{S}'\right| = \left|\overline{S}''\right| = S \qquad (3.7)$$

în care S reprezintă efortul din fir.

Sub acțiunea forțelor efectiv aplicate și a legăturilor firul ia o formă specifică solicitărilor (fig. 3.2, *b*). Această formă este deci o formă de echilibru și ea poartă numele de *curba funiculară* a

sistemului de forțe dat.

Dacă încărcarea firului se compune numai din două forte $\overline{F_1}$ și $\overline{F_2}$, aplicate la capetele acestuia (fig. 3.2, *c*), atunci pentru ca echilibrul să existe:

– cele două forțe trebuie să fie egale în modul, să aibă același suport (dreapta ce unește cele două puncte de la capetele firului) și sensuri contrare;

– sensul forțelor trebuie să fie astfel încât să întindă firul.

Forma de echilibru a firului în acest caz este linia dreaptă ce unește punctele de la capetele sale, iar efortul în fir este, în orice secțiune a acestuia, același și egal ca intensitate cu mărimea comună a forțelor exterioare (fig. 3.2, *d*), adică:

$$F_1 = S = S' = F_2 = S. \tag{3.8}$$

Se constată că în cazul în care un punct material este legat de un fir această „legătura" este de fapt o legătură interioară între punct și un punct al firului. Ruperea legăturii implică introducerea unei forțe de legătură care are suportul după direcția firului și cu sensul astfel încât să reprezinte o acțiune de întindere a acestuia.

3.3.1. Frecarea firelor

Fie un fir înfășurat pe suprafața unui cilindru circular drept, aspru, cuprins în planul secțiunii drepte a cilindrului și acționat de forțe de intensități diferite la capetele sale (fig. 3.3). Coeficientul de frecare între fir și cilindru este μ. Condițiile de echilibru ale acestui fir sunt studiate sub denumirea de frecarea firelor.

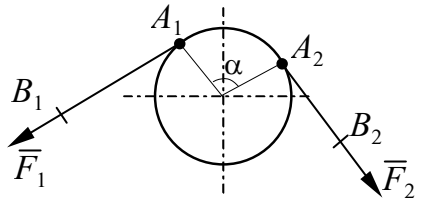


Fig. 3.3

Unghiul de înfășurare al firului este unghiul la centru θ, corespunzător arcului de cerc pe care este înfășurat firul (între punctele A_1 și A_2). Dacă firul este înfășurat numai pe arcul $\overline{A_1A_2}$ atunci unghiul de înfășurare este $\theta = \alpha$; dacă firul este înfășurat de *n* ori pe cilindru atunci $\theta = 2\pi n + \alpha$.

Se consideră că firul este în repus față de cilindru. Cilindrul poate fi în repaus sau poate avea o mișcare de rotație în jurul axului său.

Problema care se pune este de a găsi relația între forțele ce acționează la capetele firului, $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$, pentru ca acesta să nu lunece peste cilindru.

Dacă se secționează firul între A_1 și B_1, respectiv între A_2 și B_2, oriunde am face-o, eforturile din fir sunt egale, respectiv, cu forțele de la capete (fig. 3.4, *a*):

$$S_1 = F_1 \ ; S_1 = F_2. \tag{3.9}$$

Pentru determinarea relației căutate se separă din fir, la distanța *s* de unul din capete (distanță corespunzătoare unghiului la centru φ) o porțiune elementară d*s*, egală cu arcul $\overline{AA'}$, subîntins unghiului la centru dφ (fig.3.4, *a*).

Forțele ce acționează asupra acestei porțiuni elementare de fir sunt:

– $\overline{S}$ și $\overline{S}'$ ($\overline{S}'$ de mărime $S' = S + \mathrm{d}S$) – forțe interioare de legătură;

– $\mathrm{d}\overline{N}$ și $\mathrm{d}\overline{T}$ – forțe exterioare de legătură. Forța $\mathrm{d}\overline{T}$ se opune mișcării posibile a firului peste cilindru. Deoarece această mișcare este posibilă în ambele sensuri (adică, atât spre $A_1 \Leftrightarrow F_1 > F_2$ cât și spre $A_2 \Leftrightarrow F_1 < F_2$) se alege un sens arbitrar. În cazul de față s-a ales sensul spre A_2. În consecință forța elementară de frecare de lunecare $\mathrm{d}\overline{T}$ este orientată spre *A* (fig. 3.4, *b*).

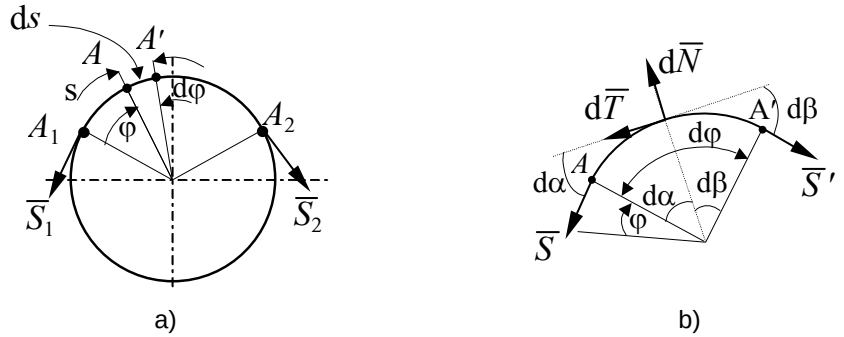


Fig. 3.4.

Echilibrul se exprimă prin două ecuații obținute prin proiectarea tuturor forțelor pe direcția lui $\mathrm{d}\overline{N}$, respectiv a lui $\mathrm{d}\overline{T}$:

$$\begin{cases} \mathrm{d}N - S\sin\mathrm{d}\alpha - S'\sin\mathrm{d}\beta = 0 \\ \mathrm{d}T + S\cos\mathrm{d}\alpha - S'\cos\mathrm{d}\beta = 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

Dacă se fac aproximările: $\sin\mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}\alpha$ și $\cos\mathrm{d}\alpha = 1$, respectiv $\sin\mathrm{d}\beta = \mathrm{d}\beta$ și $\cos\mathrm{d}\beta = 1$, iar $S' = S + \mathrm{d}S$, atunci:

$$\begin{cases} \mathrm{d}N - S\mathrm{d}\alpha - (S + \mathrm{d}S)\mathrm{d}\beta = 0 \\ \mathrm{d}T + S - (S + \mathrm{d}S) = 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

Termenul $\mathrm{d}S\mathrm{d}\beta$ poate fi neglijat în raport cu $\mathrm{d}S$ și deci:

$$\begin{cases} \mathrm{d}N = S(\mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}\beta) = S\mathrm{d}\varphi \\ \mathrm{d}T = \mathrm{d}S \end{cases} \tag{3.12}$$

Condiția de echilibru dată de aspectul fizic al problemei $\mathrm{d}T = \mu\mathrm{d}N$ în baza ecuațiilor (3.12) capătă forma:

$$\mathrm{d}S = \mu S\mathrm{d}\varphi,$$

care prin integrare conduce la: $\ln S = \mu\varphi + C$ sau $S = \mathrm{e}^{\mu\varphi + C} = \mathrm{e}^{C}\mathrm{e}^{\mu\varphi} = A\mathrm{e}^{\mu\varphi}$. Deci:

$$S = A\mathrm{e}^{\mu\varphi}. \tag{3.13}$$

În baza condițiilor la limită: pentru $\varphi = 0 \Rightarrow S = F_1$; pentru $\varphi = \theta \Rightarrow S = F_2$, rezultă condiția de echilibru căutată:

$$F_2 = F_1\,\mathrm{e}^{\mu\theta}. \tag{3.14}$$

Valoarea lui F_2 dată de relația (3.14) este o valoare limită corespunzătoare cazului când echilibrul este pe punctul de a se pierde. Pentru ca echilibrul (relativ) dintre fir și cilindru să subziste este necesar ca:

$$F_2 \le F_1\,\mathrm{e}^{\mu\theta}. \tag{3.15}$$

Pentru posibilitatea mișcării în sens contrar condiția de echilibru capătă forma:

$$F_2 \ge F_1\,\mathrm{e}^{-\mu\theta}. \tag{3.15′}$$

Condiția generală de echilibru este:

$$F_1\,\mathrm{e}^{-\mu\theta} \le F_2 \le F_1\,\mathrm{e}^{\mu\theta}. \tag{3.16}$$

Dacă se neglijează frecarea între fir și cilindru, μ=0, efortul este același în tot lungul firului : $S = F_1 = F_2$.

3.3.2. Echilibrul firelor

În cazul în care firul, suspendat la capete de două puncte fixe, este solicitat de forțe concentrate sau repartizate (de exemplu greutatea proprie) în diferitele sale puncte, studiul echilibrului său urmărește determinarea formei de echilibru adică a curbei funiculare.

Problemele care se pun în acest caz sunt:

– determinarea formei curbei funiculare, adică forma curbei cu care poate fi asimilat firul sub acțiunea forțelor aplicate asupra lui și aflate în echilibru;

– determinarea forțelor de legătură exterioare și a efortului din fir într-o secțiune oarecare a acestuia (determinarea valorii maxime a acesteia în vederea efectuării unui calcul de rezistență al firului).

Acest gen de probleme se întâlnesc frecvent în practică (cablurile mașinilor și instalațiilor de ridicat, cablurile de susținere ale telecabinelor, cablurile pentru transportul aerian al energiei electrie etc.) iar rezolvarea lor este prezentată în manuale sau tratate mai extinse ca volum.

Aplicații

A.3.1. Două puncte materiale de greutăți P și Q, așezate pe două plane înclinate ce fac cu orizontala unghiurile α și β, sunt legate cu un fir trecut peste un scripete așa cum se poate observa în figura 3.5, *a*. Să se determine valoarea raportului greutăților P/Q corespunzătoare poziției de echilibru dacă înre punctele materiale și planele înclinate există frecare, iar coeficientul de frecare este μ.

Pentru determinarea condiției care trebuie îndeplinită astfel încât sistemul format din cele două puncte materiale să se afle în echilibru este suficient să se izoleze fiecare punct deoarece condiția necesară și suficientă ca sistemul de puncte materiale să fie în echilibru este ca fiecare din punctele cel alcătuiesc să se afle, la rândul lor, în echilibru.

In figura 3.5, *b* sunt reprezentate forțele ce acționează asupra celor două puncte după ce au fost rupte legăturile și introduse forțele de legătură, pentru cazul în care tendința de mișcare a punctelor este cea precizată în figură.

Se identifică următoare tipuri de forțe: forțe efectiv aplicate – $\overline{P}$ și $\overline{Q}$; forțe de legătură exterioare – $\overline{N}_1, \overline{T}_1$ și $\overline{N}_2, \overline{T}_2$; forțele de legătură interioare - $\overline{S}_1, \overline{S}_2$.

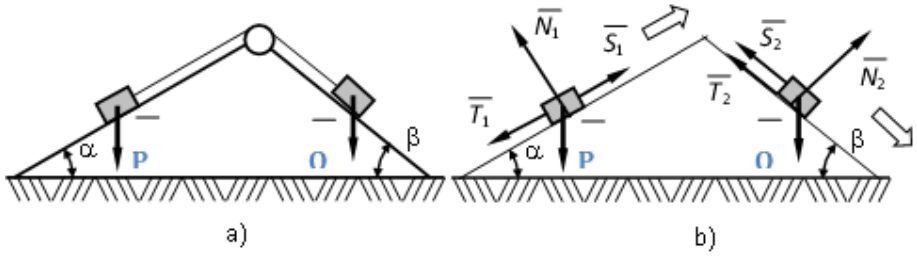


Fig. 3.5.

Deoarece forțele ce acționează asupra celor două puncte materiale sunt forțe concurente, condițiile de echilibru de natură statică constau în două ecuații scalare de echilibru pentru fiecare punct, scrise în raport cu două axe perpendiculare (de obicei cele două axe au direcțiile forțelor $\overline{N}$ și $\overline{T}$):

$$\begin{cases} S_1 - T_1 - P\sin\alpha = 0 \\ N_1 - P\cos\alpha = 0 \end{cases} \tag{a}$$

$$\begin{cases} -S_2 - T_2 + Q\sin\beta = 0 \\ N_2 - Q\cos\beta = 0 \end{cases} \tag{b}$$

Condițiile de natură fizică pentru cele două puncte:

$$\begin{cases} T_1 \le \mu N_1 \\ T_2 \le \mu N_2 \end{cases} \tag{c}$$

trebuiesc îndeplinite în același timp deoarece dacă unul din puncte își pierde echilibru și începe să lunece, atunci și celălalt punct începe să lunece pierzându-și echilibru.

Se constată că sunt 7 necunoscute (cea de a șaptea fiind raportul P/Q). Pentru a putea rezolva problema trebuiesc impuse condiții suplimentare asupra sitemului de forțe. Forțele de legătură interioare $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$ reprezintă tensiunile din firul ce leagă cele două puncte și care este trecut peste un scripete (fig. 3.5, *a*). Dacă se neglijează frecarea dintre fir și scripete atunci se poate scrie relația:

$$S_1 = S_2; \tag{d}$$

dacă însă această frecare nu se poate neglija atunci între cele două marimi S_1 și S_2 se poate scrie o relație de forma (3.15) sau (3.15′), bineînțeles dacă se cunoaște coeficientul de frecare dintre fir și scripete.

Dacă se admite că relația (d) este adevărată atunci prin înlocuirea în sistemul de inecuații (c) a mărimilor N_1, N_2, T_2 și T_2 determinate din ecuațiile (a) și (b), și prin rezolvarea acestuia se obține:

$$\frac{P}{Q} \geq \frac{\sin\beta - \mu\cos\beta}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}. \qquad \text{(e)}$$

Pentru cazul în care tendința de mișcare a punctelor este inversă decât cea considerată în figura 3.5, *b*, condiția de echilibru se obține schimbând în inecuația (e) sensul inegalității și semnul coeficientului de frecare μ:

$$\frac{P}{Q} \leq \frac{\sin\beta + \mu\cos\beta}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}. \qquad \text{(f)}$$

Rezultă că sistemul de puncte materiale se află în echilibru dacă:

$$\frac{\sin\beta - \mu\cos\beta}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} \leq \frac{P}{Q} \leq \frac{\sin\beta + \mu\cos\beta}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}. \qquad \text{(e)}$$

Deoarece $P/Q > 0$, pentru ca problema să existe trebuie să fie îndeplinite condițiile: $\mathrm{tg}\alpha > \mu$ și $\mathrm{tg}\beta > \mu$.

A.3.2. Un fir perfect flexibil și inextensibil este trecut peste doi cilindrii așa cum se arată în figura 3.6, *a*. De capetele firului sunt suspendate două greutăți *Q* și *F*. Cunoscând coeficienții de frecare dintre cei doi cilindrii și fir, μ_1 și μ_2, să se determine valoarea greutății F astfel încât sistemul să rămână în echilibru.

Echilibrul există atâta timp cât firul rămâne în repaus față de cei doi cilindrii, fapt pentru care aceștia s-au izolat prin secționarea firului în zona dintre ei introducându-se forța de legătură (tensiunea) $\overline{S}$, așa cun se arată în figura 3.6, *b*. Deoarece echilibrul se poate pierde fie în sensul forței $\overline{Q}$, fie

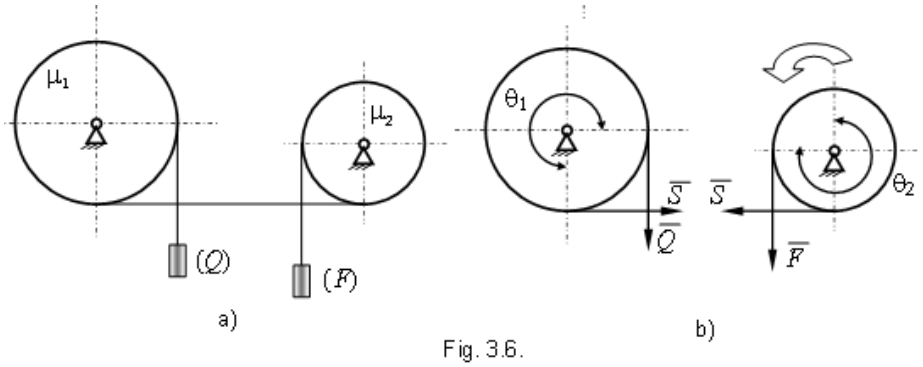


Fig. 3.6.

în sensul forței $\overline{F}$, s-a ales tendința de alunecare a firului în sensul forței $\overline{F}$ (fig. 3.6, *b*). În consecință, echilibrul se pierde atunci când $F > S > Q$.

Având în vedere relația (3.15) condițiile de echilibru la limită pentru cei doi cilindrii sunt:

$$\begin{aligned} F &= Se^{\theta_2\mu_2} \\ S &= Qe^{\theta_1\mu_1}. \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

Din figura 3.6, *b* unghiurile de înfășurate θ_1 și θ_2 au mărimile $\theta_1 = \theta_2 = 3\pi/4$, și prin eliminarea lui *S* din cele două ecuații (a) rezultă valoarea limită a lui *F* pentru ca firul să nu alunece în raport cu cilindrii în sensul ales:

$$F = Qe^{\theta_1\mu_1+\theta_2\mu_2} = Qe^{\frac{3\pi}{4}(\mu_1+\mu_2)}. \qquad \text{(b)}$$

Pentru ca echilibrul să existe forța $\overline{F}$ trebuie să îndeplinească condiția:

$$F \le Qe^{\frac{3\pi}{4}(\mu_1+\mu_2)}. \qquad \text{(c)}$$

În situația în care echilibrul se pierde în sensul forței $\overline{Q}$, condiția de echilibru se obține din relația (c) în care se modifică sensul inegalității și semnul coeficienților de frecare, adică:

$$F \ge Qe^{-\frac{3\pi}{4}(\mu_1+\mu_2)}. \qquad \text{(d)}$$

Rezultă că valoarea greutății *F* pentru care sistemul rămâne în echilibru este:

$$Qe^{-\frac{3\pi}{4}(\mu_1+\mu_2)} \le F \le Qe^{\frac{3\pi}{4}(\mu_1+\mu_2)}. \qquad \text{(e)}$$

A.3.3. Un corp de greutate *G* este situat pe un plan orizontal aspru, coeficientul de frecare fiind $\mu_1 = 1/2$. De corp este legat un fir perfect flexibil și inextensibil, ce face cu orizontala unghiul $\alpha = \pi/6$ și care este trecut peste un scripete fix. La capătul celălălt al firului se află o greutate *P* (fig. 3.7, *a*). Stiind că între fir și scripte coeficientul de frecare este $\mu_2 = 3/\pi$, să se determine valoarea lui *P* astfel încât corpul să se afle pe punctul de a începe să se miște.

Sistemul format din corp și fir rămâne în echilibru atâta timp cât fiecare din cele două elemente care îl compun rămân în echilibru. Rezultă necesitatea separării lor și studierea condițiilor de echilibru pentru fiecare în parte. În figura 3.7, b sunt prezentate corpul și firul sub acțiunea forțelor

efectiv aplicate ($\overline{G}, \overline{P}$), a forțelor de legătură exterioare ($\overline{N}, \overline{T}$) și a forțelor de legătură inteioare ($\overline{S}$). Sensul forței de frecare $\overline{T}$ a fost ales în concordanță cu posibilitatea de mișcare pe planul o rizontal a corpului.

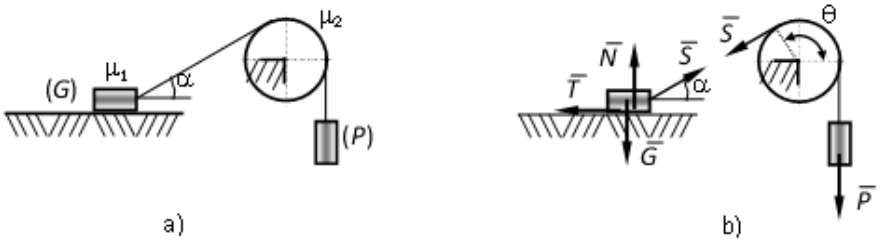


Fig. 3.7.

Pentru corp, ecuațiile de echilibru atunci când acesta este pe punctul de a începe să alunece pe planul orizontal, au forma:

$$\begin{cases} -G + N + S\sin\alpha = 0 \\ T - S\cos\alpha = 0 \\ T = \mu_1 N \end{cases} \qquad \text{(a)}$$

Deoarece firul trecut peste scripetele fix poate aluneca numai în sensul forței $\overline{P}$, relația (3.15) în acest caz capătă forma:

$$P = Se^{\mu_2\theta}. \qquad \text{(b)}$$

După eliminarea necunoscutelor secundare (N, T, S) din ecuațiile (a) și (b) rezultă valoarea lui P pentru care corpul de greutate G este pe punctul de a începe să alunece pe planul orizontal:

$$P = \frac{\mu_1 G}{\cos\alpha + \mu_1 \sin\alpha} e^{\mu_2\theta}. \qquad \text{(c)}$$

Având în vedere că unghiul de înfășurare al firului peste scripetele fix este $\theta = \pi/3 + \pi/2 = 2\pi/3$, după înlocuirea în egaliatea (c) a valorilor numerice rezulta $P = 5{,}41G$.

Teste

T.3.1. In cadrul unui sistem discret de puncte materiale forțele interioare sunt:

a) două câte două egale;
b) două câte două egale și de același sens;
c) două câte două egale, cu același suport și de sensuri contrare;
d) două câte două egale și paralele.

T.3.2. Pentru ca un fir solicitat de două forțe aplicate la capetele acestuia să fie în echilibru trebuie ca:

a) sensul forțelor să fie astfel încât să întindă firul;
b) cele două forțe să fie egale și direc opuse;
c) cele două forțe să aibă sensuri contrare;
d) cele două forțe să aibă același suport și sensuri contrare.

T.3.3. În cadrul unui sistem de n puncte materiale numărul ecuațiilor de echilibru de natură statică sunt:

a) $2n$ și sunt suficiente pentru determinarea condițiilor de echilibru;
b) $3n$ și sunt suficiente pentru determinarea condițiilor de echilibru;
c) $2n$ și se completează cu relațiile de natură geometrică și fizică;
d) $3n$ și se completează cu relațiile de natură geometrică și fizică.

T.3.4. Un fir este trecut peste un cilindru aspru (coeficient de frecare $\mu = 0{,}1628$) de mai multe ori, așa cum se poate vedea în figura 3.8. La capetele firului sunt aplicate două forțe $\overline{Q}$ și $\overline{P}$ ($P = 10Q$). La echilibru, numărul de înfășurări complete ale firului peste cilindru este:

a) $n = 4$; *b*) $n = 5$;
c) $n = 3$; *d*) $n = 2$.

T.3.5. Două sfere mici A și B, fiecare de greutate G, sunt legate printr-un fir inextensibil și așezate peste un semicilindru fix (fig. 3.9). Unghiul la centru a al arcului AB este cunoscut. Ungiul de frecare al sferelor de cilindru este φ. Unghiul θ, în poziția de echilibru a celor două sfere, trebuie să îndeplinească condiția:

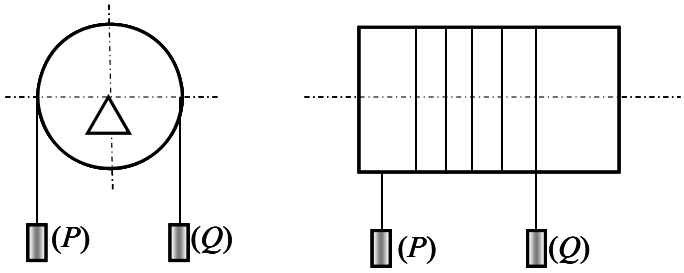


Fig. 3.8.

a) $\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}+\varphi \geq \theta \geq \frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}-\varphi$

b) $\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}+\varphi \geq \theta \geq \frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}-\varphi$

c) $\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}-\varphi \geq \theta \geq \frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}+\varphi$

d) $\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}-\varphi \geq \theta \geq \frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}+\varphi$

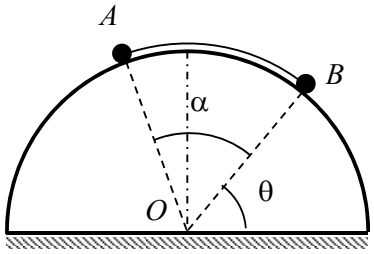


Fig. 3.9.

T.3.6. Pe bara *ABC*, curbată sub 90° ca în figura 3.10, lunecă fără frecare două culise de greutate *P* respectiv *G*, unite prin firul de lungime *l*. În poziția de echilibru unghiul θ dintre fir și bara *AB* și tensiunea *S* din fir au valorile:

a) $\tan\theta = \frac{P\sqrt{3}}{G}; S = \frac{1}{2}\sqrt{P^2+3G^2}$;

b) $\tan\theta = \frac{P\sqrt{3}}{G}; S = \frac{1}{2}\sqrt{G^2+3P^2}$;

c) $\tan\theta = \frac{G\sqrt{3}}{P}; S = \frac{1}{2}\sqrt{G^2+3P^2}$;

d) $\tan\theta = \frac{G\sqrt{3}}{P}; S = \frac{1}{2}\sqrt{P^2+3G^2}$;

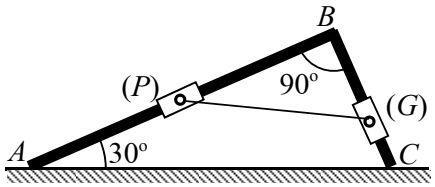


Fig. 3.10.

T.3.7. Condiția necesară și suficientă pentru existența echilibrului unui punct material *i* din cadrul sistemului de *n* puncte materiale, este:

a) $\overline{F}_{i,a}^{int} + \overline{F}_{i,l}^{int} = 0;$

b) $\sum_{s} \overline{F}_{is,a}^{ext} + \sum_{k} \overline{F}_{ik,l}^{ext} = 0$

c) $\overline{F}_{i}^{ext} + \overline{F}_{i}^{\text{int}} = 0;$

d) $\overline{F}_{i}^{int} = 0.$

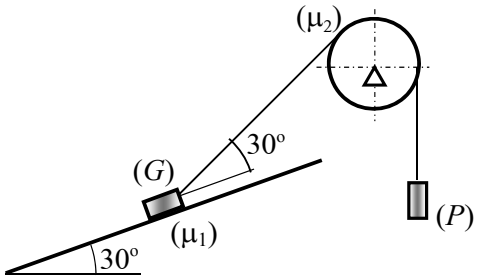


Fig. 3.11.

T.3.8. Un corp de greutate *G* este situat pe un plan înclinat aspru (coeficientul de frecare între corp și plan $\mu_1 = 0{,}5$) și este menținut în echilibru prin intermediul unui fir perfect flexibil și inextensibil trecut peste un cilindru (coeficientul de frecare între fir și cilindru $\mu_2 = 1/\pi$) de greutatea *P*. La echilibru:

a) $0{,}363G \le P \le 1{,}924G$;

b) $0{,}263G \le P \le 1{,}824G$;

c) $0{,}163G \le P \le 1{,}724G$;

d) $0{,}063G \le P \le 1{,}624G$.

4. STATICA SOLIDULUI RIGID

Conceptul de continuum material a fost prezentat în paragraful 1.1. În mecanica teoretică se consideră că diferitele distanțe dintre punctele materiale ale continuumului rămân constante oricât de mare ar fi intensitatea forțelor ce acționează asupra punctelor lui.

Acest model al corpului material a fost introdus pentru simplificarea, la început, a calculelor, fără ca rezultatele să se îndepărteze prea mult de realitate.

Această modelare definește în mecanica teoretică conceptul de *solid rigid* și are la bază *principiul rigidității* cu cele două aspecte ale sale:

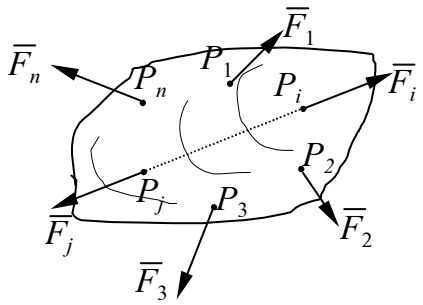


Fig. 4.1.

– *aspectul geometric* (fig. 4.1) prin care se afirmă că distanța dintre două puncte P_i și P_j ale corpului rămâne invariabilă;

– *aspectul fizic* care afirmă că două forțe $\overline{F}_i$ și $\overline{F}_j$ egale ca mărime, aplicate în punctele P_i și P_j, , având același suport ($\overline{P_iP_j}$) și sensuri contrare (se spune că cele două forțe sunt egale și direct opuse), nu au nici-un efect mecanic asupra corpului.

4.1. OPERAŢII ELEMENTARE DE ECHIVALENŢĂ

Prin operații elementare de echivalență se înțeleg acele operații simple ce se pot aplica unui sistem de forțe dat care acționează asupra unui solid rigid, fără să se modifice efectul mecanic pe care sistemul de forțe îl are asupra acestuia.

Aceste operații elementare de echivalență sunt definite în continuare.

1) Introducerea într-un sistem de forțe aplicate unui solid rigid (sau scoaterea dintr-un sistem de forțe) a unor perechi de forțe coliniare egale și direct opuse nu modifică efectul mecanic pe care îl are sistemul de forțe dat asupra solidului rigid (fig. 4.1);

2) Efectul mecanic al unei forțe ce aparține unui sistem de forțe aplicat unui solid rigid rămâne neschimbat dacă forța este deplasată pe suportul ei (forța poate luneca pe suportul ei). În punctul P_j (fig. 4.2), situat pe suportul forței $\overline{F}_i$, în baza primei operații elementare de echivalență, se introduc două forțe egale și direct opuse $\overline{F}_j$ și $\overline{F}_j'$, ce au suportul $\overline{P_iP_j}$. Mărimea celor două forțe se alege egală cu cea a forței $\overline{F}_i$: $\left|\overline{F}_j\right| = \left|\overline{F}_j'\right| = \left|\overline{F}_i\right|$. Dar, tot în baza primei operații elementare de echivalență, forțele $\overline{F}_i$ și $\overline{F}_j'$ se pot elimina. Rezultatul obținut: forța $\overline{F}_i$ a alunecat pe suportul său din punctul P_i în punctul P_j.

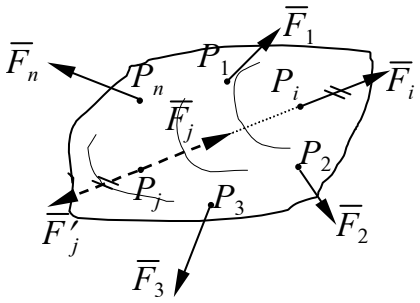


Fig. 4.2.

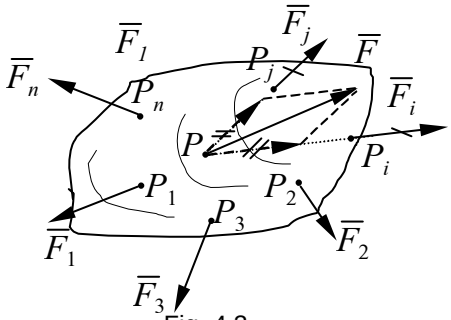


Fig. 4.3.

3) În baza primelor două operații elementare de echivalență și a principiului paralelogramului, se observă că, două sau mai multe forțe aplicate asupra unui solid rigid, în puncte diferite ale acestuia, dar care au suporturile concurente, pot fi înlocuite cu o singură forță al cărei suport trece prin punctul lor de intersecție și este egală cu rezultanta lor. Astfel în figura 4.3 forțele $\overline{F}_i$ și $\overline{F}_j$ aplicate în punctele P_i, respectiv P_j, au suporturile concurente în punctul P. Aplicând a doua operație elementară de echivalență cele două forțe sunt deplasate pe suporturile lor până când punctele lor de

aplicație ajung în P. Aplicând principiul paralelogramului (prezentat în parag. 2.1.1) cele două forțe se înlocuiesc cu rezultanta lor $\overline{F} = \overline{F}_i + \overline{F}_j$.

Operațiile elementare de echivalență ne vor permite să demonstrăm când două sisteme de forțe aplicate independent asupra aceluiași solid rigid au același efect mecanic.

Pentru aceasta este necesar să se introducă noțiunea de moment al unui vector în raport cu un punct, respectiv în raport cu o axă.

4.2. MOMENTUL UNEI FORŢE ÎN RAPORT CU UN PUNCT

Prin definiție, momentul unei forțe în raport cu un punct, notat $\mathcal{M}_O\overline{F}$ este un vector:

– aplicat în punctul O (numit și *pol*) ;

– perpendicular pe planul definit de polul O și suportul forței $\overline{F}$;

– cu sensul ales astfel încât un observator așezat în O, orientat după direcția momentului, să vadă vectorul $\overline{F}$ că rotește (în mod aparent) planul $(O, \overline{F})$ în sensul pozitiv ales (în cadrul acestui curs sensul pozitiv este sensul trigonometric);

– cu mărimea egală cu produsul $F \cdot d$, unde d este distanța de la punctul O la suportul forței $\overline{F}$ (fig. 4.4).

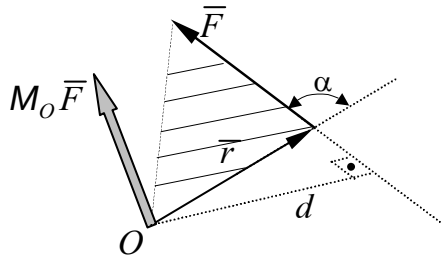


Fig. 4.4.

Expresia vectorială a momentului unei forțe în raport cu un punct este:

$$\mathcal{M}_O\overline{F} = \overline{r} \times \overline{F}, \tag{4.1}$$

în care $\overline{r}$ este vectorul de poziție (față de polul O) al punctului de aplicație al forței $\overline{F}$ (fig. 4.4).

Simbolul $\mathcal{M}$ trebuie privit ca un „operator” aplicat vectorului $\overline{F}$, așa încât momentul forței $\overline{F}$ este o consecință directă a operației efectuate asupra lui $\overline{F}$.

Mărimea (norma) momentului unei forțe în raport cu un punct este:

$$\left|\mathrm{M}_O\overline{F}\right| = |\overline{r}||\overline{F}|\sin\alpha = Fd\,, \qquad (4.2)$$

ea fiind exprimată prin produsul dintre mărimea forței și brațul acesteia, adică dintre mărimea forței și distanța de la punctul în raport cu care se calculează momentul la suportul forței (v. fig. 4.4)

4.2.1. Proprietăţile momentului unei forţe în raport cu un punct

Din definiția momentului unei forțe în raport cu un punct reies mai multe consecințe:

a) Momentul unei forțe în raport cu un punct este nul când:

– forța $\overline{F}$ are intensitatea nulă;

– suportul forței $\overline{F}$ trece prin polul *O*.

b) Momentul unei forțe în raport cu un punct nu se modifică dacă forța lunecă pe suportul ei. Conform cu figura 4.5 se poate constata că:

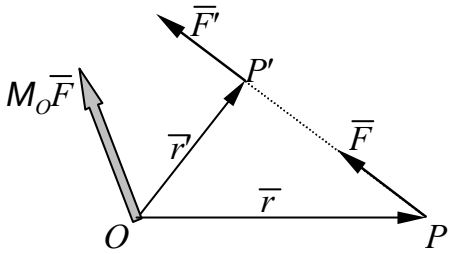


Fig. 4.5.

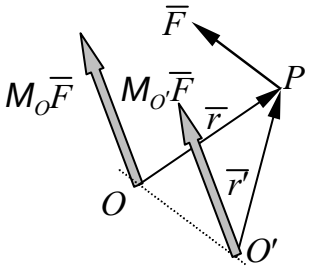


Fig. 4.6.

$$\mathcal{M}_O\overline{F}' = \overline{r}'\times\overline{F}' = (\overline{r}+\overline{PP'})\times\overline{F} = \overline{r}\times\overline{F} + \overline{PP'}\times\overline{F} = \overline{r}\times\overline{F} = \mathcal{M}_O\overline{F}\,, \quad (4.3)$$

deoarece: $\overline{F} = \overline{F}'$; $\overline{r}' = \overline{r} + \overline{PP'}$ și $\overline{PP'}\times\overline{F} = 0$ (vectori coliniari).

c) Momentele unei forțe $\overline{F}$ în raport cu punctele situate pe o dreaptă paralelă cu suportul ei, sunt egale. Conform cu figura 4.6 se poate scrie:

$$\mathcal{M}_{O'}\overline{F} = \overline{r}'\times\overline{F} = (\overline{O'O} + \overline{r})\times\overline{F} = \overline{r}\times\overline{F} = \mathcal{M}_O\overline{F}\,. \qquad (4.4)$$

d) Momentele a două forțe egale și direct opuse sunt egale și direct opuse (fig. 4.7).

Dacă $\overline{F} = -\overline{F}'$ atunci:

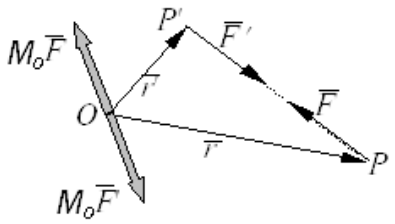


Fig. 4.7.

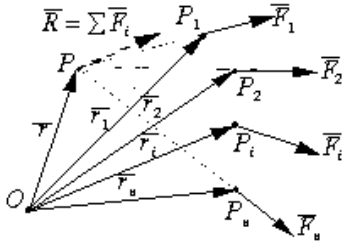


Fig. 4.8.

$$\mathcal{M}_O\overline{F}' = \overline{r}' \times \overline{F}' = (\overline{r} + \overline{PP'}) \times \overline{F}' = \overline{r} \times \overline{F}' + \overline{PP'} \times \overline{F}' = -\overline{r} \times \overline{F} = -\mathcal{M}_O\overline{F}\,. \tag{4.5}$$

În baza celor prezentate rezultă că două forțe ($\overline{F}$ și $\overline{F}'$) sunt egale și direct opuse atunci când:

$$\overline{F} + \overline{F}' = 0 \quad \text{și} \quad \mathcal{M}_O\overline{F} + \mathcal{M}_O\overline{F}' = 0. \tag{4.6}$$

e) Momentul forței rezultante a unor forțe concurente, în raport cu un punct, este egal cu suma momentelor forțelor concurente în raport cu același punct (*teorema lui Varignon*).Conform figurii 4.8 se poate scrie:

$$\mathcal{M}_O\overline{R} = \overline{r} \times \overline{R} = \overline{r} \times (\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \ldots + \overline{F}_n) = \overline{r} \times \overline{F}_1 + \overline{r} \times \overline{F}_2 + \ldots + \overline{r} \times \overline{F}_n =$$
$$= \mathcal{M}_O\overline{F}_1 + \mathcal{M}_O\overline{F}_2 + \ldots + \mathcal{M}_O\overline{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{M}_O\overline{F}_i\,. \tag{4.7}$$

4.2.2. Expresia analitică a momentului unei forţe în raport cu un punct

Dacă punctul O în raport cu care se calculează momentul forței $\overline{F}$ are coordonatele (x_0, y_0, z_0) față de sistemul de referință $O'xyz$ (fig. 4.9), iar punctul de aplicație al forței $\overline{F}$ este $P(x, y, z)$, atunci momentul forței $\overline{F} = \overline{i}\,F_x + \overline{j}\,F_y + \overline{k}\,F_z$ are următoarea expresie analitică:

$$\mathcal{M}_O\overline{F} = \bar{r} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = [(y - y_0)F_z - (z - z_0)F_y]\,\bar{i} +$$

$$+ [(z - z_0)F_x - (x - x_0)F_z]\,\bar{j} + [(x - x_0)F_y - (y - y_0)F_x]\,\bar{k} \qquad (4.8)$$

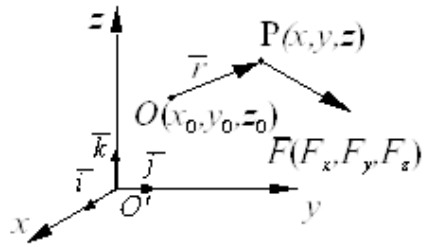


Fig. 4.9.

Dacă se notează cu M_x, M_y, M_z componentele momentului forței $\overline{F}$ în raport cu punctul O pe axele sistemului de referință în conformitate cu (4.8) se poate scrie:

$$M_x = (y - y_0)F_z - (z - z_0)F_y;$$
$$M_y = (z - z_0)F_x - (x - x_0)F_z; \qquad (4.9)$$
$$M_z = (x - x_0)F_y - (y - y_0)F_x.$$

Dacă $O \equiv O'$, adică sistemul de referință are originea în O, atunci relațiile (4.9) devin:

$$M_x = yF_z - zF_y;$$
$$M_y = zF_x - xF_z; \qquad (4.10)$$
$$M_z = xF_y - yF_x.$$

4.3. MOMENTUL UNEI FORŢE ÎN RAPORT CU O AXĂ

Proiecția pe o axă Δ a momentului unei forțe $\overline{F}$ în raport cu un punct O ce aparține axei, se numește momentul forței $\overline{F}$ în raport cu axa Δ. El se notează $\mathcal{M}_\Delta\overline{F}$ și este exprimat prin relația:

$$\mathcal{M}_\Delta\overline{F} = \mathrm{pr}(\mathcal{M}_O\overline{F})_\Delta = (\mathcal{M}_O\overline{F})\cdot\bar{\delta} = (\bar{r} \times \overline{F})\cdot\bar{\delta} \qquad (4.11)$$

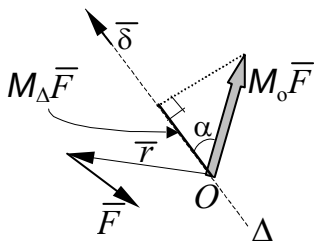


Fig. 4.10.

unde $\overline{\delta}$ este versorul axei Δ (fig. 4.10). Se poate dovedi ușor că punctul O în raport cu care se calculează $\mathcal{M}_O \overline{F}$, se poate lua oriunde pe axa Δ, valoarea momentului $\mathcal{M}_\Delta \overline{F}$ rămânând neschimbată.

Din cele prezentate rezultă că momentul unei forțe în raport cu o axă este o mărime scalară, al cărei semn depinde de mărimea unghiului α dintre $\mathcal{M}_O \overline{F}$ și versorul $\overline{\delta}$ (fig. 4.10)

4.3.1. Proprietăţile momentului unei forţe în raport cu o axă

Din definiția momentului unei forțe în raport cu o axă se pot deduce mai multe concluzii:

a) Momentul unei forțe în raport cu o axă este nul dacă:

– intensitatea forței este nulă;

– suportul forței este coplanar cu axa (intersectează axa sau este paralelă cu ea);

b) Momentul unei forțe în raport cu o axă rămâne neschimbat dacă forța lunecă pe suportul ei. Această proprietate este evidentă deoarece $\mathcal{M}_O \overline{F}$ nu se modifică (v.par. 4.2.1, *b*);

c) Momentele a două forțe $\overline{F}$ și $\overline{F}'$ egale și direct opuse, în raport cu aceeași axă, sunt egale și de semne diferite:

$$\mathcal{M}_\Delta \overline{F}' = (\mathcal{M}_O \overline{F}') \cdot \overline{\delta} = (-\mathcal{M}_O \overline{F}) \cdot \overline{\delta} = -\mathcal{M}_\Delta \overline{F} \qquad (4.12)$$

în baza relației (4.5)

d) Suma algebrică a momentelor în raport cu o axă a unor forțe ce au suporturile concurente într-un punct este egală cu momentul în raport cu acea axă a rezultantei forțelor. Acestă proprietate este o consecință a proprietății *e*) enunțată în paragraful 4.2.1 și a definiției momentului unei forțe în raport cu o axă.

4.3.2. Expresia analitică a momentului unei forţe în raport cu o axă

Dacă versorul $\overline{\delta}$ al axei Δ are cosinuși directori (l, m, n) în sistemul de axe $O'xyz$ cu notațiile anterioare (fig. 4.11) rezultă:

$$\mathcal{M}_\Delta \overline{F} = \overline{\delta} \cdot (\overline{r} \times \overline{F}) = \begin{vmatrix} l & m & n \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = [(y - y_0)F_z - (z - z_0)F_y]l +$$

$$+ [(z - z_0)F_x - (x - x_0)F_z]m + [(x - x_0)F_y - (y - y_0)F_x]n \quad (4.13)$$

Dacă axa Δ trece prin originea O' a sistemului de referință, expresia (4.13) capătă forma:

$$\mathcal{M}_\Delta \overline{F} = (yF_z - zF_y)l + (zF_x - xF_z)m + (xF_y - yF_x)n \quad (4.14)$$

Momentele forței $\overline{F}$ în raport cu axele sistemului de referință $O'xyz$ sunt:

$$\mathcal{M}_{O'x} \overline{F} = yF_z - zF_y = M_x;$$

$$\mathcal{M}_{O'y} \overline{F} = zF_x - xF_z = M_y; \quad (4.15)$$

$$\mathcal{M}_{O'x} \overline{F} = xF_y - yF_x = M_z.$$

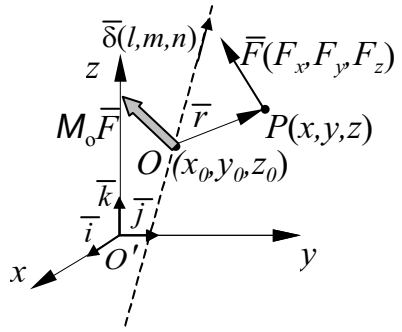


Fig. 4.11.

Din compararea relațiilor (4.10) și (4.15) se constata că momentele forței $\overline{F}$ în raport cu axele sistemului de referință sunt de fapt componentele momentului forței $\overline{F}$ calculat în raport cu originea sistemului de referință.

Observație. Din cele prezentate anterior rezultă că atât momentul unei forțe în raport cu un punct $\mathcal{M}_O \overline{F}$, cât și momentul unei forțe în raport cu o axă $\mathcal{M}_\Delta \overline{F}$ rămân neschimbate dacă li se aplică operațiile elementare de echivalență.

4.4. TORSORUL UNUI SISTEM DE FORŢE ÎN RAPORT CU UN PUNCT

Prin definiție, torsorul unui sistem de forțe de n forțe $\overline{F}_i$, (i = 1,2,...,n) notat $T_O(\overline{F}_i)$, este format din doi vectori (fig. 4.12):

– vectorul rezultant, $\overline{R}$, aplicat în punctul O și egal cu suma vectorilor forță $\overline{F}_i$:

$$\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i ;$$

– vectorul moment rezultant, $\overline{M}_O$, aplicat în punctul O și egal cu suma momentelor forțelor $\overline{F}_i$ (aplicate în punctele P_i), în raport cu O:

$$\overline{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{M}_O \overline{F}_i .$$

Punctul O, față de care se calculează momentul rezultant, poartă numele de originea torsorului.

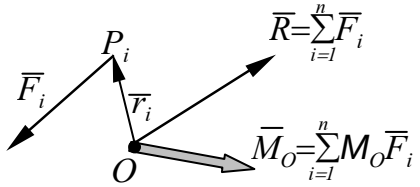


Fig. 4.12.

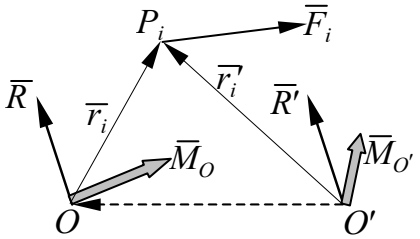


Fig. 4.13.

Cei doi vectori nu au o semnificație fizică dar ei pot să caracterizeze împreună sistemul de forțe $\overline{F}_i$ din punctul de vedere al efectului mecanic pe care acesta îl are asupra solidului rigid.

Vectorul rezultant $\overline{R}$ nu depinde de vreun sens pozitiv ales, pe când vectorul moment rezultant $\overline{M}_O$ depinde de sensul pozitiv ales pentru rotația axelor sistemului de referință adoptat.

4.4.1. Proprietăţi ale torsorului unui sistem de forţe

a) **Variația torsorului cu schimbarea originii**. Se poate observa că vectorul rezultant $\overline{R}$ al torsorului $T_O(\overline{F}_i)$ nu se schimbă atunci când torsorul se calculează față de un alt punct O' (fig. 4.13) deoarece:

$$\overline{R}' = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i = \overline{R} \,. \tag{4.16}$$

Se spune că vectorul rezultant este un invariant față de punctul în raport cu care se calculează torsorul unui sistem de forțe.

În ceea ce privește vectorul moment rezultant:

$$\overline{M}_{O'} = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{M}_{O'} \overline{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i' \times \overline{F}_i = \sum_{i=1}^{n} (\overline{O'O} + \overline{r}_i) \times \overline{F}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \overline{O'O} \times \overline{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i \times \overline{F}_i = \overline{O'O} \times \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i + \overline{M}_O = \overline{O'O} \times \overline{R} + \overline{M}_O \,.$$

Rezultă că torsorul sistemului de forțe $\overline{F}_i$ calculat față de punctul O' are următoarea expresie în funcție de componentele torsorului $T_O(\overline{F}_i)$:

$$T_{O'}(\overline{F}_i) \begin{cases} \overline{R}' = \overline{R} \\ \overline{M}_{O'} = \overline{M}_O + \overline{O'O} \times \overline{R} \end{cases} . \tag{4.17}$$

b) **Scalarul torsorului**. Dacă multiplicăm relația vectorului moment rezultant din (4.17) scalar cu $\overline{R}$ rezultă:

$$\overline{M}_{O'} \cdot \overline{R} = \overline{M}_O \cdot \overline{R} + (\overline{O'O} \times \overline{R}) \cdot \overline{R}$$

Deoarece produsul mixt $(\overline{O'O} \times \overline{R}) \cdot \overline{R} = 0$ (doi vectori sunt coliniari) rezultă:

$$\overline{M}_{O'} \cdot \overline{R} = \overline{M}_O \cdot \overline{R} \tag{4.18}$$

Produsul $\overline{M}_O \cdot \overline{R}$ poartă numele de scalarul torsorului și este și el un invariant al sistemului de forțe $\overline{F}_i$ în raport cu schimbarea originii torsorului.

c) **Proiecția lui $\overline{M}_O$ pe direcția lui $\overline{R}$**. Dacă relația (4.18) se multiplică cu $1/\left|\overline{R}\right|$ se obține:

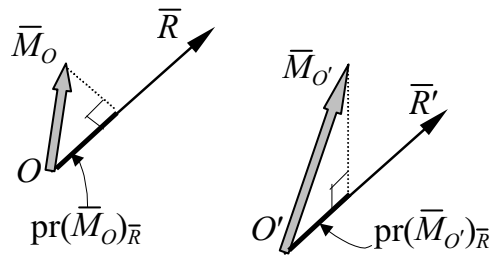


Fig. 4.14.

$$\overline{M}_{O'} \cdot \frac{\overline{R}}{\left|\overline{R}\right|} = \overline{M}_O \cdot \frac{\overline{R}}{\left|\overline{R}\right|} \qquad (4.19)$$

în care se recunoaște proiecția vecto-rului moment rezultant $\overline{M}_O$, respec-tiv $\overline{M}_{O'}$ pe direcția vectorului rezul-tant $\overline{R}$ (fig. 4.14), adică:

$$\mathrm{pr}(\overline{M}_O)_{\overline{R}} = \mathrm{pr}(\overline{M}_{O'})_{\overline{R}}\,.$$

Se deduce că, indiferent de punctul în raport cu care se calculează torsorul unui sistem de forțe, proiecția vectorului moment rezultant pe direcția vectorului rezultant este aceeași.

d) **Torsorul minim și axa centrală**. Să descompunem vectorii moment rezultant $\overline{M}_O$ și $\overline{M}_{O'}$ după direcția vectorului rezultant și după o direcție normală la acesta (fig. 4.15). Se poate constata că $\overline{M}_O$ diferă de $\overline{M}_{O'}$ prin componenta normală la $\overline{R}$ deoarece s-a arătat că $\left|\overline{M}'_O\right| = \left|\overline{M}'_{O'}\right|$.

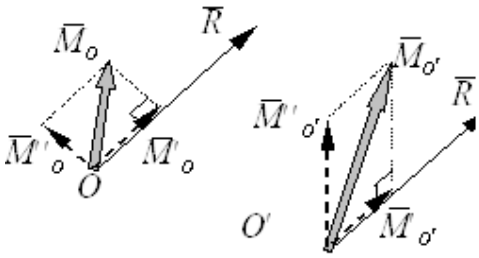


Fig. 4.15.

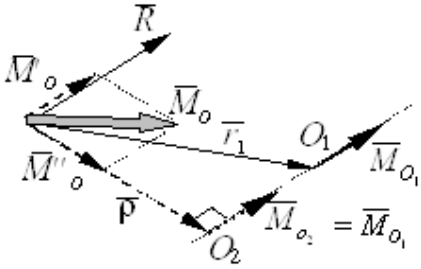


Fig. 4.16.

Deoarece proiecția unui vector pe o direcție oarecare este mai mică decât norma lui, înseamnă că, dacă ar exista un punct O_1 în care vectorul moment rezultant $\overline{M}_{O_1}$ să aibă direcția vectorului rezultant $\overline{R}$, atunci vectorul $\overline{M}_{O_1}$ ar avea cea mai mică normă, egală cu proiecția lui pe suportul lui $\overline{R}$. Dacă se poate dovedi existența unui astfel de punct, atunci el nu ar fi

unic, ci vor exista mai multe puncte situate pe o dreaptă paralelă cu $\overline{R}$ ce trece prin O_1, față de care vectorul moment rezultant are norma cea mai mică.

Un astfel de punct se poate găsi prin vectorul de poziție $\overline{r}_1$ al punctului O_1 față de punctul O, vector cu originea în punctul față de care s-a calculat torsorul $T_O(\overline{F}_i)$ (fig. 4.16).

În baza relației (4.17) vectorul moment rezultant în O_1 este:

$$\overline{M}_{O_1} = \overline{M}_O + \overline{O_1O} \times \overline{R} = \overline{M}_O - \overline{r}_1 \times \overline{R} \tag{4.20}$$

A scrie că $\overline{M}_{O_1}$ are valoare minimă este achivalent cu a scrie că el este paralel cu vectorul $\overline{R}$, deci, înmulțind relația (4.20) vectorial la stânga cu $\overline{R}$ se obține:

$$\overline{R} \times \overline{M}_{O_1} = \overline{R} \times \overline{M}_O - \overline{R} \times (\overline{r}_1 \times \overline{R}) = \overline{R} \times \overline{M}_O - \overline{r}_1 \cdot \overline{R}^2 + \overline{R} \cdot (\overline{r}_1 \cdot \overline{R}) = 0 \tag{4.21}$$

Așa cum anticipam, se constată că sunt mai multe soluții pentru $\overline{r}_1$ care satisfac relația (4.21) (suma a doi vectori oarecare trebuie să rămână constantă). Deoarece este suficientă o singură soluție, se alege soluția particulară care anulează produsul scalar $\overline{r}_1 \cdot \overline{R}$, deci acea soluție pentru care vectorul $\overline{r}_1$ este perpendicular pe suportul lui $\overline{R}$. Fie $\overline{\rho}$ vectorul pentru care $\overline{\rho} \cdot \overline{R} = 0$. În acest caz relația (4.21) devine:

$$\overline{R} \times \overline{M}_O - \overline{\rho} \cdot \overline{R}^2 = 0 \tag{4.22}$$

din care rezultă:

$$\overline{\rho} = \frac{\overline{R} \times \overline{M}_O}{\overline{R}^2} \tag{4.23}$$

Din (4.23) se deduce că punctul căutat și identificat prin vectorul $\overline{\rho}$ există. Mai mult, se constată că $\overline{\rho}$ este normal nu numai pe $\overline{R}$, ci și pe planul format de $\overline{R}$ și $\overline{M}_O$ și are sensul determinat de sensul pozitiv de rotație al produsului vectorial $\overline{R} \times \overline{M}_O$, definind astfel, în mod unic, un punct O_2, față de care vectorul moment rezultant are valoare minimă:

$$\left|\overline{M}_{O_2}\right| = pr(\overline{M}_O)_{\overline{R}} = \frac{\overline{M}_O \cdot \overline{R}}{\left|\overline{R}\right|}. \tag{4.24}$$

Celelalte puncte, în care vectorul moment rezultant are aceeași valoare, sunt situate pe o dreaptă paralelă cu $\overline{R}$ ce trece prin punctul O_2. Aceată dreaptă poartă numele de *axă centrală*.

În orice punct al axei centrale torsorul are valoare minimă. Așadar, axa centrală poate fi definită ca locul geometric al tuturor punctelor în care torsorul unui sistem de forțe îmbracă forma minimală, adică:

$$T_{O_1}(\overline{F}_i)\begin{cases}\overline{R}=\sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i\\ \overline{M}_{O_1}=\dfrac{\overline{M}_O\cdot\overline{R}}{|\overline{R}|}\cdot\dfrac{\overline{R}}{|\overline{R}|}=\dfrac{\overline{M}_O\cdot\overline{R}}{R^2}\cdot\overline{R}\end{cases}\tag{4.25}$$

Din expresiile (4.18) și (4.25) se constată că: dacă scalarul torsorului într-un punct oarecare O este nul, în punctul O_1 de pe axa centrală vectorul moment rezultant este nul.

4.4.2. Torsorul în raport cu un punct al unei singure forţe aplicatã unui solid rigid

Fie forța $\overline{F}$ aplicată unui solid rigid. Torsorul calculat în punctul O va avea forma:

$$T_O(\overline{F})\begin{cases}\overline{R}=\overline{F}\\ \overline{M}_O=\mathsf{M}_O\overline{F}\end{cases}\tag{4.26}$$

Deoarece $\mathcal{M}_O\overline{F}$ este perpendicular pe $\overline{F}$ scalarul torsorului este nul. În acest caz axa centrală coincide cu suportul rezultantei $\overline{R}$ și în orice punct al ei vectorul moment rezultant este nul.

4.4.3. Torsorul în raport cu un punct al unui cuplu de forţe aplicat unui solid rigid

Un cuplu de forțe este definit de două forțe egale, de sensuri opuse care au suporturile paralele, $\overline{F}'=-\overline{F}''$ (fig. 4.17).În acest caz vectorul rezultant este nul:

$$\overline{R}=\overline{F}'+\overline{F}''=0\,.\tag{4.27}$$

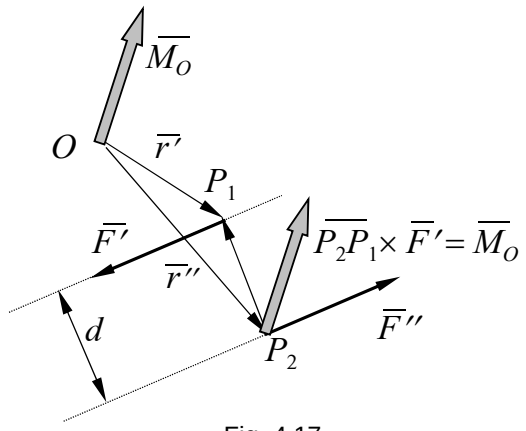


Fig. 4.17.

Vectorul moment rezultant calculat în punctul O este (fig. 4.17):

$$\overline{M}_O = \mathsf{M}_O\overline{F}' + \mathsf{M}_O\overline{F}'' = \overline{r}' \times \overline{F}' + \overline{r}'' \times \overline{F}'' = \overline{r}' \times \overline{F}' + \overline{r}'' \times (-\overline{F}') =$$
$$= (\overline{r}' - \overline{r}'') \times \overline{F}' = \overline{P_2P_1} \times \overline{F}' . \qquad (4.28)$$

Se constată că vectorul moment rezultant al unui cuplu de forțe nu depinde de punctul în raport cu care acesta se calculează. El este un vector liber, normal pe planul format de $\overline{P_2P_1}$ și $\overline{F}'$, adică pe planul cuplului, și are sensul astfel încât un om orientat după $\overline{M}_O$ să vadă sensul de rotație aparent al cuplului că rotește în sensul pozitiv ales. Norma vectorului moment rezultant este:

$$\left|\overline{M}_O\right| = \left|\overline{P_2P_1}\right| \cdot \left|\overline{F}'\right| \cdot \sin(\overline{P_2P_1}, \overline{F}') = d \cdot \left|\overline{F}'\right|, \qquad (4.29)$$

unde d este brațul cuplului și reprezintă distanta dintre suporturile forțelor cuplului.

4.4.4. Expresii analitice privind torsorul unui sistem de forţe

Se consideră sistemul trirectangular de referință $Oxyz$, cu versorii $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ (fig. 4.18), față de care forțele $\overline{F}_i$ aplicate unui solid rigid au proiecțiile (F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}), iar punctele lor de aplicație au coordonatele (x_i, y_i, z_i). În această situație torsorul sistemului de forța ($\overline{F}_i$) calculat în raport cu originea O a sistemului de referință (fig. 4.18) va avea următoarea formă:

$$\mathrm{T}_O(\overline{F}_i)\begin{cases}\overline{R}=\sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i=\overline{i}\sum_{i=1}^{n}F_{ix}+\overline{j}\sum_{i=1}^{n}F_{iy}+\overline{k}\sum_{i=1}^{n}F_{iz}\\ \overline{M}_O=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{M}_O\overline{F}_i=\sum_{i=1}^{n}\overline{r}_i\times\overline{F}_i=\\ \quad=\overline{i}\sum_{i=1}^{n}(y_iF_{iz}-z_iF_{iy})+\overline{j}\sum_{i=1}^{n}(z_iF_{ix}-x_iF_{iz})+\overline{k}\sum_{i=1}^{n}(x_iF_{iy}-y_iF_{ix})\end{cases}\tag{4.30}$$

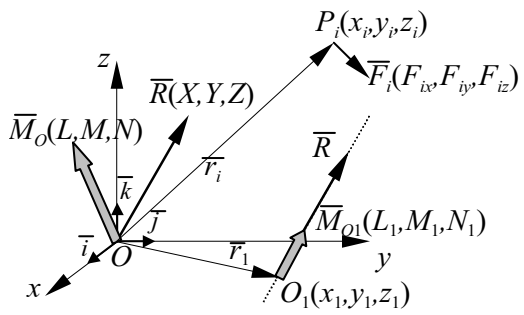


Fig. 4.18.

Așadar, cei doi vectori rezultanți ce alcătuiesc torsorul au următoarele componente:

– vectorul $\overline{R}$:

$$X=\sum_{i=1}^{n}F_{ix}\ ;\quad Y=\sum_{i=1}^{n}F_{iy}\ ;\quad Z=\sum_{i=1}^{n}F_{iz}\ ;\tag{4.31}$$

– vectorul $\overline{M}_O$:

$$L=\sum_{i=1}^{n}(y_iF_{iz}-z_iF_{iy})\,;\ M=\sum_{i=1}^{n}(z_iF_{ix}-x_iF_{iz})\,;\ N=\sum_{i=1}^{n}(x_iF_{iy}-y_iF_{ix})\,.\tag{4.32}$$

Scalarul torsorului va avea expresia:

$$\overline{M}_O\cdot\overline{R}=\overline{M}_{O_1}\cdot\overline{R}=LX+MY+NZ=L_1X+M_1Y+N_1Z\tag{4.33}$$

din care cauză el mai este denumit și *trinom invariant*.

Proiecția vectorului moment rezultant $\overline{M}_O$ pe direcția lui $\overline{R}$ etse:

$$\frac{\overline{M}\cdot\overline{R}}{\left|\overline{R}\right|}=\frac{LX+MY+NZ}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\tag{4.34}$$

Vectorul moment rezultant, care are norma minimă, se determină cu expresia:

$$\overline{M}_{O_1} = \frac{\overline{M}\cdot\overline{R}}{R^2}\cdot\overline{R} = \frac{LX+MY+NZ}{X^2+Y^2+Z^2}(\bar{i}\,X+\bar{j}\,Y+\bar{k}\,Z) \qquad (4.35)$$

iar proiecțiile sale pe axele sistemului de referință sunt:

$$L_1 = \frac{LX+MY+NZ}{X^2+Y^2+Z^2}X;$$

$$M_1 = \frac{LX+MY+NZ}{X^2+Y^2+Z^2}Y; \qquad (4.36)$$

$$N_1 = \frac{LX+MY+NZ}{X^2+Y^2+Z^2}Z.$$

În baza relației (4.20) componentele L_1, M_1, N_1 mai pot fi scrise și astfel:

$$L_1 = L-(yZ-zY);\ \ M_1 = M-(zX-xZ);\ \ N_1 = N-(xY-yX). \qquad (4.37)$$

Din condiția de paralelism între vectorul moment rezultant $\overline{M}_{O_1}$ și vectorul rezultant $\overline{R}$ rezultă ecuațiile analitice ale axei centrale:

$$\frac{L_1}{X} = \frac{M_1}{Y} = \frac{N_1}{Z}$$

sau, sub altă formă

$$\frac{L-(yZ-zY)}{X} = \frac{L-(zX-xZ)}{Y} = \frac{N-(xY-yX)}{Z} \qquad (4.38)$$

Cele două ecuații liniare în (x, y, z) în care (X, Y, Z) și (L, M, N) sunt mărimi cunoscute, reprezintă ecuațiile axei centrale.

4.4.5. Invarianţa torsorului unui sistem de forţe în raport cu operaţiile elementare de echivalenţă

În baza proprietăților momentului unei forțe în raport cu un punct (v.par. 4.2), se poate dovedi ușor că aplicând operațiile elementare de echivalență torsorului unui sistem de forțe, (v. relația (4.1)) efectul său mecanic nu se modifică.

a) Introducerea (sau scoaterea) unor perechi de forțe egale și direct opuse

într-un sistem de forțe aplicate unui solid rigid nu modifică vectorul rezultant, deoarece suma forțelor egale și direct opuse este nulă, și nici vectorul moment rezultant nu se modifică întrucât momentele a două forțe egale și direct opuse sunt egale și direct opuse (v. proprietatea *d* din cadrul parag. 4.2.1).

b) Alunecarea unei forțe, din cadrul unui sistem de forțe aplicat unui solid rigid, pe suportul său nu modifică nici vectorul rezultant și nici vectorul moment rezultant, deoarece momentul forței respective nu se modifică (v. proprietatea *b* din cadrul parag. 4.2.1).

c) Înlocuirea unor forțe ce au suporturile concurente cu rezultanta lor sau înlocuirea unor forțe cu componentele acestora după direcții concurente cu suporturile lor, nu modifică vectorul rezultant, în baza proprietăților de distributivitate, respectiv asociativitate ale sumei vectoriale. Nici vectorul moment rezultant nu se schimbă în baza teoremei lui Varignon (v. proprietatea *e* din cadrul parag. 4.2.1).

Rezultă că torsorul unui sistem de forțe este un invariant față de operațiile elementare de echivalență.

4.5. RECUNOAŞTEREA EFECTULUI MECANIC AL UNUI SISTEM DE FORŢE APLICATE UNUI SOLID RIGID CU AJUTORUL TORSORULUI

Pentru a putea folosi torsorul unui sistem de forțe aplicate unui solid rigid în aprecierea efectului mecanic al acestora, vom enunța, mai întâi, patru *leme* și două *teoreme*.

În baza principiului rigidității, două forțe egale și direct opuse, aplicate unui solid rigid, au efect mecanic nul. Ele formează un *sistem nul* deoarece vectorul rezultant este nul, suma lor fiind egală cu zero și, de asemenea, vectorul moment rezultant este nul în baza proprietății *d*) a momentului unei forțe în raport cu un punct. Rezultă că orice sistem de forțe care poate fi redus, prin operații elementare de echivalență la două forțe egale și direct opuse este un sistem nul. De aici se deduc lemele și teoremele de mai jos.

Lema 1. *Orice sistem nul are torsorul nul într-un punct.*

Lema 2. *Dacă un sistem de forțe are torsorul nul într-un punct, el are torsorul nul în oricare alt punct* (în baza proprietăților torsorului unui sistem de forțe aplicate unui solid rigid (vezi par. 4.4.1, *a*).

Pe baza celor două leme rezultă:

Teorema 1. *Condiția necesară și suficientă ca un sistem de forțe aplicate unui solid rigid să formeze un sistem nul este ca torsorul acestuia să fie nul într-un punct.*

$$\mathrm{T}_O(\overline{F}_i)\begin{cases}\overline{R}=\sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i=0\\ \overline{M}_O=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{M}_O\overline{F}_i=0\end{cases} \tag{4.39}$$

Lema 3. *Sistemele de forțe care au același torsor într-un punct, au același torsor în oricare alt punct.*

Dacă, în punctul *O* cele două sisteme de forțe ($\overline{F}_i$) și ($\overline{F}_j$) au același torsor, adică:

$$\overline{R}=\overline{\mathrm{R}} \text{ și } \overline{M}_O=\overline{\mathrm{M}}_O,$$

rezultă că în *O′* ele vor avea:

$$\overline{R} = \overline{\mathrm{R}} \text{ și } \overline{M}_{O'} = \overline{\mathrm{M}}_{O'}, \tag{4.40}$$

deoarece vectorul rezultant este un invariant în raport cu punctul față de care se calculează torsorul, iar vectorul moment rezultant variază după legea (4.17).

Lema 4. *Sistemele de forțe echivalente au același torsor într-un punct.*

Această lemă este evidentă având în vedere invarianța torsorului unui sistem de forțe aplicate unui solid rigid, în raport cu operațiile elementare de echivalență.

Teorema 2. *Condiția necesară și suficientă ca două sisteme de forțe, aplicate independent unui solid rigid, să fie echivalente este ca ele să aibă același torsor într-un punct*.

Această teoremă, numită și *teorema de echivalență*, este reciproca lemei 4 și este valabilă în cazul unui sistem de forțe aplicate unui solid rigid.

Efectul mecanic al unui sistem de forțe aplicate unui solid rigid va fi cu atât mai ușor de recunoscut cu cât sistemul de forțe este mai simplu (are un număr mai mic de forțe). Deci, în baza teoremei de echivalență, este suficient să găsim un sistem de forțe care să aibă același torsor într-un punct cu sistemul de forțe dat, dar care să fie cât mai simplu posibil, pentru ca să putem evidenția efectul mecanic.

Determinarea sistemelor de forțe echivalente cu sistemul de forțe dat se va face cu ajutorul torsorului, care se dovedește a fi un operator ce se aplică sistemelor de forțe. S-a arătat că, cel mai simplu sistem de forțe este alcătuit din două forțe egale și direct opuse, efectul lor mecanic fiind nul.

a) Să presupunem că am calculat torsorul sistemului de forțe dat ($\overline{F}_i$) în punctul *O* și am obținut următorul torsor:

$$\mathrm{T}_O(\overline{F}_i)\begin{cases} \overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i = 0 \\ \overline{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{M}_O \overline{F}_i = 0 \end{cases} \tag{4.41}$$

În acest caz sistemul de forțe dat este echivalent cu un sistem format din două forțe egale și direct opuse al căror efect mecanic este nul. Se spune că sistemul de forțe dat ($\overline{F}_i$) se află în echilibru sau, nu atât de riguros, solidul rigid acționat de sistemul de forțe ($\overline{F}_i$), este în echilibru. În consecință, sistemul de forțe ($\overline{F}_i$) are efect mecanic nul asupra solidului rigid.

b) Dacă torsorul sistemului de forțe ($\overline{F}_i$), calculat în raport cu punctul *O* este:

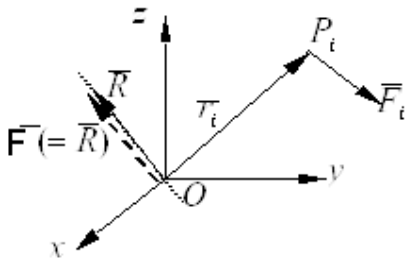


Fig. 4.19.

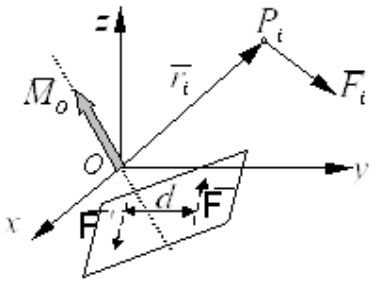


Fig. 4.20.

$$\mathrm{T}_O(\overline{F}_i)\begin{cases}\overline{R}=\sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i\neq 0\\ \overline{M}_O=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{M}_O\overline{F}_i=0\end{cases} \tag{4.42}$$

atunci sistemul de forțe dat ($\overline{F}_i$) este echivalent cu o singură forță $\overline{F}$, cu suportul trecând prin punctul *O*, cu mărimea scalară, sensul și direcția aceleași cu ale vectorului rezultant $\overline{R}$, adică $\overline{F}=\overline{R}$ (fig. 4.19).

c) Dacă torsorul sistemului de forțe ($\overline{F}_i$), calculat în raport cu punctul *O* este:

$$\mathrm{T}_O(\overline{F}_i)\begin{cases}\overline{R}=\sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i=0\\ \overline{M}_O=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{M}_O\overline{F}_i\neq 0\end{cases} \tag{4.43}$$

atunci sistemul de forțe dat ($\overline{F}_i$) este echivalent cu un cuplu al cărui moment este egal cu ($\overline{M}_O$) alcătuit din două forțe $\overline{F}$ și $\overline{F}'$ ($\overline{F}=-\overline{F}'$) situate într-un plan perpendicular pe suportul lui $\overline{M}_O$ la distanța $d=\left|\overline{M}_O\right|/\overline{F}$ (fig. 4.20).

Observație. Așa cum s-a arătat în paragraful 4.4.3 momentul rezultant al unui cuplu de forțe (două forțe egale ca mărime, de sensuri contrare și cu suporturile paralele) nu depinde de punctul în raport cu care el se calculează: este un vector liber, perpendicular pe planul definit de cuplu de forțe, având sensul astfel încât sensul aparent de rotire al cuplului de forțe să se vadă, de pe momentul rezultant, în sensul pozitiv ales. Mărimea scalară a vectorului rezultant este egală cu produsul dintre norma forței și brațul cuplului (distanța dintre suporturile forțelor cuplului).

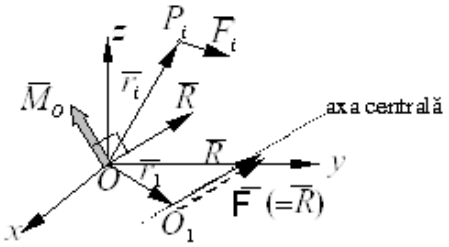


Fig. 4.21.

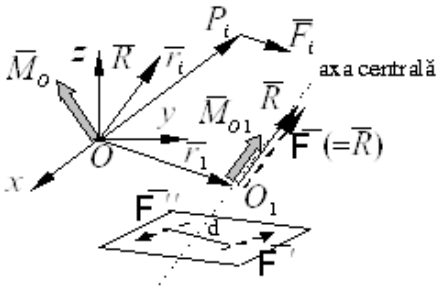


Fig. 4.22.

d) Dacă, în caz general:

$$\mathrm{T}_O(\overline{F}_i)\begin{cases}\overline{R}=\sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i\neq 0\\ \overline{M}_O=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{M}_O\overline{F}_i\neq 0\end{cases} \tag{4.44}$$

atunci sunt în discuție două posibilități:

d_1) Scalarul torsorului este nul: $\overline{R}\cdot\overline{M}_O=0$, ceeace ne arată că $\overline{R}\perp\overline{M}_O$ și deci pr$(\overline{M}_O)\,\overline{R}=0$, norma minimă a vectorului rezultant $\overline{M}_{O_1}$ (unde O_1 este un punct ce aparține axei centrale) fiind în acest caz, nulă:

$$\left|\overline{M}_{O_1}\right|=\frac{\overline{M}\cdot\overline{R}}{\left|\overline{R}\right|}=0. \tag{4.45}$$

În consecință, se spune că sistemul de forțe dat ($\overline{F}_i$) este echivalent cu o forță $\overline{F}$ $(=\overline{R})$ al cărui suport este axa centrală (fig. 4.21).

d_2) Dacă însă $\overline{R}\cdot\overline{M}_o\neq 0$ avem cazul general când sistemul de forțe dat ($\overline{F}_i$) este echivalent cu o forță $\overline{F}$ $(=\overline{R})$ (fig. 4.21) care are ca suport axa centrală și cu un cuplu de forțe dirijat de asemenea, după axa centrală, format din două forțe $\overline{F}$ și $\overline{F}'$ $(\overline{F}=-\overline{F}')$ situate într-un plan perpendicular pe axa centrală la depărtarea $d=\left|\overline{M}_O\right|/\overline{F}$ una față de alta.

Aplicații

A.4.1. Fie forța $\overline{F}$ aplicată în punctul A cu mărimea $F = P\sqrt{6}$ (fig. 4.23). Se cere să se determine: a) momentul forței $\overline{F}$ în raport cu punctul O; b) momentul forței $\overline{F}$ în raport cu axa Δ.

a) Momentul forței $\overline{F}$ în raport cu punctul O.

Pentru determinarea componentelor forței $\overline{F}$ pe axele sistemului de referință se procedează astfel:

$$\overline{F} = F\,\frac{\overline{AD}}{\left|\overline{AD}\right|} = \frac{(0-a)\overline{i} + (0-2a)\overline{j} + (a-0)\overline{k}}{\sqrt{a^2+4a^2+a^2}} =$$

$$= P\sqrt{6}\,\frac{-a\overline{i} - 2a\overline{j} + a\overline{k}}{a\sqrt{6}} =$$

$$-P\overline{i} - 2P\,\overline{j} + P\overline{k}\,.$$

Conform definiției (4.1) :

$$\mathcal{M}_O\overline{F} = \overline{r} \times \overline{F} =$$

$$= \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a & 2a & 0 \\ -P & -2P & P \end{vmatrix} =$$

$$= 2Pa\,\overline{i} - Pa\,\overline{j}$$

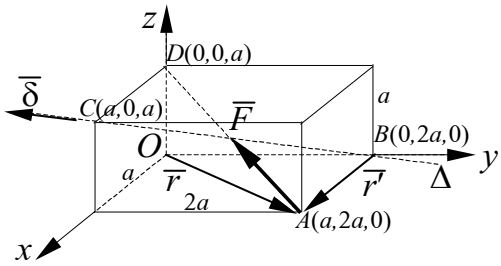


Fig. 4.23.

deoarece $\overline{r} = (a-0)\,\overline{i} + (2a-0)\,\overline{j} + (0-0)\,\overline{k} = a\,\overline{i} + 2a\,\overline{j}$.

Mărimea scalară a momentului $\mathcal{M}_O\overline{F}$ este: $\left|\,\mathcal{M}_O\overline{F}\,\right| = Pa\sqrt{5}$.

b) Momentul forței $\overline{F}$ în raport cu axa Δ.

Pentru aceasta se alege un punct de pe axa Δ. Fie acesta punctul B identificat de vectorul de poziție $\overline{r}'$.

Versorul $\overline{\delta}$ al axei Δ are următorii cosinuși directori: $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ deoarece:

$$\overline{\delta} = 1\cdot\frac{\overline{BC}}{\left|\overline{BC}\right|} = \frac{(a-0)\overline{i} + (0-2a)\overline{j} + (a-0)\overline{k}}{\sqrt{a^2+4a^2+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\overline{i} - 2\,\overline{j} + \overline{k}\right).$$

Conform definiției (4.11) și deoarece $\overline{r}' = a\,\overline{i}$ rezultă:

$$\mathcal{M}_\Delta \overline{F} = \overline{\delta}\cdot(\overline{r}' \times \overline{F}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ a & 0 & 0 \\ -P & -2P & P \end{vmatrix} = -\frac{4}{\sqrt{6}} Pa$$

A.4.2. Fie sistemul de forțe din figura 4.24 cu $F_1 = P\sqrt{6}$; $F_2 = P\sqrt{2}$, $F_3 = P$. Să se determine: a) torsorul în raport cu originea sistemului de referință; b) torsorul în raport cu punctul A; c) torsorul minim; d) ecuația axei centrale; e) echivalența sistemului de forțe.

a) Pentru a calcula vectorul rezultant $\overline{R}$ trebuie mai întâi să determinăm proiecțiile forțelor $\overline{F}_i$ (i=1, 2, 3) pe axele sistemului de referință. Astfel:

$$\overline{F}_1 = F_1 \frac{\overline{EB}}{|\overline{EB}|} = P\sqrt{6}\,\frac{(a-0)\overline{i} + (2a-0)\overline{j} + (a-0)\overline{k}}{\sqrt{a^2+4a^2+a^2}} = P\overline{i} + 2P\overline{j} - P\overline{k}\,;$$

$$\overline{F}_3 = -F_3\overline{j} = -P\overline{j}$$

$$\overline{F}_2 = F_2 \frac{\overline{BC}}{|\overline{BC}|} =$$

$$= P\sqrt{2}\,\frac{(0-a)\overline{i} + (a-0)\overline{k}}{\sqrt{a^2+a^2}} =$$

$$= -P\overline{i} + P\overline{k}\,;$$

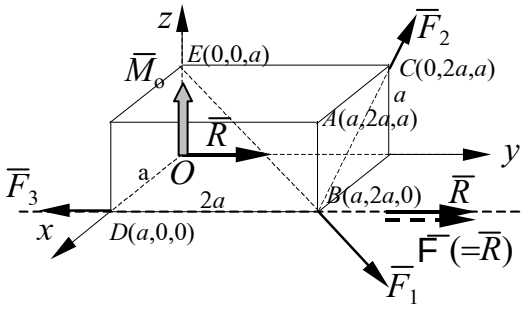


Fig. 4.24.

Aplicând prima relație din (4.30) rezultă: $\overline{R} = P\overline{j}$.

Conform relației (4.1) se obține:

$$\mathcal{M}_O \overline{F}_1 = \overline{r}_1 \times \overline{F}_1 = \overline{OB} \times \overline{F}_1 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a & 2a & 0 \\ P & 2P & -P \end{vmatrix} = -2Pa\overline{i} + Pa\overline{j}\,;$$

$$\mathcal{M}_O \overline{F}_2 = \overline{r}_2 \times \overline{F}_2 = \overline{OC} \times \overline{F}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 2a & a \\ -P & 0 & P \end{vmatrix} = 2Pa\overline{i} - Pa\overline{j} + 2Pa\overline{k}\,;$$

$$\mathcal{M}_O \overline{F}_3 = \overline{r}_3 \times \overline{F}_3 = \overline{OD} \times \overline{F}_3 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \end{vmatrix} = -Pa\overline{k};$$

Prin aplicarea celei de a doua relații din (4.30) rezultă: $\overline{M}_O = Pa\overline{k}$. Deci torsorul sistemului de forțe dat, calculat față de punctul O, are expresia:

$$\mathrm{T}_O(\overline{F}_i)\begin{cases} \overline{R} = P\overline{j} \\ \overline{M}_O = Pa\overline{k} \end{cases}$$

vectorii $\overline{R}$ și $\overline{M}_O$ fiind reprezentați în figura 4.24.

b) Pentru a calcula $\mathrm{T}_A(\overline{F}_i)$ trebuie să calculăm decât $\overline{M}_A$, deoarece vectorul rezultant este un invariant față de punctul în raport cu care se calculează torsorul.

Pentru calculul lui $\overline{M}_A$ se aplică relația (4.17) și se obține:

$$\overline{M}_A = \overline{M}_O + \overline{AO} \times \overline{R} = Pa\overline{k} + \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -a & -2a & -a \\ 0 & P & 0 \end{vmatrix} = Pa\overline{k} + Pa\overline{i} - Pa\overline{k} = Pa\overline{i}.$$

c) Aplicând relația (4.25) se obține:

$$T_{O_1}(\overline{F}_i)\begin{cases} \overline{R} = P\overline{j} \\ \overline{M}_{O_1} = 0 \end{cases}$$

deoarece produsul $\overline{M}_O \cdot \overline{R} = 0$.

d)Având în vedere că: $X = 0$, $Y = P$, $Z = 0$; $L = 0$, $M = 0$, $\mathrm{N} = Pa$, aplicând relația (4.38) se obține:

$$\frac{zP}{0} = \frac{0}{0} = \frac{Pa - xP}{0}$$

care conduce la următoarele ecuații $z = 0$ și $x = a$. Rezultă că axa centrală este o dreaptă cuprinsă în planul Oxy ($z = 0$) și paralelă cu axa Oy ce trece prin punctul $D(a, 0, 0)$ (este normal, deoarece $\overline{R}$ este dirijat după Oy, iar axa centrală este, prin definiție paralelă cu $\overline{R}$) (fig.4.24).

e) În urma determinării torsorului în raport cu punctul O s-a constatat că $\overline{R} \neq 0$ și $\overline{M}_O \neq 0$. În acestă situație suntem în cazul *d*), relația (4.44). Deoarece $\overline{M}_O \cdot \overline{R} = 0$, rezultă că sistemul este echivalent cu o forță $\overline{F}$ $(=\overline{R})$ al cărui suport este axa centrală (vezi fig. 4.24).

Teste

T.4.1. Dacă într-un sistem de forțe ($\overline{F}_i$) ce acționează asupra unui solid rigid se introduc două forțe egale ca mărime, paralele și de sensuri contrare atunci:

a) noul sistem de forțe are efect mecanic nul;
b) noul sistem de forțe are același efect mecanic cu cel inițial;
c) noul sistem de forțe are efect mecanic diferit de cel inițial;
d) noul sistem de forțe are torsorul nul.

T.4.2. Dacă forțele din figura 4.25 au $F_1 = F_2 = P\sqrt{6}$ și $\mathcal{M}_O\overline{F}_1 = = 2Pa\overline{i} - Pa\overline{k}$ atunci:

a) $\mathcal{M}_O\overline{F}_2 = -Pa\overline{i} - 2Pa\overline{j}$; *b*) $\mathcal{M}_O\overline{F}_2 = 2Pa\overline{i} - Pa\overline{k}$;
c) $\mathcal{M}_O\overline{F}_2 = -2Pa\overline{i} + Pa\overline{k}$; *d*) $\mathcal{M}_O\overline{F}_2 = 0$.

T.4.3. Dacă forța din figura 4.26 este $\overline{F} = -2P\overline{i} - P\overline{j} - 3P\overline{k}$ atunci momentul său în raport cu punctul A este:

a) $\mathcal{M}_A\overline{F} = 0$; *b*) $\mathcal{M}_A\overline{F} = -6Pa\,\overline{i} + 3Pa\,\overline{j} - 3Pa\,\overline{k}$;
c) $\mathcal{M}_A\overline{F} = -6Pa\,\overline{i} + 3Pa\,\overline{j} - Pa\,\overline{k}$; *d*) $\mathcal{M}_A\overline{F} = -3Pa\,\overline{i} + 6Pa\,\overline{j}$.

T.4.4. Forța $\overline{F}$ din figura (3) 4.27 are expresia $\overline{F} = -P\sqrt{10}\,\overline{i} - P\sqrt{10}\,\overline{j}$. Momentul acestei forțe în raport cu dreapta Δ este:

a) $\mathcal{M}_\Delta\overline{F} = -2Pa$; *b*) $\mathcal{M}_\Delta\overline{F} = 3Pa$;
c) $\mathcal{M}_\Delta\overline{F} = -4Pa$; *d*) $\mathcal{M}_\Delta\overline{F} = -3Pa$.

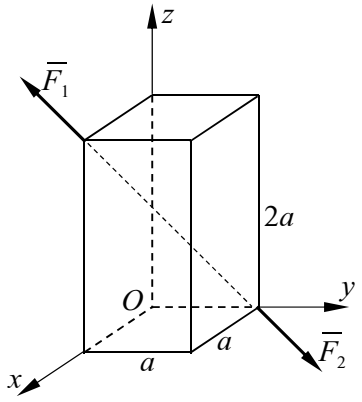


Fig. 4.25.

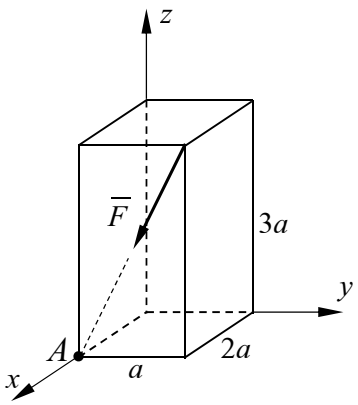


Fig. 4.26.

T.4.5. Torsorul sistemului de forțe din figura 4.28 calculat în raport cu originea sistemului de referință este: $T_O\left(\overline{F}_i\right)\begin{cases}\overline{R} = -P\overline{i} + 2P\overline{j} \\ \overline{M}_O = 2Pa\overline{k}\end{cases}$. Axa centrală a acestui sistem de forțe trece prin punctul de coordonate:

a) (a , $2a$, 0); *b*) (a , $2a$, $-a$);

c) ($-a$, $2a$, a); *d*) (a , $3a$, $-a$).

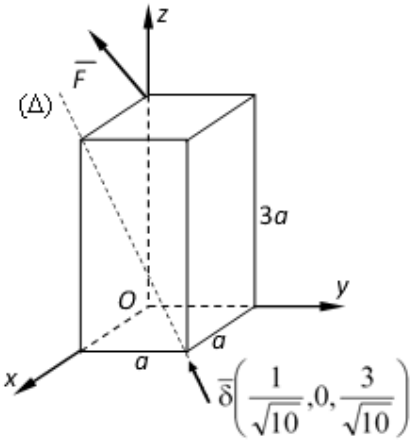


Fig. 4.27.

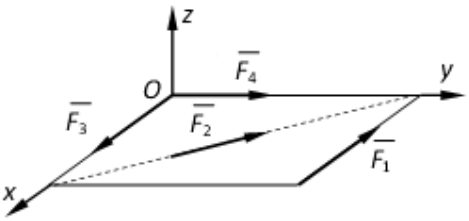


Fig. 4.28.

T.4.6. Un sistem de forțe ($\overline{F}_i$) aplicat unui solid rigid are efect mecanic nul dacă:

a) vectorul rezultant $\overline{R} = 0$;

b) torsorul sistemului de forțe ($\overline{F}_i$) nu este nul într-un punct;

c) $\overline{M}_O = 0$;

d) torsorul sistemului de forțe ($\overline{F}_i$) este nul într-un punct.

T.4.7. Două sisteme de forțe ($\overline{F}_i$) și ($\overline{F}_j$) aplicate independent unui solid rigid sunt echivalente din punct de vedere mecanic dacă:

a) au același vector rezultant $\overline{R}$;

b) au torsoarele egale;

c) au, în același punct, torsoarele egale;

d) au același vector moment rezultant $\overline{M}_O$;

T.4.8. Torsorul unui sistem de forțe ($\overline{F}_i$) aplicat unui solid rigid calculat în raport cu originea sistemului de referință are expresia: $T_O(\overline{F}_i)\begin{cases}\overline{R} = 0\\ \overline{M}_O = 2Pa\overline{i}\end{cases}$. Cu cine este echivalent sistemul de forțe ($\overline{F}_i$)?

a) cu două forțe de mărime $F' = F'' = P$ situate într-un plan perpendicular pe axa *Ox*, la distanța $d = 2a$ una față de alta și al căror sens de rotația, în raport cu axa *Ox* este pozitiv;

b) cu două forțe de mărime $F' = F'' = 2P$ situate într-un plan perpendicular pe axa *Ox*, la distanța $d = 2a$ una față de alta și al căror sens de rotația, în raport cu axa *Ox* este pozitiv;

c) cu două forțe de mărime $F' = F'' = 2P$ situate într-un plan perpendicular pe axa *Ox*, la distanța $d = 2a$ una față de alta și al căror sens de rotația, în raport cu axa *Ox* este negativ;

d) cu două forțe de mărime $F' = F'' = P$ situate într-un plan perpendicular pe axa *Ox*, la distanța $d = 2a$ una față de alta și al căror sens de rotația, în raport cu axa *Ox* este negativ.

T.4.9. Torsorul unui sistem de forțe ($\overline{F}_i$) aplicat unui solid rigid calculat în raport cu punctul *B* de coordonate (*a*, 0, 2*a*) are expresia: $T_B(\overline{F}_i)\begin{cases}\overline{R} = 2P\overline{j}\\ \overline{M}_O = -Pa\overline{k}\end{cases}$. Torsorul sistemului de forțe ($\overline{F}_i$) în punctul *C* de coordonate (0, *a*, 0) are forma:

a) $T_C(\overline{F}_i)\begin{cases}\overline{R} = 2P\overline{j}\\ \overline{M}_O = -4Pa\overline{j} + 3Pa\overline{k}\end{cases}$; *b*) $T_C(\overline{F}_i)\begin{cases}\overline{R} = 2P\overline{j}\\ \overline{M}_O = 4Pa\overline{i} + 3Pa\overline{k}\end{cases}$;

c) $T_C(\overline{F}_i)\begin{cases}\overline{R} = 2P\overline{j}\\ \overline{M}_O = -4Pa\overline{j} - 3Pa\overline{k}\end{cases}$; *d*) $T_C(\overline{F}_i)\begin{cases}\overline{R} = 2P\overline{j}\\ \overline{M}_O = 4Pa\overline{i} - 3Pa\overline{k}\end{cases}$.

4.6. ECHILIBRUL SISTEMELOR DE FORŢE APLICATE SOLIDULUI RIGID

S-a arătat că, pentru ca un sistem de forțe aplicate unui solid rigid să aibă efect mecanic nul este suficient ca torsorul lui într-un punct să fie nul (4.39).

Proiectând relațiile (4.39) pe axele unui sistem de referință (fig. 4.29) se obțin condițiile scalare de echilibru sub forma:

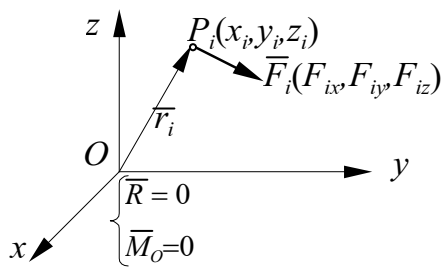


Fig. 4.29.

$$X=\sum_{i=1}^{n}F_{ix}=0\ ;\ L=\sum_{i=1}^{n}\mathsf{M}_{ox}\overline{F}_i=0;$$

$$Y=\sum_{i=1}^{n}F_{iy}=0;\ M=\sum_{i=1}^{n}\mathsf{M}_{oy}\overline{F}_i=0;$$

$$Z=\sum_{i=1}^{n}F_{iz}=0;\ N=\sum_{i=1}^{n}\mathsf{M}_{oz}\overline{F}_i=0; \tag{4.46}$$

care reprezintă trei condiții, privind proiecțiile forțelor pe axele sistemului de referință și trei condiții privind momentele forțelor în raport cu aceleași axe ale sistemului de referință.

Rezultă că în cazul general al unui solid rigid acționat de un sistem de forțe ($\overline{F}_i$) condiția de echilibru se exprimă prin trei ecuații de proiecție și trei ecuații de moment în raport cu axele sistemului de referință ales.

4.7. SISTEME PARTICULARE DE FORŢE

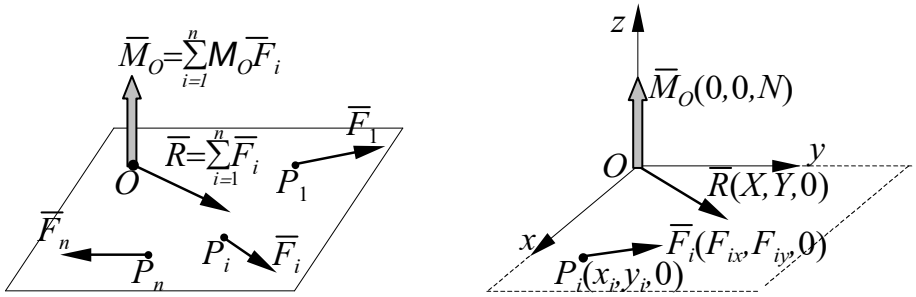
4.7.1. Sisteme de forţe coplanare

Atunci când toate forțele care alcătuiesc sistemul de forțe au suporturile cuprinse într-un plan ele alcătuiesc un *sistem de forțe coplanare* (fig. 4.30, *a*).

Se poate observa, că dacă, se alege în mod convenabil punctul *O*, în raport cu care se calculează torsorul, de exemplu în planul forțelor, atunci

vectorul moment rezultant $\overline{M}_O$ este întotdeauna perpendicular pe vectorul rezultant $\overline{R}$, care este cuprins în planul forțelor. Acest lucru se datorează faptului că forțele $\overline{F}_i$ nu dau moment în raport cu o axă cuprinsă în planul forțelor, suporturile lor ori intersectând axa, ori fiind paralele cu ea.

Rezultă că, în cazul general , când $\overline{R} \neq 0$ și $\overline{M}_O \neq 0$, sistemul de forțe dat ($\overline{F}_i$) este echivalent cu o singură forță $\overline{F}\,(=\overline{F}_i)$ dirijată după axa centrală, deoarece $\overline{M}_O \cdot \overline{R} = 0$.



a) b)

Fig. 4.30.

În rest, celelate cazuri de reducere ale unui sistem de forțe sunt identice cu cazurile *a*), *b*), *c*), de la paragraful 4.5. Se menționează numai că în cazul *b*), $\overline{R} = 0$ și $\overline{M}_O \neq 0$, cele două forțe $\overline{F}$ și $\overline{F}'$ ($\overline{F} = -\overline{F}'$), ce alcătuiesc cuplul de forțe, au suporturile cuprinse în planul forțelor ($\overline{F}_i$) la depărtarea $d = \overline{M}_O / \overline{F}$.

Din punct de vedere analitic, alegând în mod convenabil sistemul de referință cu axele Ox și Oy în planul forțelor, cotele z_i ale punctelor de aplicație P_i sunt nule, ca de altfel și proiecțiile F_{iz} ale oricărei forțe pe axa Oz (fig. 4.30, *b*).

În consecință :

$$\mathrm{T}_O(\overline{F}_i)\begin{cases}\overline{R} = X\overline{i} + Y\overline{j} \\ \overline{M}_O = N\overline{k}\end{cases} \tag{4.47}$$

în care:

$$X = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}\ ; \qquad Y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}\ ; \qquad N = \sum_{i=1}^{n}(x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) \tag{4.48}$$

Ecuațiile axei centrale (4.38) vor căpăta forma:

$$\frac{zY}{X}=\frac{-zX}{Y}=\frac{N-(xY-yX)}{0},$$

de unde rezultă:

$$\begin{cases} z=0 \\ N-(xY-yx)=0 \end{cases} \tag{4.49}$$

Relațiile (4.49) dovedesc, și pe cale analitică, că axa centrală este o dreaptă cuprinsă în planul *Oxy*, planul forțelor.

Condițiile de echilibru (4.46) pentru un sistem de forțe coplanar capătă forma:

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0\ ; \\ Y &= \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \\ N &= \sum_{i=1}^{n} (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) = 0; \end{aligned} \tag{4.50}$$

fiind exprimate prin două ecuații de proiecție pe două axe perpendiculare între ele și cuprinse în planul forțelor și o ecuație de moment în raport cu o axă perpendiculară pe planul forțelor.

Condițiile de echilibru mai pot fi scrise și astfel;

– două ecuații de moment în raport cu două axe perpendiculare pe planul forțelor și o ecuație de proiecție pe axa ce unește punctele în care acestea înțeapă planul forțelor;

– trei ecuații de moment în raport cu trei axe, necoplanare, perpendiculare pe planul forțelor .

4.7.2. Sisteme de foţe paralele

Atunci când toate forțele ce alcătuiesc sistemul de forțe dat ($\overline{F}_i$) au suporturile paralele între ele, ele alcătuiesc un *sistem de forțe paralele* (fig. 4.31).

Dacă $\overline{u}$ este versorul direcției forțelor, se poate scrie $\overline{F}_i = F_i\overline{u}$ și în consecință:

$$\mathrm{T}_O(\overline{F}_i)\begin{cases}\overline{R}=\sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i=\overline{u}\sum_{i=1}^{n}F_i\\ \overline{M}_O=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{M}_O\overline{F}_i=\sum_{i=1}^{n}\overline{r}_i\times\overline{F}_i=\sum_{i=1}^{n}\overline{r}_i\times\overline{u}F_i=(\sum_{i=1}^{n}\overline{r}_iF_i)\times\overline{u}\end{cases}\tag{4.51}$$

Rezultă de aici că $\overline{M}_O$ este perpendicular pe $\overline{u}$ și deci perpendicular pe $\overline{R}$, adică: $\overline{M}_O\cdot\overline{R}=0$, ceea ce face ca în cazul general când: $\overline{R}\neq 0$ și $\overline{M}_O\neq 0$, sistemul de forțe dat să fie echivalent cu o forță $\overline{F}$ ($=\overline{R}$) dirijată după axa centrală.

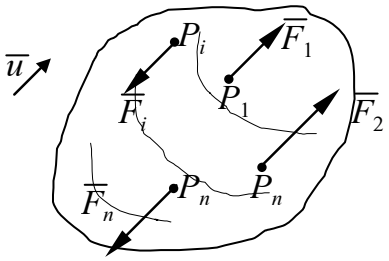


Fig. 4.31.

Pentru a determina axa centrală, etse suficient a identifica un punct de pe ea, știind că axa centrală este paralelă cu $\overline{R}$. Plecând de la relația (4.20), în cazul sistemului de forțe paralele $\overline{M}_{O_1}=0$ și ținând seama de (4.51) se obține:

$$\overline{M}_{O_1}=\overline{M}_O+\overline{O_1O}\times\overline{R}=(\sum_{i=1}^{n}\overline{r}_iF_i)\times\overline{u}-\overline{r}_1\times\overline{u}\sum_{i=1}^{n}F_i=$$

$$=[\sum_{i=1}^{n}\overline{r}_iF_i-\overline{r}_1\sum_{i=1}^{n}F_i]\times\overline{u}=0\tag{4.52}$$

Soluția particulară $\overline{\rho}$, pentru $\overline{r}_1$, este cea care anulează vectorul din paranteza pătrată, adică:

$$\overline{\rho}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\overline{r}_iF_i}{\sum_{i=1}^{n}F_i}.\tag{4.53}$$

Vectorul $\overline{\rho}$ definește un punct C care aparține axei centrale, denumit *centrul forțelor paralele* și care are următoarele proprietăți:

a) nu depinde de direcția $\overline{u}$ a forțelor paralele;

b) depinde de $\overline{r}_i$, deci de punctele de aplicație P_i ale forțelor $\overline{F}_i$ (poziția centrului C se schimbă dacă forțele $\overline{F}_i$ lunecă pe suportul lor);

c) nu depinde de raportul dintre mărimile forțelor, rămâne același dacă forțele scad sau cresc în intensitate în același raport.

Proprietățile *a*) și *b*) îi conferă punctului *C* următoarea proprietate: dacă toate forțele $\overline{F}_i$ se rotesc în același sens cu același unghi, punctul *C* nu-și schimbă poziția, iar axa centrală se rotește în jurul lui cu același unghi și în același sens cu rotirea forțelor $\overline{F}_i$ (fig. 4.32).

Din această cauză, punctul *C* este denumit uneori (impropriu) "punctul de aplicație al rezultantei $\overline{R}$".

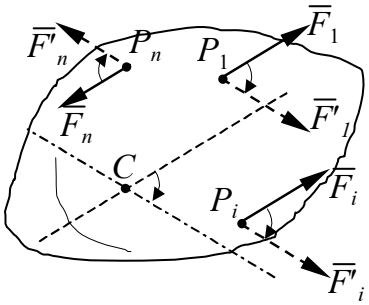


Fig. 4.32.

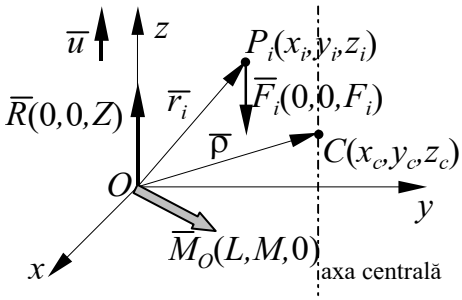


Fig. 4.33.

Un sistem de forțe paralele poate fi echivalenrt cu:

a) un sistem nul, dacă $\overline{R} = 0$ și $\overline{M}_O = 0$;

b) o forță $\overline{F}$ $(=\overline{R})$ aplicată în punctul *O* dacă $\overline{R} \neq 0$ și $\overline{M}_O = 0$;

c) un cuplu format din două forțe $\overline{F}$ și $\overline{F}'$ $(\overline{F} = -\overline{F}')$, situate într-un plan perpendicular pe direcția lui $\overline{M}_O$, la depărtarea $d = \left|\overline{M}_O\right| / \overline{F}$, dacă $\overline{R} = 0$ și $\overline{M}_O \neq 0$;

d) cu o forță $\overline{F}$ $(=\overline{R})$ dirijată după axa centrală, în cazul general când $\overline{R} \neq 0$ și $\overline{M}_O \neq 0$, deoarece, după cum s-a arătat $\overline{M}_O \cdot \overline{R} = 0$.

Pentru exprimarea analitică a torsorului $\mathrm{T}_O(\overline{F}_i)$ se alege în mod convenabil sistemul de referință astfel ca $\overline{u} \,||\, \overline{k}$ (fig. 4.33). Se obține:

$$\mathrm{T}_O(\overline{F}_i) \begin{cases} \overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i = \overline{k} \sum_{i=1}^{n} F_i \\ \overline{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{M}_O \overline{F}_i = \overline{i} \sum_{i=1}^{n} (y_i F_i) - \overline{j} \sum_{i=1}^{n} (x_i F_i) \end{cases} \tag{4.54}$$

Rezultă deci:

$$X = 0\ ; \qquad Y = 0; \qquad Z = \sum_{i=1}^{n} F_i\ ;$$
$$L = \sum_{i=1}^{n} y_i F_i\ ; \quad M = \sum_{i=1}^{n} x_i F_i\ ; \quad N = 0. \tag{4.55}$$

Dacă $\overline{\rho} = x_C \overline{i} + y_C \overline{j} + z_C \overline{k}$, prin proiectarea relației (4.53) pe axele sistemului de referință *Oxyz* (fig. 4.33) se obțin coordonatele punctului *C*:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}; \qquad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}; \qquad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}. \tag{4.56}$$

Prin definiție produsul dintre intensitatea unei forțe și distanța de la punctul ei de aplicație la un plan dat, se numește *moment static* al forței în raport cu acel plan.

Teorema momentelor statice. Suma momentelor statice față de un plan oarecare a forțelor unui sistem de forțe paralele este egală cu momentul static – față de același plan – al forței echivalente, considerată ca o forță efectiv aplicată în centrul forțelor paralele. În baza relațiilor (4.56) se poate scrie:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i F_i = x_C F\ ; \quad \sum_{i=1}^{n} y_i F_i = y_C F\ ; \quad \sum_{i=1}^{n} z_i F_i = z_C F\ . \tag{4.57}$$

În relațiile (4.57) produsele: x_iF_i, y_iF_i, z_iF_i reprezintă momentele statice ale forței $\overline{F}_i$ în raport cu planul *yOz*, *zOx*, respectiv *xOy*, iar $\overline{F}$ $(=R=\sum_{i=1}^{n} F_i)$ reprezintă intensitatea forței echivalente.

Condiția de echilibru pentru un sistem de forțe paralele este exprimată printr-o ecuație de proiecție și două ecuații de moment:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} F_i = 0; \quad L = \sum_{i=1}^{n} y_i F_i = 0; \quad M = \sum_{i=1}^{n} x_i F_i = 0. \tag{4.58}$$

In cadrul sistemelor de forțe aplicate solidului rigid, sistemele de forțe paralele reprezintă un caz particular de forțe, foarte des întâlnit în practică. Modelarea cea mai des întâlnită a unui sistem de forțe paralele o reprezintă

cazul sistemului de forțe generate asupra unui solid rigid de atracția exercitată de către pământ asupra acestuia.

4.8. CENTRE DE GREUTATE

Fie un sistem discret de puncte materiale situate la suprafața pământului. Asupra fiecărui punct va acționa forța de atracție a pământului. Dacă domeniul în care se află punctele materiale are dimensiuni mici în comparație cu cele ale pământului atunci se poate considera că toate forțele de greutate (forțele de atracție exercitate de pământ) formează un sistem de forțe paralele (fig. 4.34).

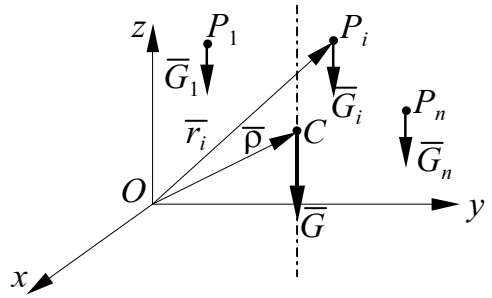


Fig. 4.34.

Prin definiție centrul de greutate al sistemului de puncte materiale prezentat anterior este considerat a fi identic cu centrul forțelor paralele provenite din forțele de greutate.

În consecință, poziția lui, dată de vectorul $\overline{\rho}$, se determină cu relația (4.53).

Deoarece s-a pus condiția ca domeniul în care sunt dispuse punctele materiale să fie restrâns ca dimensiuni, accelerația gravifică poate fi considerată ca fiind constantă și deci $\overline{G}_i = m_i \overline{g}$.

Rezultă:

$$\overline{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i G_i}{\sum_{i=1}^{n} G_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i m_i g}{\sum_{i=1}^{n} m_i g} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i m_i}{M}, \qquad (4.59)$$

în care: $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ reprezintă masa totală a sistemului de puncte materiale.

Analitic, coordonatele centrului de greutate față de un sistem de referință trirectangular se determină cu relațiile:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{M}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{M}; \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i m_i}{M}. \tag{4.60}$$

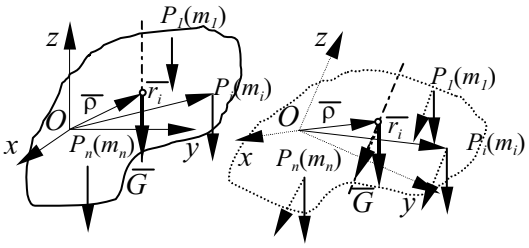


Fig. 4.35.

Din relațiile (4.59) și (4.60) și având în vedere proprietățile centrului forțelor paralele, rezultă următoarele observații:

– centrul de greutate al unui sistem de puncte materiale este un centru de masă, întrucât poziția sa nu depinde de intensitatea accelerației gravitaționale (v. relația (4.59));

– dacă sistemul de puncte materiale se consideră "înghețat" sau este un sistem rigid, poziția centrului de greutate a acestuia rămâne neschimbată față de un reper solidar legat de sistemul de puncte materiale (fig. 4.35). S-a arătat că dacă toate forțele, ce alcătuiesc sistemul de forțe paralele, se rotesc, în jurul punctelor lor de aplicație, în același sens și cu același unghi atunci poziția centrului forțelor paralele nu se modifică în raport cu un sistem de referință solidar legat de solidul rigid.

4.8.1. Centrul de greutate al unui solid rigid

În cazul unui solid rigid definit ca un continuum, vectorul $\overline{\rho}$ este dat de relația (4.53) prin trecere la limită (fig. 4.36):

$$\overline{\rho} = \frac{\int_{(D)} \overline{r}\,\mathrm{d}m}{\int_{(D)} \mathrm{d}m} = \frac{\int_{(D)} \overline{r}\,\mathrm{d}m}{M}. \tag{4.61}$$

Coordonatele punctului C sunt date, în acest caz de relațiile:

$$x_C = \frac{\int_{(D)} x\,\mathrm{d}m}{M}; \quad y_C = \frac{\int_{(D)} y\,\mathrm{d}m}{M}; \quad z_C = \frac{\int_{(D)} z\,\mathrm{d}m}{M} \tag{4.62}$$

în care (x, y, z) reprezintă coordonatele unui punct curent P de masă dm al solidului rigid.

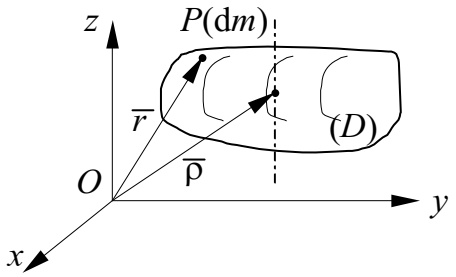


Fig. 4.36.

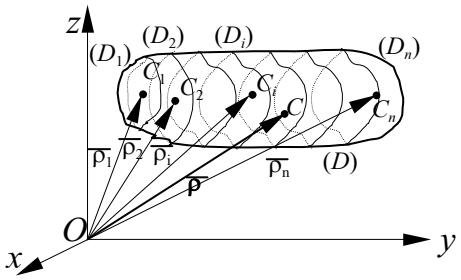


Fig. 4.37.

Din cele prezentate rezultă că centrul de greutate al unui solid rigid este o caracteristică fizico-geometrică a acestuia, el depinzând de configurația lui geometrică, precum și de distribuția masei în această configurație.

Cazuri particulare. a) Dacă domeniul (D) poate fi împărțit în n subdomenii (D_i), pentru care se cunosc masele M_i și centrele de greutate ale lor, C_i, prin vectorii de poziție $\overline{\rho}_i$, poziția centrului de masă al domeniului (D) se determină cu relația (fig. 4.37):

$$\overline{\rho} = \frac{\overline{\rho}_1 M_1 + \overline{\rho}_2 M_2 + \ldots + \overline{\rho}_i M_i + \ldots}{M_1 + M_2 + \ldots + M_i + \ldots} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{\rho}_i M_i}{\sum_{i=1}^{n} M_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{\rho}_i M_i}{M} \qquad (4.63)$$

deoarece, în baza relației (4.61) :

$$\overline{\rho}_i = \frac{\int_{(D_i)} \overline{r}\,\mathrm{d}m}{\int_{(D_i)} \mathrm{d}m} = \frac{\int_{(D_i)} \overline{r}\,\mathrm{d}m}{M}. \qquad (4.64)$$

Pe baza relațiilor (4.63) se determină coordonatele centrului de masă al rigidului (D):

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{ci} M_i}{M}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{ci} M_i}{M}; \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_{ci} M_i}{M}. \qquad (4.65)$$

b) Dacă corpul prezintă un plan de simetrie fizico-geometrică, centrul de greutate al corpului se află în acel plan (fig. 4.38):

$$z_C = \frac{\int\limits_{(D)} z\mathrm{d}m}{M} = \frac{\int\limits_{(D_1)} z\mathrm{d}m + \int\limits_{(D_2)} (-z)\mathrm{d}m}{M} = 0. \tag{4.66}$$

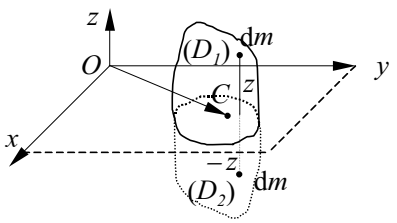


Fig. 4.38.

În mod analog:

– când corpul admite două plane de simetrie, adică o axă de simetrie, centrul de greutate se află pe acea axă;

– când corpul admite două axe de simetrie, centrul de greutate se află la intersecția celor două axe.

c) Dacă corpul este omogen, adică masa specifică medie (densitatea medie) γ este aceeași în tot domeniul ocupat de corp V, atunci $\mathrm{d}m = \gamma \mathrm{d}V$:

$$\bar{\rho} = \frac{\int\limits_{(D)} \bar{r}\gamma \mathrm{d}V}{\int\limits_{(D)} \gamma \mathrm{d}V} = \frac{\int\limits_{(V)} \bar{r}\mathrm{d}V}{\int\limits_{(V)} \mathrm{d}V} = \frac{\int\limits_{(V)} \bar{r}\mathrm{d}V}{V}. \tag{4.67}$$

d) Dacă corpul are două dimensiuni cu mult mai mari decât a treia, atunci el este identificat ca *placă*. Dacă placa este omogenă atunci $\mathrm{d}m = \gamma_S \mathrm{d}A$ și:

$$\bar{\rho} = \frac{\int\limits_{(D)} \bar{r}\gamma_S \mathrm{d}A}{\int\limits_{(D)} \gamma_S \mathrm{d}A} = \frac{\int\limits_{(A)} \bar{r}\mathrm{d}A}{\int\limits_{(A)} \mathrm{d}A} = \frac{\int\limits_{(A)} \bar{r}\mathrm{d}A}{A}, \tag{4.68}$$

unde A este suprafața totală a plăcii, iar γ_S – masa specifică superficială (densitatea superficială).

e) Dacă corpul are o dimensiune cu mult mai mare decât celelalte două, atunci el este identificat ca *bară*. Dacă bara este omogenă $\mathrm{d}m = \gamma_L \mathrm{d}l$ și:

$$\overline{\rho} = \frac{\int\limits_{(D)} \overline{r}\gamma_L \mathrm{d}l}{\int\limits_{(D)} \gamma_L \mathrm{d}l} = \frac{\int\limits_{(L)} \overline{r}\mathrm{d}l}{\int\limits_{(L)} \mathrm{d}l} = \frac{\int\limits_{(L)} \overline{r}\mathrm{d}l}{L}, \tag{4.69}$$

unde L este lungimea totală a barei, iar γ_L – masa specifică liniară (densitatea liniară).

Aplicații.

A.4.3. Să se determine centrul de greutate al unei bare omogene sub formă de arc de cerc cu raza R, cu un unghi la centru 2α (fig. 4.39).

Bara omogenă admite o axă de simetrie și deci, centrul de greutate se va afla pe acea axă (fig. 4.39). În conformitate cu sistemul de referință ales, va trebui calculată numai coordonata y_C. Alegând ca parametru unghiul θ, se paote vedea ușor că $\mathrm{d}l = R\mathrm{d}\theta$ și $y = R\cos\theta$. Aplicând relația (4.69) se obține:

$$y_C = \frac{\int\limits_{(L)} y\mathrm{d}l}{\int\limits_{(L)} \mathrm{d}l} = \frac{\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} R\cos\theta \cdot R\mathrm{d}\theta}{\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} R\mathrm{d}\theta} = R\frac{\sin\theta\big|_{-\alpha}^{\alpha}}{\theta\big|_{-\alpha}^{\alpha}} = R\frac{\sin\alpha}{\alpha} \tag{4.70}$$

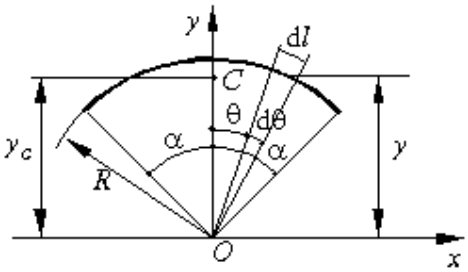


Fig. 4.39.

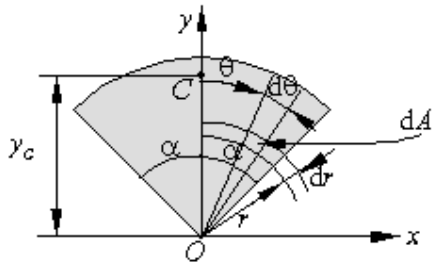


Fig. 4.40.

A.4.4. Să se determine centrul de greutate al unei plăci plane omogene sub forma unui sector de cerc de rază R și unghi la centru 2α (fig.4.40).

Adoptând sistemul de referință din figura 4.40 și ca parametri unghiul θ și raza r se poate scrie: $\mathrm{d}A = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ și $y = = r\cos\theta$.

În această situație :

$$y_C = \frac{\int\limits_{(A)} y\mathrm{d}A}{\int\limits_{(A)} \mathrm{d}A} = \frac{\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\int\limits_{0}^{R} r^2\cos\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r}{\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\int\limits_{0}^{R} r^2\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r} = \frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha} \tag{4.71}$$

A.4.5. Să se determine centrul de greutate al plăcii plane omogene prezentate în figura 4.41.

Se alege sistemul de referință din figura 4.41 și se împarte suprafața plăcii în subdomenii pentru care se cunoaște poziția centrului de greutate. Astfel, pentru sectorul circular distanța OC_1 se determină cu relația (4.71):

$$OC_1 = \frac{2}{3}a\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4a\sqrt{2}}{3\pi},$$

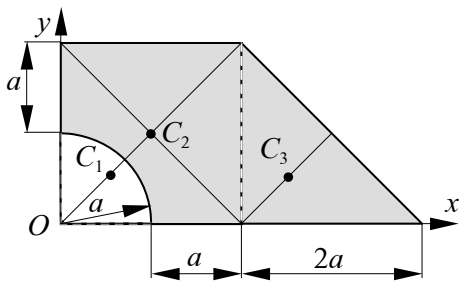


Fig.4.41.

centrul de greutate C_2, al pătratului, se află la intersecția diagonalelor, iar centrul de greutate C_3, al triunghiului se află la o treime de bază și două treimi de vârf .

Aplicând relațiile (4.63), în cazul plăcilor plane omogene, coordonatele centrului de greutate C se calculează cu relațiile:

$$x_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i A_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} A_i};\ y_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i A_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} A_i};\ z_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} z_i A_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} A_i}. \tag{a}$$

În cazul problemei date, $n = 3$. Pentru ușurința calculului se lucrează

Subdomeniu	x_i	y_i	A_i	x_iA_i	y_iA_i
C_1	$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4a}{3\pi}$	$-\frac{\pi a^2}{4}$	$-\frac{a^3}{3}$	$-\frac{a^3}{3}$
C_2	a	a	$4a^2$	$4a^3$	$4a^3$
C_3	$2a+\frac{a}{3}$	$\frac{2a}{3}$	a^2	$2a^3+\frac{a^3}{3}$	$\frac{2a^3}{3}$
		$\sum$	$(5-\frac{\pi}{4})\,a^2$	$6a^3$	$\frac{13}{3}a^3$

tabelar:

Efectuând sumele (a) se obține:

$$x_C = \frac{6a^3}{(5-\frac{\pi}{4})a^2} = 1{,}42a; \quad y_C = \frac{\frac{13}{3}a^3}{(5-\frac{\pi}{4})a^2} = 1{,}03a; \quad z_C = 0.$$

Teste.

T.4.10. Dacă toate forțele $\overline{F}_i$ din cadrul sistemului de forțe oarecare ($\overline{F}_i$) aplicate unui solid rigid sunt rotite în jurul punctelor lor de aplicație în același sens și cu același unghi, atunci:

a) torsorul sistemului de forțe ($\overline{F}_i$) este minimal;

b) torsorul sistemului de forțe ($\overline{F}_i$) nu se modifică;

c) torsorul sistemului de forțe ($\overline{F}_i$) se modifică;

d) torsorul sistemului de forțe ($\overline{F}_i$) este nul;

T.4.11. Vectorul $\overline{\rho}$, care definește centrul forțelor paralele, are următoarele proprietăți:

a) nu se modifică dacă forțele $\overline{F}_i$, ce alcătuiesc sistemul de forțe paralele, lunecă pe suporturile lor;

b) nu depinde de direcția forțelor paralele;

c) nu depinde de intensitatea forțelor $\overline{F}_i$;

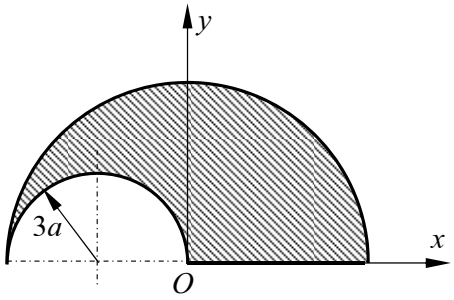


Fig. 4.42.

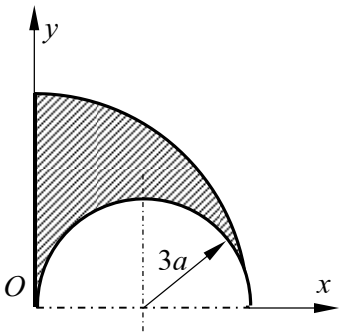


Fig. 4.43.

d) nu depinde de configurația sistemului de forțe ($\overline{F}_i$).

T.4.12. Pentru placa omogenă din figura 4.42 coordonata y_C a centrului de greutate este:

a) $y_C = 28a/3\pi$; *b*) $y_C = -27a/3\pi$;

c) $y_C = -26a/3\pi$; *d*) $y_C = 25a/3\pi$;

T.4.13. Pentru placa omogenă din figura 4.43 coordonata y_C a centrului de greutate este:

a) $y_C = a/\pi$; *b*) $y_C = -12a/\pi$;
c) $y_C = -3a/\pi$; *d*) $y_C = 12a/\pi$;

T.4.14. Condiția de echilibru pentru un sistem de forțe ($\overline{F_i}$) coplanare aplicate unui solid rigid, se exprimă prin:

a) două ecuații de proiecție în raport cu două axe perpendiculare cuprinse în planul forțelor și o ecuație de moment în raport cu o axă perpendiculară pe planul forțelor;

b) două ecuații de proiecție în raport cu două axe perpendiculare cuprinse în planul forțelor și o ecuație de moment în raport cu o axă cuprinsă în planul forțelor;

c) două ecuații de moment în raport cu două axe perpendiculare pe planul forțelor și o ecuație de proiecție în raport cu o axă din planul forțelor;

d) două ecuații de moment în raport cu două axe perpendiculare pe planul forțelor și o ecuație de proiecție în raport cu axa definită de punctele în care axele înțeapă planul forțelor.

T.4.15. Centrul de greutate al unei jumătăți de sferă omogene de rază *R* (fig. 4.44) se află la:

a) $3R/7$ de punctul *O* pe axa *Oy*;
b) $3R/8$ de punctul *O* pe axa *Oy*;
c) $3R/5$ de punctul O pe axa *Oy*;
d) $3R/6$ de punctul O pe axa *Oy*.

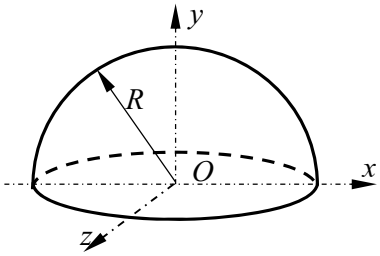


Fig. 4.44.

4.9. ECHILIBRUL SOLIDULUI RIGID ACŢIONAT DE FORŢE

S-a arătat că interacțiunea dintre corpuri se poate manifesta prin contact direct sau "la distanță". Acțiunea forțelor "la distanță" se exercită asupra fiecărei particule materiale din care este alcătuit corpul, proporțional cu masa acestuia. Din această cauză aceste forțe se mai numesc și masice. Forțele "de contact" se manifestă numai în punctele de contact ale corpului cu alte corpuri, deci în punctele de pe suprafață.

4.9.1. Corp liber şi corp legat. Grade de libertate

Un corp material, un solid rigid, este liber când se poate mișca oricum în spațiu sub acțiunea forțelor aplicate asupra lui.

Corpul legat este corpul a cărui mișcare mecanică este stânjenită de alte corpuri, prin anumite restricții de natură geometrică, denumite legături.

Corpurile de referință sunt acele corpuri care sunt legate solidar de sistemul de referință. Cu alte cuvinte, corpurile de referință nu își modifică în timp poziția față de sistemul de referință. Legăturile dintre corpul a cărui mișcare mecanică se studiază și corpurile de referință sunt numite *legături exterioare*. Dacă avem mai multe corpuri ce interacționează între ele și în același timp cu corpurile de referință, legăturile dintre ele sunt numite *legături interioare*.

Un corp material solid liber are *șase* grade de libertate cinematică, adică sunt necesari *șase* parametri pentru a-i defini poziția față de un sistem de referință. Dacă se aleg trei puncte necolineare ce aparțin solidului rigid: P_1, P_2, P_3, se poate constata că ele definesc $3 \times 3 = 9$ parametri pentru identificarea pozițiilor lor față de reperul considerat (fig. 4.45).

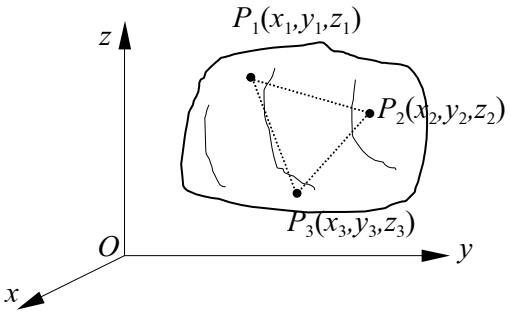


Fig. 4.45.

Pe de altă parte, deoarece, corpul material este considerat ca solid rigid, distanțele $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_3P_1}$ rămân constante. Din această cauză, între cei nouă parametri apar trei relații de legătură de forma:

$$\left|\overline{P_iP_j}\right| = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}\ ; \quad i,j = 1,2,3 \text{ cu } i \neq j. \qquad (4.72)$$

Rămân deci numai *șase* parametri independenți care determină poziția solidului rigid.

Cei șase parametri independenți, ce pot fi notați generic q_i (i=1,2,...,6) poartă denumirea de *coordonate generalizate* ale corpului.

4.9.2. Echilibrul solidului rigid liber

Un corp solid rigid liber se află în echilibru, sub acțiunea unui sistem de forțe, atunci când el nu-și modifică starea de repaus pe care o avea față de un reper oarecare înainte de aplicarea sistemului de forțe.

Condiția necesară și suficientă pentru ca un corp solid liber să rămână în echilibru când asupra lui acționează un sistem de forțe ($\overline{F}_i$) (i=1,2,...,n) este ca sistemul de forțe dat să fie echivalent cu un sistem de forțe nul. Aceasta condiție este îndeplinită atunci când torsorul sistemului de forțe ($\overline{F}_i$) este nul într-un punct (vezi (4.39)).

Condițiile vectoriale (4.39) se exprimă analitic prin trei ecuații de proiecție și trei ecuații de moment conform relațiilor (4.46).

Dacă sistemul de forțe ($\overline{F}_i$) este un sistem de forțe coplanare, condițiile vectoriale (4.39) se exprimă conform celor prezentate în paragraful 4.7.1.

Ecuațiile prin care se pune condiția de torsor nul, al unui sistem de forțe ce acționează asupra unui solid rigid, poartă numele de *ecuații de echilibru*.

În cazul problemei directe, atunci când sistemul de forțe ($\overline{F}_i$) este precizat și se cere să se determine poziția de echilibru, problema este static determinată deoarece, în cazul unui sistem de forțe oarecare în spațiu, numărul ecuațiilor de echilibru (șase) este egal cu numărul necunoscutelor (șase) ce determină poziția de echilibru.

În cazul problemei indirecte, atunci când se cunoaște poziția de echilibru a solidului rigid și se cere să se determine sistemul de forțe ($\overline{F}_i$) sub acțiunea căruia corpul rămâne în repaus în poziția dată, problema este static nedeterminată, numărul necunoscutelor fiind mai mare decât cel al ecuațiilor. Problema poate deveni static determinată dacă sistemului de forțe

($\overline{F}_i$) i se impune un număr de condiții, sub forma unor relații fizice, astfel încât aceste relații, împreună cu ecuațiile de echilibru să formeze un sistem rezolvabil.

4.9.3. Echilibrul solidului rigid legat

Anterior s-a arătat că un corp solid legat are mișcarea îngrădită de o serie de restricții de natură geometrică impuse corpului de legăturile acestuia cu alte corpuri.

De asemenea, s-a precizat faptul că orice legătură poate fi înlocuită printr-o forță, numită forță de legătură. În felul acesta corpul devine liber, dar rămâne cu restricțiile geometrice impuse de legături. Rezultă, că forțele de legătură nu pot fi introduse oricum, ele trebuie să îndeplinească anumite condiții, care la rîndul lor să reflecte restricțiile impuse de legături.

Problema echilibrului solidului rigid acționat de un sistem de forțe ($\overline{F}_i$) cuprinde trei aspecte:

a) După înlociurea legăturilor prin forțe de legătură corpul devine liber și sub acțiunea forțelor efectiv aplicate $\overline{F}_i^a$ ($i = 1,2,...,n$) și de legătură $\overline{F}_j^l$ (j=1,2,...,m), este în echilibru dacă torsorul forțelor, în ansamblu, este nul într-un punct:

$$\mathrm{T}_O(\overline{F}_i^a, \overline{F}_j^l)\begin{cases} \overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^a + \sum_{j=1}^{m} \overline{F}_j^l = 0 \\ \overline{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{M}_O \overline{F}_i^a + \sum_{j=1}^{m} \mathrm{M}_O \overline{F}_j^l = 0 \end{cases} \tag{4.73}$$

Relația (4.73) constituie *aspectul static* al problemei și conduce la scrierea ecuațiilor de echilibru.

b) Restricțiile de natură geometrică impuse de legături sunt exprimate, explicit sau implicit, de un număr oarecare de relații geometrice între coordonatele generalizate q_i ale corpului, aceste relații constituind *aspectul geometric* al problemei.

c) *Aspectul fizic* al problemei constă în condițiile de natură fizică pe care trebuie să le îndeplinească forțele de legătură pentru a respecta restricțiile geometrice impuse de legături.

Ecuațiile de echilibru împreună cu relațiile geometrice și cu condițiile fizice trebuie să constituie un sistem complet de ecuații în care, necunoscutele trebuie să fie egale, ca număr, cu ecuațiile sistemului.

De remarcat este faptul că, în cazul corpului legat, problema se prezintă

atât sub aspectul direct cât și indirect. Acest lucru face ca necunoscutele să se împartă în necunoscute geometrice, referitoare la parametrii corespunzători gradelor de libertate rămase corpului solid (pe care le vom numi *necunoscute principale*) și în necunoscute fizice, referitoare la caracteristicile forțelor de legătură (pe care le vom numi *necunoscute secundare*).

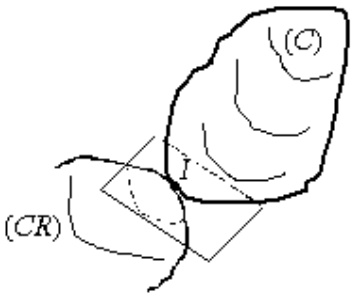


Fig. 4.46.

Când corpul solid supus la legături nu are nici-un grad de libertate atunci se spune că el are legături complete. În acest caz problema se pune sub formă indirectă și ea este static determinată. Dacă însă corpul are legături mai multe decât îi sunt necesare pentru a rămâne fără nici un grad de libertate, problema devine static nedeterminată. Rezolvarea problemei, în acest caz, se face cu ajutorul relațiilor furnizate de mecanica aplicată.

Pentru a putea preciza condițiile pe care să le îndeplinească forțele de legătură, impuse de principiul forțelor de legătură, trebuie cunoscute și studiate tipurile de legături pe care un solid rigid le poate avea.

4.10. LEGĀTURILE SOLIDULUI RIGID

Un solid rigid poate avea următoarele tipuri de legături simple: reazem simplu, articulație, și încastrarea.

Dacă corpul solid are mai multe legături se spune despre el că are legături multiple.

4.10.1. Reazemul simplu punctiform

Un solid rigid se reazemă simplu pe un alt corp atunci când are un singur punct de contact cu acesta (fig. 4.46).

Din punctul de vedere al gradelor de libertate, reazemul simplu punctiform împiedică deplasarea corpului (*C*) după direcția normală la planul tangent comun în punctul *I* la cele două corpuri.

Punctul *I* se numește punct teoretic de contact, deoarece atât corpul (*C*) cât și corpul de referință (*CR*) sunt considerate, în mecanica teoretică, rigide

perfecte. În realitate însă, contactul dintre cele două corpuri are loc pe o mică suprafață datorită deformabilității (reale) a corpurilor în zona de contact (fig. 4.47, *a*). Zona de contact este cu atât mai mică cu cât corpurile sunt în realitate mai rigide.

Se poate considera că suprafața de contact (*S*) este plană și că aparține planul tangent comun în punctul teoretic de contact *I*. Această modelare nu duce la erori mari.

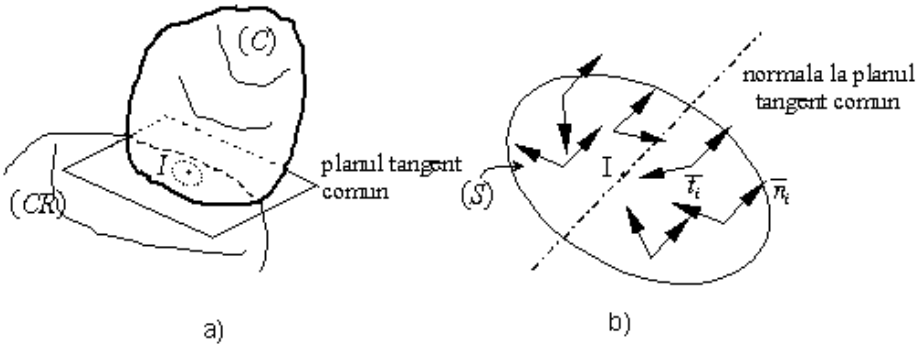


Fig. 4.47.

Între corpul (*C*) și corpul de referință, în zona de contact există o infinitate de puncte comune, puncte de contact. Considerând fiecare punct ca fiind supus unei legături pe suprafața (*S*), în urma ruperii acesteia se introduc cele două forțe de legătură $\bar{n}_i$ și $\bar{t}_i$. Forțele normale $\bar{n}_i$ au cunoscută direcția (paralelă cu normala la (*S*) în *I* (fig. 4.47, *b*), deci normală pe planul tangent comun) și sensul.

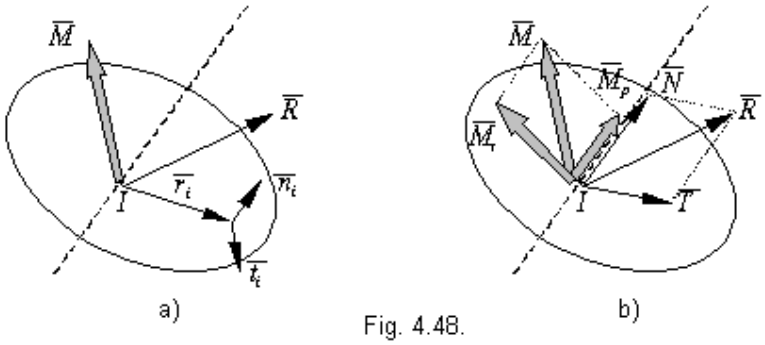


Fig. 4.48.

Forțele $\bar{t}_i$ au suporturile în planul tangent comun la cele două corpuri în *I* (fig. 4.47, *b*). În felul acesta au luat naștere două sisteme de forțe: sistemul de forțe paralele $\bar{n}_i$ și sistemul de forțe coplanare $\bar{t}_i$.

Reducând cele două sisteme de forțe în punctul teoretic de contact I se obține o forță rezultantă $\overline{R}$ și un cuplu de moment $\overline{M}$ care se determină cu relațiile (vezi fig. 4.48, *a*):

$$\mathrm{T}_I \begin{cases} \overline{R} = \sum \overline{n}_i + \sum \overline{t}_i \\ \overline{M} = \sum \mathrm{M}_I \overline{n}_i + \sum \mathrm{M}_I \overline{t}_i \end{cases} \quad (4.74)$$

Dacă se descompune forța $\overline{R}$ după normala la planul tangent comun și după o direcție cuprinsă în planul tangent comun se obțin două componente (fig. 4.48, *b*):

$$\overline{R} = \overline{N} + \overline{T}\,;\ \overline{N} = \sum \overline{n}_i\,;\ \overline{T} = \sum \overline{t}_i\,, \quad (4.75)$$

unde $\overline{N}$ poartă denumirea de *reacțiune normală* și $\overline{T}$ – *reacțiune tangențială* sau *forță de frecare de alunecare*.

Reacțiunea normală $\overline{N}$ se opune deplasării corpului pe direcția normală la planul tangent comun și:

– se aplică în punctul teoretic de contact;

– are direcția normală pe planul tangent comun;

– sensul este în funcție de legăturile diferitelor puncte din zona de contact - unilaterale sau bilaterale;

– mărimea poate fi oricât de mare.

Dacă legătura este unilaterală atunci $0 \le N \le +\infty$, iar dacă legătura este bilaterală atunci $-\infty \le N \le +\infty$. În cazul legăturii unilaterale dacă marimea scalară a lui N rezultă negativă înseamnă că legătura nu există (nu funcționează).

Reacțiunea tangențială $\overline{T}$ este generată de frecare și deci:

– se aplică în punctul teoretic de contact;

– are suportul cuprins în planul tagent comun;

– are sensul opus mișcării (sau tendinței de mișcare) de lunecare pe planul tangent comun;

– mărimea sa nu poate depăși o valoare limită

$$T \le T^l. \quad (4.76)$$

În cazul "frecării uscate" experimental s-a constatat:

$$T^l = \mu N\,, \quad (4.77)$$

în care μ este un coeficient adimensional, denumit *coeficient de frecare de alunecare* și verifică în general legile lui Coulomb.

În cazul "frecării umede", când se produce mișcarea de alunecare, s-a constatat experimental că:

$$T^{l} = k\,v \tag{4.78}$$

unde k este un coeficient dimensional, iar v – mărimea vitezei cu care punctul de contact se deplasează, prin alunecare, pe suprafața de rezemare.

Cuplul de moment $\overline{M}$ se descompune după aceleași direcții ca reacțiunea $\overline{R}$ și se obține (fig. 4.48, *b*):

$$\overline{M} = \overline{M}_r + \overline{M}_p\,; \quad \overline{M}_r = \sum \mathsf{M}_I \overline{n}_i\,; \quad \overline{M}_p = \sum \mathsf{M}_I \overline{t}_i\,. \tag{.4.79}$$

C*uplu de frecare de rostogolire* $\overline{M}_r$ depinde de mărimea zonei de contact și deci intensitatea lui are o mărime limită. El are următoarele caracteristici:

– punctul de aplicație în punctul teoretic de contact;

– direcția lui este cuprinsă în planul tangent comun;

– sensul lui este opus mișcării de rostogolire (respectiv tendinței de rostogolire) a corpului (*C*) pe planul tangent comun;

– mărimea lui scalară nu poate depăși o valoare limită:

$$M_r \le M_r^{l} \tag{4.80}$$

Experimental s-a constatat că:

$$M_r^{l} = sN \tag{4.81}$$

unde s este un coeficient cu dimensiuni de lungime, denumit *coeficient de frecare la rostogolire*; mărimea acestuia depinde de rigiditatea corpurilor în contact și de forma acestora în punctul de contact.

C*uplu de frecare de pivotare* $\overline{M}_p$ depinde de mărimea și forma zonei de contact și se opune mișcării de pivotare a corpului în jurul unei axe normale pe planul tangent comun. El este caracterizat astfel:

– punctul de aplicație este în punctul teoretic de contact;

– direcția lui este normală la planul tangent comun;

– sensul lui este opus mișcării de pivotare (respectiv tendinței de pivotare) a corpului;

– mărimea lui scalară nu poate depăși o valoare limită:

$$M_p \le M_p^{l} \tag{4.82}$$

Experimental s-a constatat că:

$$M_p^l = s'N \tag{4.83}$$

unde s' este un coeficient cu dimensiuni de lungime denumit *coeficient de frecare de pivotare*; se determină experimental pentru fiecare caz în parte și mărimea lui depinde de forma și dimensiunile zonei de contact.

Trebuie făcută observația că atunci când corpul (C) se află în repaus, trebuie examinat prin ce mișcare (sau combinații de mișcări) este posibilă stricarea echilibrului; în concluzie, se vor introduce numai acele cupluri care apar drept consecință a tendinței de mișcare.

4.10.2. Articulaţia

Legătura unui solid rigid de tipul articulației poate fi de două feluri: *articulație spațială* (sau *sferică*) și *articulație plană* (sau *cilindrică*).

a) **Articulația spațială** sau **sferică**. Se spune că un solid rigid este articulat de alt corp atunci când au un punct comun (fig. 4.49), denumit în mod curent articulație, în jurul căruia se pot roti oricum, unul în raport cu celălalt.

Corpul ce prezintă o articulație sferică rămâne numai cu trei grade de libertate în raport cu sistemul de referință (CR). Aceste trei grade de liberate sunt materializate în trei rotiri în jurul a trei axe trirectangulare.

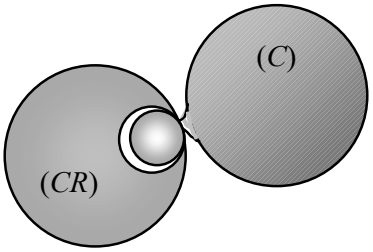


Fig.4.49.

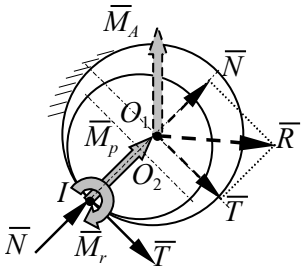


Fig. 4.50.

Realizarea practică a acestui tip de legătură se face prin intermediul a două sfere. O sferă ce aparține corpului (C) și care este cuprinsă de a doua sferă ce aparține corpului de referință (CR). De menționat este faptul că legătura se poate realiza și invers, sfera cuprinsă să fie a corpului de referință.

Din realizarea practică a articulației sferice se poate constata că de fapt acest tip de legătură este în realitate tot un reazem simplu, dar de o formă specială (fig. 4.50). Datorită formei sferice a legăturii, punctul teoretic de contact I poate să fie oriunde pe suprafața sferei fixe (cea care aparține (CR) și care are centrul în punctul O_1 (fig. 4.50)) .

Introducând forțele și cuplele de momente ce apar într-un reazem simplu, și reducându-le apoi în centrul sferei fixe se obține:

$$\overline{R} = \overline{N} + \overline{T} \tag{4.84}$$

$$\overline{M}_A = \overline{M}_p + \overline{M}_r + \overline{O_1 I} \times \overline{T} \tag{4.85}$$

Centrul sferei fixe O_1 se numește punctul teoretic de articulație, iar raza sferei fixe r_1, raza articulației. Din relația (4.85) se constată că momentul $\overline{M}_A$ este creat de frecările de alunecare, de rostogolire și de pivotare ce apar între sfera fixă și cea mobilă.

Reacțiunea din articulație $\overline{R}$ este definită astfel:

– punctul de aplicație este în centrul sferei fixe, O_1;

– direcția și sensul sunt oarecare deoarece punctul I poate fi oriunde pe sfera fixă;

– mărimea ei scalară poate fi oricât de mare datorită principiului rigidității;

Cuplul de frecare din articulație $\overline{M}_A$ este definit astfel:

– punctul de aplicație este în centrul sferei fixe, O_1;

– direcția și sensul sunt oarecare;

– mărimea lui scalară nu poate depăși o valoare limită și anume:

$$M_A \leq M_A^l \tag{4.86}$$

unde valoarea limită poate fi luată sub forma:

$$M_A^l = \lambda R \tag{4.87}$$

în care λ este coeficientul de frecare din articulație, cu dimensiunea unei lungimi; de la caz la caz, λ se determină experimental.

b) **Articulația cilindrică sau plană**. În cazul acestui tip de legătură, cele două sfere sunt înlocuite de doi cilindri, fapt ce face ca forțele de legătură $\overline{N}$ și $\overline{T}$ să fie situate într-un plan perpendicular pe axele celor doi cilindri (fig. 4.51) și cuplul de frecare de pivotare $\overline{M}_p$ să nu existe. Sensul lui $\overline{T}$ este legat de

sensul cuplului de frecare de rostogolire $\overline{M}_r$, din punctul I (de fapt, rostogolirea se produce în jurul generatoarei comune ce trece prin I).

În consecință, deoarece $\overline{T}$ și $\overline{M}_r$ ating concomitent valorile lor limită, rezultă:

$$M_A^l = M_r^l + rT^l = sN + \mu rN = (s + \mu r)\,N\,;$$

$$M_A^l = \lambda R = \lambda\sqrt{N^2 + (T^l)^2} = N\lambda\sqrt{1+\mu^2}$$

unde r este raza cilindrului fix.

În final se obține:

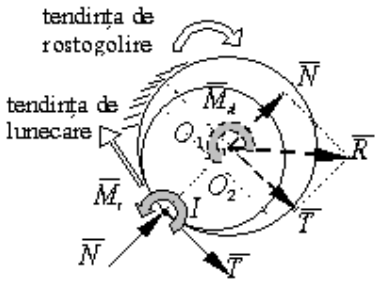


Fig. 4.51.

$$\lambda = \frac{s + \mu r}{\sqrt{1+\mu^2}} \qquad (4.88)$$

Prin natura suprafețelor în contact din articulație (de obicei ele sunt prelucrate fin) se poate neglija μ^2 în raport cu 1 și deci :

$$\lambda = s + \mu r \qquad (4.89)$$

De asemenea, cilindrii ce alcătuiesc articulația sunt rigizi și au razele mici, apropiate ca valoare. Din această cauză s se poate neglija în raport cu μr și se poate lua:

$$\lambda = \mu r \qquad (4.90)$$

Sunt însă cazuri când frecarea de orice natură se poate neglija. În această situație singura forță de legătură ce apare este $R(=N)$ ce are necunoscute mărimea și sensul.

Deci, în cazul articulației cilindrice rezultanta forțelor de legătură se află în planul forțelor efectiv aplicate, iar cuplul de frecare are direcția perpendiculară pe acest plan, opunându-se mișcării posibile.

4.10.3. Încastrarea

Se spune că un corp este încastrat în alt corp atunci când ele sunt perfect înțepenite unul în altul.

În această situație corpul (C) nu mai are nici-un grad de libertate față de corpul de referință (CR) (fig. 4.52, a).

Se constată că o parte dintre punctele corpului (C), situate pe suprafața de contact, sunt obligate să rămâna fixe pe suprafața similară a corpului de referință.

Eliberând punctele respective se introduc forțele de legătură $\bar{f}_i$, oricum dispuse și oricât de mari (fig. 4.52, *b*).

Reducând acest sistem de forțe într-un punct I oarecare, denumit punct teoretic de încastrare, rezultă o forță $\overline{R}$ și un cuplu de moment $\overline{M}_I$.

Forța $\overline{R}$, numită *reacțiunea din încastrare,* este definită astfel:

– punctul de aplicație este în punctul teoretic de încastrare;

– direcția și sensul sunt oarecare;

– intensitatea este oricât de mare.

Cuplul de moment $\overline{M}_I$, cuplul de moment din încastrare, are următoarele caracteristici:

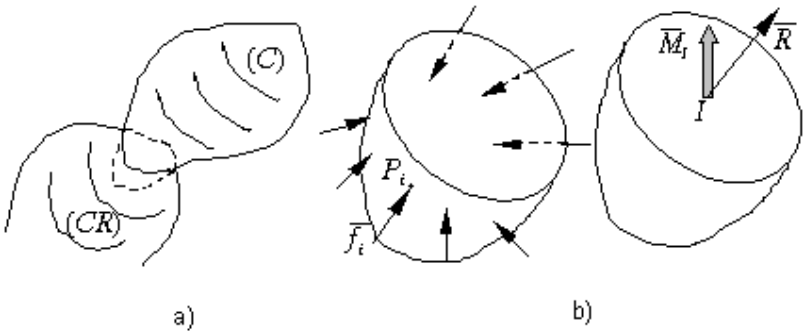


Fig. 4.52.

– punctul de aplicație este în punctul teoretic de încastrare;

– direcția și sensul sunt oarecare;

– intensitatea este oricât de mare.

Dacă forțele efectiv aplicate ce acționează corpul (C) sunt coplanare, atunci încastrarea este o *încastrare plană*, la care forța $\overline{R}$ are direcția cuprinsă în planul forțelor, iar cuplul de moment $\overline{M}_I$ are direcția perpendiculară pe planul forțelor.

4.10.4. Reprezentarea grafică a diferitelor tipuri de legături

Tipurile particulare de legături pe care un solid rigid le poate avea cu sistemul de referință și care au fost prezentate anterior sunt schematizate atât în mecanica teoretică cât și în mecanica aplicată astfel:

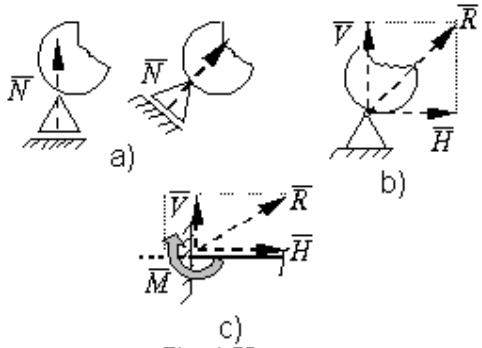


Fig. 4.53.

a) reazemul simplu punctiform la care s-au neglijat toate frecările, ca în figura 4.53, *a*; forța de legătură *N* are totdeauna direcția perpendiculară pe cele două linii paralele;

b) articulația plană la care, de asemenea s-au neglijat frecările, ca în figura 4.53, *b*; cele două forțe de legătură introduse *V* și *H* pot fi introduse oricum dar cu condiția de a avea întotdeauna suporturile perpendiculare între ele;

c) încastrarea plană ca în figura 4.53, *c*; și aici trebuie ca forțele de legătură *V* și *H* să aibă suporturile perpendiculare între ele.

Aplicații.

A.4.6. O bară *AB* de lungime 2*l* și greutate *P* este lăsată să lunece pe suprafața interioară a unui semicilindru neted de rază *R*. Se cere să se determine poziția de echilibru prin intermediul unghiului θ (fig. 4.54).

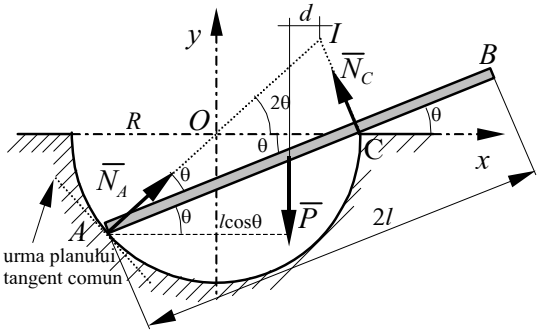


Fig. 4.54.

Datorită faptului că nu există frecare, bara *AB* alunecă pe suprafața interioară a semicili-ndrului până în poziția de echilibru.

Fie θ unghiul corespunzător poziției de echilibru (fig. 4.54).

Corpul *AB* fiind supus la legături în *A* și *C*, pentru a putea pune condiția de torsor nul (vezi relația (4.73)) va trebui să rupem legăturile și să introducem forțele de legătură.

În punctul *A* bara prezintă o legătură de tipul reazemului simplu punctiform fără frecare. Deci singura forță ce apare este $\overline{N}_A$ perpendiculară pe planul tangent comun (la bară și cilindru) în *A*.

În punctul *C* legătura barei este tot un reazem simplu punctiform fără frecare, de data aceasta planul tangent comun fiind chiar planul barei și deci $\overline{N}_C \perp \overline{AB}$.

Forța efectiv aplicată $\overline{P}$ și forțele de legătură $\overline{N}_A$ și $\overline{N}_C$, fiind cuprinse în același plan, condiția (4.73) se transpune în trei ecuații scalare: două de proiecție și una de moment.

$$\left(\sum pr(\overline{F}_i)_{OX} = 0\right): \quad N_A\cos 2\theta - N_C\sin\theta = 0, \tag{a}$$

$$\left(\sum pr(\overline{F}_i)_{OX} = 0\right): \quad N_A\sin 2\theta + N_C\cos\theta - P = 0, \tag{b}$$

$$\left(\sum \mathsf{M}_A(\overline{F}_i) = 0\right): \quad -Pl\cos\theta + N_C\cdot 2R\cos\theta = 0. \tag{c}$$

Din ecuația (c) rezultă $N_C = \dfrac{Pl}{2R}$ deoarece $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pi/2$, soluție neacceptabilă deoarece în acest caz bara *AB* ar avea poziție verticală. Deci $\cos\theta \neq 0$.

Din ecuația (a) rezultă:

$$N_A = N_C\frac{\sin\theta}{\cos 2\theta} = \frac{Pl}{2R}\,\frac{\sin\theta}{\cos 2\theta}.$$

Înlocuind N_A și N_C în (b), prin prelucrare, se obține:

$$2\cos^2\theta - \frac{l}{2R}\cos\theta - 1 = 0. \tag{d}$$

Soluțiile ecuației (d) sunt:

$$\cos\theta = \frac{l}{8R} \pm \frac{1}{4}\sqrt{\frac{l^2}{4R^2} + 8}$$

dintre care $\cos\theta = \dfrac{l}{8R} + \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{l^2}{4R^2} + 8}$ permite determinarea unghiului θ pentru poziția de echilibru:

$$\theta = \arccos\left(\frac{l}{8R} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{l^2}{4R^2} + 8}\right). \tag{e}$$

Problema propusă nu poate avea soluție pentru orice valori ale lui R și l deoarece $\cos\theta \le 1$. Din această cauză:

$$\frac{l}{8R}+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{l^2}{4R^2}+8} \le 1.$$

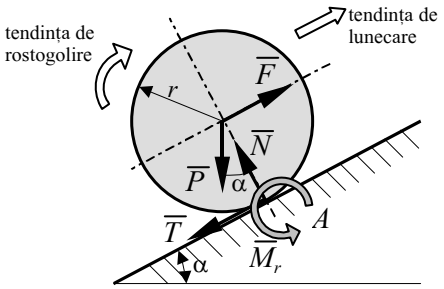


Fig. 4.55.

Rezultă $l \le 2R$, ce are ca semnificație fizică faptul că centrul de greutate al barei (punctul de aplicație al forței $\overline{P}$) este situat în stânga punctului C.

Pentru ca bara AB să rămână în echilibru, este sufucient ca cele trei forțe coplanare $\overline{N}_A$, $\overline{N}_C$ și $\overline{P}$ să aibă suporturile concurente într-un punct, de exemplu în I. De fapt, bara AB va luneca pe suprafața interioară a semicilindrului până când punctul I se va afla pe suportul forței $\overline{P}$. În această situație $d = 0$ și $\mathcal{M}_I(\overline{F}_i) = 0$, (deoarece $\mathcal{M}_I(\overline{N}_A) = 0$ și $\mathcal{M}_I(\overline{N}_C) = 0$). Rezultă:

$$P[2R\cos 2\theta - l\cos\theta] = 0,$$

sau

$$\cos 2\theta - \frac{l}{2R}\cos\theta = 0,$$

ce conduce la aceeași ecuație (d) cu soluția (e).

A.4.7. Un cilindru de rază r și greutate P este menținut în echilibru pe un plan înclinat cu ungiul de cea mai mare pantă α de o forță F aplicată în centrul de greutate și paralelă cu linia de cea mai mare pantă (fig. 4.47). Cât de mare trebuie să fie intensitatea forței F pentru ca cilindrul să rămână în echilibru dacă este considerată atât frecarea de lunecare prin coeficientul de frecare de lunecare μ, cât și frecarea de rostogolire prin coeficientul de frecare de rostogolire s?

Se poate constata că cilindrul de rază r se sprijină cu frecare pe planul înclinat. Din această cauză pe lângă forța de legătură normală $\overline{N}$ apare și forța de frecare de alunecare $\overline{T}$, al cărei sens a fost adoptat în ipoteza că tendința de lunecare a cilindrului este în susul planului înclinat (fig. 4.47).

Considerând că mișcarea de pivotare nu se produce, singurul cuplul de frecare ce apare este cuplu de frecare de rostogolire $\overline{M}_r$ al cărui sens a fost, de asemenea, adoptat arbitrar considerând că tendința de rostogolire a cilindrului este în susul planului înclinat (fig. 4.47).

Sistemul de forțe efectiv aplicate ($\overline{P}$ și $\overline{F}$) și de legătură ($\overline{N}, \overline{T}$), formează un sistem de forțe coplanare, iar cuplul $\overline{M}_r$ fiind perpendicular pe planul forțelor, ecuațiile de echilibru sunt în număr de trei. Ele vor fi scrise astfel: o ecuație de proiecție pe direcția planului înclinat, o ecuație de proiecție pe o direcție normală la planul înclinat și o ecuație de moment în raport cu punctul A:

$$F - P\sin\alpha - T = 0\ ; \tag{f}$$

$$N - P\cos\alpha = 0\ ; \tag{g}$$

$$M_r - Fr + Pr\sin\alpha = 0. \tag{h}$$

Se poate constat că sunt patru necunoscute (mărimile forțelor F, N, T și marimea cuplului M_r) și doar trei ecuații. Din această cauză lângă condițiile de echilibru de natură statică trebuie precizate și condițiile de natură fizică (condițiile de natură geometrică fiind implicite):

$$T \leq \mu N \tag{i}$$

$$M_r \leq sN. \tag{j}$$

Echilibrul se poate strica fie prin alunecare, fie prin rostogolire, fie prin alunecare și rostogolire. Mai întâi se va studia pierderea echilibrului prin alunecare, apoi prin rostogolire, urmând ca în final să se facă o analiză a diferitelor cazuri.

Condiția de nealunecare. Din ecuația (f) rezultă:

$$T = F - P\sin\alpha,$$

iar din (g)

$$N = P\cos\alpha.$$

Înlocuind aceste valori în inegalitatea (i) rezultă:

$$F \leq P(\sin\alpha + \mu\cos\alpha).$$

Pentru a determina valoarea forței F la care cilindrul nu va aluneca în josul planului, în ultima relație se schimbă sensul inegalității și semnul coeficientului de frecare de lunecare. Rezultă:

$$F \geq P(\sin\alpha - \mu\cdot\cos\alpha).$$

Codiția generală de nealunecare a cilindrului pe planul înclinat va fi :

$$P(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \le F \le P(\sin\alpha + \mu\cos\alpha). \qquad \text{(k)}$$

Condiția de nerostogolire. Din ecuația (h) se determină:

$M_r = Fr - Pr\sin\alpha$.

Înlocuit în (j) el ne duce la valoarea forței F pentru care cilindrul nu se rostogolește în susul planului înclinat:

$$F \le P(\sin\alpha + \frac{s}{r}\cos\alpha).$$

Pentru ca echilibrul să nu se strice prin rostogolire în josul planului forța F trebuie să îndeplinească condiția:

$$F \ge P(\sin\alpha - \frac{s}{r}\cos\alpha).$$

Codiția generală de nerostogholiore a cilindrului pe planul înclinat va fi deci:

$$P(\sin\alpha - \frac{s}{r}\cos\alpha) \le F \le P(\sin\alpha + \frac{s}{r}\cos\alpha). \qquad \text{(l)}$$

Din analiza inecuațiilor (k) și (l) se evidențiază următoarele modalități de pierdere a echilibrului roții:

– dacă $\mu < s/r$ atunci echilibru se pierde prin alunecare;

– dacă $\mu > s/r$ atunci echilibrul se pierde prin rostogolire;

– dacă $\mu = s/r$ atunci echilibrul se pierde atât prin alunecare cât și prin rostogolire.

De obicei la roțile de vehicole $\mu > s/r$ din care cauză la urcare roata începe mai întâi să se rostogolească.

Teste

T.4.16. O articulație sferică răpește unui solid rigid:

a) două grade de libertate;

b) trei grade de libertate;

c) patru grade de libertate;

d) cinci grade de libertate.

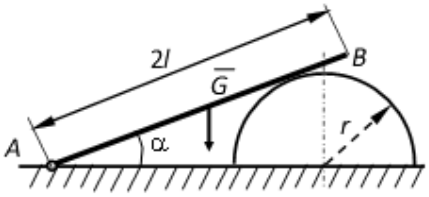


Fig. 4.56.

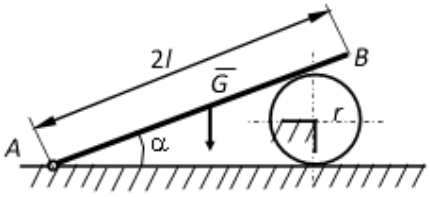


Fig. 4.57.

T.4.17. O articulație cilindrică răpește unui solid rigid:

a) două grade de libertate;

b) trei grade de libertate;

c) patru grade de libertate;

d) cinci grade de libertate.

T.4.18. Bara *AB* de lungime 2*l* și greutate *G* este articulată în *A* și se sprijină pe un semicilindru neted de rază *r* (fig. 4.56). Forța de legătură dintre bară și semicilindru are valoarea:

a) Gl/r; *b*) $Gl/r\sin\alpha$; c) $Gl\sin\alpha/r$ *c*) $-Gr/l$.

T.4.19. Bara *AB* de lungime 2*l* și greutate *G* este articulată în *A* și se sprijină pe un cilindru neted de rază *r* (fig. 4.57). Forța de legătură dintre bară și cilindru are valoarea:

a) $G\frac{l}{r}\cos\alpha\cdot ctg\frac{\alpha}{2}$;

b) $G\frac{l}{r}\sin\alpha\cdot ctg\frac{\alpha}{2}$;

c) $G\frac{l}{r}\sin\alpha\cdot tg\frac{\alpha}{2}$;

d) $G\frac{l}{r}\cos\alpha\cdot tg\frac{\alpha}{2}$.

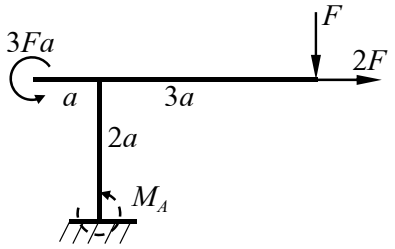


Fig. 4.58.

T.4.20. Pentru cadrul din figura 4.58. valoarea momentului din încastrarea *A* este:

a) 3*Fa*; *b*) 4*Fa*;

c) 5*Fa*; *c*) 6*Fa*.

5. STATICA SISTEMELOR DE CORPURI

5.1. DEFINIŢIE, LEGĀTURI, FORŢE EFECTIV APLICATE, FORŢE DE LEGĀTURĀ

Un sistem de corpuri constă dintr-un grup de corpuri, legate între ele prin legături de tipul celor examinate în capitolul 4.10: reazeme simple, articulații sau încastrări.

Un corp ce aparține sistemului poate avea legături exterioare cu unul sau mai multe corpuri de referință, în unul sau mai multe puncte ale lui. De asemenea, el poate avea legături interioare cu unul sau mai multe corpuri din sistem, în unul sau mai multe puncte ale lui (fig. 5.1).

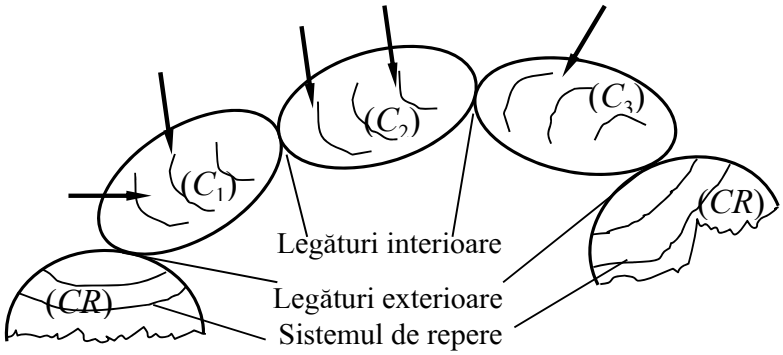


Fig. 5.1.

Ca urmare forțele de legătură ce apar în cadrul unui sistem de corpuri pot fi:

– *forțe de legătură exterioare* – cele care se manifestă între corpurile ce alcătuiesc sistemul și corpurile de referință;

– *forțe de legătură interioare* – cele care se manifestă între corpurile ce alcătuiesc sistemul.

Referitor la forțele care apar în cazul sistemelor de corpuri – forțe efectiv aplicate și forțe de legătură – trebuie precizat că operațiile elementare de echivalență nu se pot aplica decât asupra forțelor ce acționează asupra fiecărui corp în parte.

Iar în ceea ce privește forțele de legătură interioare, acestea sunt egale două câte două și direct opuse, conform principiului egalității acțiunilor reciproce.

5.2. ECHILIBRUL SISTEMELOR DE CORPURI ACŢIONATE DE FORŢE

Pentru ca un sistem de corpuri acționat de forțe să fie în echilibru este necesar ca fiecare dintre corpurile ce-l alcătuiesc să se afle în echilibru față de un reper ales. În acest fel, fiecare corp este în echilibru și față de celelalte corpuri din sistem. Rezultă de aici necesitatea izolării fiecărui corp în parte (fig. 5.2).

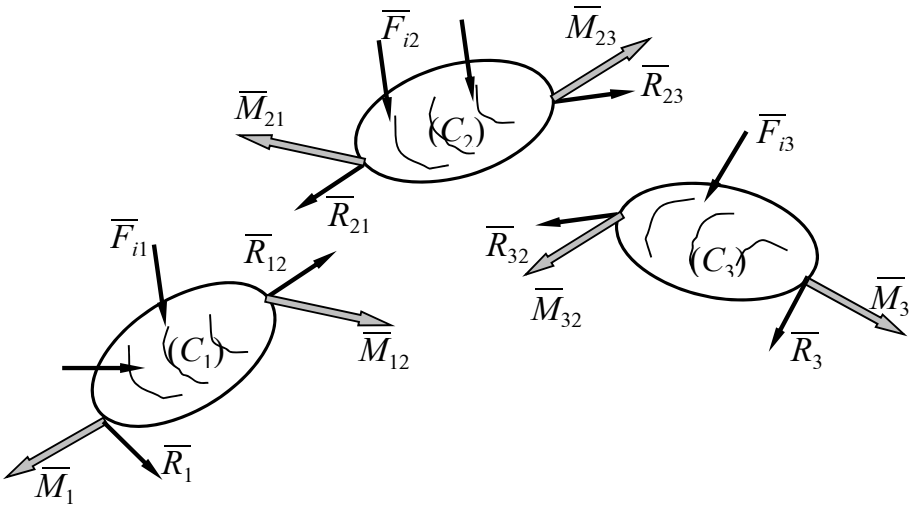


Fig. 5.2.

Acest lucru se realizează prin ruperea tuturor legăturilor, atât cele exterioare cât și cele interioare și înlocuirea lor cu forțe corespunzătoare fiecărui tip de legătură în parte, în baza pricipiului forțelor de legătură. Trebuie avut în vedere că în cazul forțelor de legătură interioare acestea trebuiesc introduse pe corpurile pe care apar, ca perechi de forțe egale și direct opuse:

$$\begin{aligned} \overline{R}_{ij} &= -\overline{R}_{ji}; \\ \overline{M}_{ij} &= -\overline{M}_{ji}; \end{aligned} \tag{5.1}$$

indicii *ij* arată că sistemul de forțe de legătură interioară este format din forțe care sunt aplicate corpului (C_i) și care reprezintă acțiunea mecanică a corpului (C_j), asupra corpului (C_i).

În urma izolării corpurilor, fiecare corp din sistem, acționat atât de forțele efectiv aplicate, cât și cele de legătură, devine liber și, deci, i se pot pune condițiile de echilibru sub forma (4.73). Relațiile statice obținute din condițiile (4.73) se completează, pentru fiecare corp în parte, cu relațiile de natură geometrică, unde este cazul, și cu relațiile de natură fizică.

În felul acesta din condițiile de natură statică, pentru fiecare corp în parte, se obține un sistem de 6 ecuații (sau 3 ecuații în cazul în care sistemul de forțe efectiv aplicate și de legătură ce acționează asupra corpului formează un sistem coplanar de forțe). Acest sistem se completează cu ecuațiile de natură geometrică și fizică – acolo unde este cazul.

Reunind ecuațiile scrise pentru toate corpurile, se obține sistemul global de ecuații care exprimă condițiile de echilibru pentru sistemul de corpuri studiat. În cadrul acestui sistem necunoscutele ce pot apare pot reprezenta, pe de o parte, parametrii prin intermediul cărora sistemul de corpuri se află în echilibru, iar pe de altă parte, forțele din cadrul sistemului, în general mărimi scalare ale forțelor de legătură.

Pentru ca sistemul să aibă soluție trebuie ca numărul total al ecuațiilor să fie egal cu numărul general al necunoscutelor.

5.2.1. Teorema echilibrului părţilor

Deoarece, în cadrul unui sistem de corpuri aflat în echilibru față de un reper ales, fiecare corp în parte se află în echilibru față de reperul considerat și față de celelalte corpuri, rezultă că două sau mai multe corpuri, ce formează un subsistem, se află în echilibru față de celelalte corpuri ce alcătuiesc sistemul. De aici, posibilitatea ca un sistem de corpuri să fie împărțit în două sau mai multe subsisteme pentru care echilibrul se exprimă ca și când ar forma fiecare un sistem rigid. Bineînțeles că, în această situație toate forțele interioare dintre corpurile ce alcătuiesc subsistemul nu vor apare, fiind specificate numai forțele efectiv aplicate asupra subsistemului și forțele de legătură dintre corpurile subsistemului și corpurile de referință, pe de o parte, și celelalte corpuri ale sistemului, pe de altă parte.

Avantajul metodei bazată pe teorema echilibrului părților constă în aceea că se pot determina anumiți parametri sau forțe de legătură prin scrierea unui număr mult mai mic de ecuații decât în cazul metodei izolării corpurilor.

Se face precizarea că ecuațiile de echilibru dobândite prin metoda echilibrului părților nu constitue ecuații suplimentare la sistemul general de ecuații, obținut atunci când echilibrul sistemului de corpuri se studiază izolând fiecare corp în parte.

5.2.2. Teorema solidificării

Teorema solidificării demonstrează că dacă un sistem de corpuri rigide supuse la legături exterioare se află în echilibru sub acțiunea unui sistem de forțe efectiv aplicate, el rămâne în echilibru sub acțiunea acestor forțe și în cazul în care ar deveni un rigid cu legăturile exterioare inițiale. Pe baza acestei teoreme se poate considera sistemul de corpuri ca un singur solid rigid care trebuie să fie în echilibru sub acțiunea forțelor efectiv aplicate și a forțelor de legătură exterioare. În felul acesta ecuațiile de echilibru ce pot fi scrise vor conține numai forțele efectiv aplicate și forțele de legătură exterioare. Prin rezolvarea acestor ecuații se pot determina anumiți parametri de echilibru și/sau anumite forțe de legătură exterioare și se pot verifica calculele efectuate prin celelalte metode.

Se precizează și în acest caz, că ecuațiile de echilibru dobândite prin metoda solidificării nu constitue ecuații suplimentare la sistemul general de ecuații obținut prin metoda izolării corpurilor.

5.3. GRINZI CU ZĀBRELE

Grinzile cu zăbrele constituie sisteme de bare, indeformabile din punct de vedere geometric, numite *zăbrele*.

Zăbrelele sunt legate atât între ele cât și de corpurile de referință prin articulații situate la capetele lor.

Locul unde se leagă două sau mai multe bare se numește *nod*.

Forțele efectiv aplicate ce acționează asupra zăbrelelor sunt aplicate numai la nodurile acestora.

Legăturile exterioare ale unei grinzi cu zăbrele sunt complete, în sensul că acestea nu permit grinzii nici o mișcare provocată de forțele efectiv aplicate, față de un reper dat.

În cazul în care toate zăbrelele ce alcătuiesc grinda și forțele ce le acționează sunt conținute într-un plan, grinda cu zăbrele este numită *gindă plană* (fig. 5.3), în caz contrar este *grindă spațială*.

În funcție de poziția pe care o ocupă, barele unei grinzi cu zăbrele poartă diverse denumiri (fig. 5.3): *tălpi* (barele care formează conturul grinzii cu zăbrele); *diagonale* și *montanți* (barele care au axele perpendiculare pe tălpi la grinzi cu tălpile paralele).

Pentru ca o grindă cu zăbrele să constitue un sistem indeformabil din punct de vedere geometric, între numărul barelor b și numărul nodurilor n, trebuie să existe relația:

$$b \geq 2n - 3, \qquad (5.2)$$

pentru grinzi cu zăbrele plane;

$$b \geq 3n - 6, \qquad (5.3)$$

pentru grinzi cu zăbrele plane.

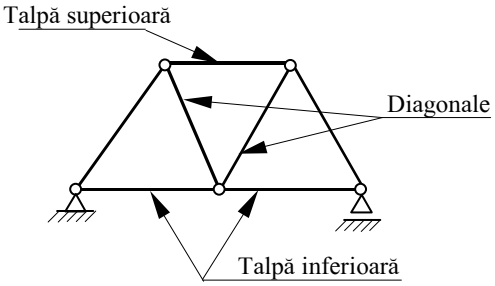


Fig. 5.3.

După cum se va demonstra în continuare aceste condiții însă nu sunt suficiente pentru ca orice grindă cu zăbrele – palană sau spațială - să fie și static determinată.

5.3.1. Calculul grinzilor cu zăbrele

Izolând o bară din cadrul unei grinzi cu zăbrele prin secționarea articulațiilor de la capete, pentru ca ea să rămână în echilibru sub acțiunea forțelor de legătură $\overline{R}_i$ și $\overline{R}_j$ (fig. 5.2, *a*) trebuie ca aceste forțe să aibă direcția axei barei, sensurile contrare și modulele egale (fig. 5.4, *b*).

Rezultă că barele unei grinzi cu zăbrele sunt sau întinse sau comprimate. Așa dar, dacă se secționează o bară și se introduce forța de legătură, care să reprezinte

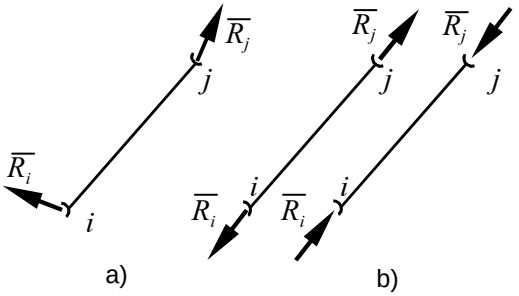


Fig.5.4.

acțiunea părții înlăturate asupra părții rămase, aceasta va avea, de asemenea, direcția axei barei. Acestă forță de legătură poartă numele de efort secțional axial și el poate fi de compresiune sau de întindere.

Problema care se pune este determinarea acestor eforturi secționale. Din acest punct de vedere relațiile (5.2) și (5.3) sunt necesare, dar nu și suficiente pentru a realiza o grindă cu zăbrele static determinată, adică o grindă cu zăbrele la care se pot determina eforturile din bare. Din această cauză pe lângă aceste condiții trebuie pusă și condiția de strictă indeformabilitate, ce va fi prezentată ulterior. Grinzile cu zăbrele ce nu îndeplinesc această condiție sunt denumite *sisteme critice*.

Metodele de determinare a eforturilor secționale în barele unei grinzi cu zăbrele, utilizate în continuare, au la bază teoremele prezentate la echilibrului unui sistem de corpuri acționat de forțe (v. par. 5.2).

Metoda separării nodurilor. Această metodă are la bază metoda separării corpurilor și constă în izolarea fiecărui nod al grinzii cu zăbrele. Izolarea se efectuează prin secționarea tuturor barelor adiacente unui nod și introducerea eforturilor secționale axiale cu sensul lor pozitiv, care, în mod convențional, este cel de întindere (fig. 5.4). Dacă nodul izolat prezintă legături exterioare atunci acestea se înlocuiesc cu forțele de legătură corespunzătoare. De asemenea, dacă în nodul izolat există și forțe efectiv aplicate, ele trebuie luate în considerare.

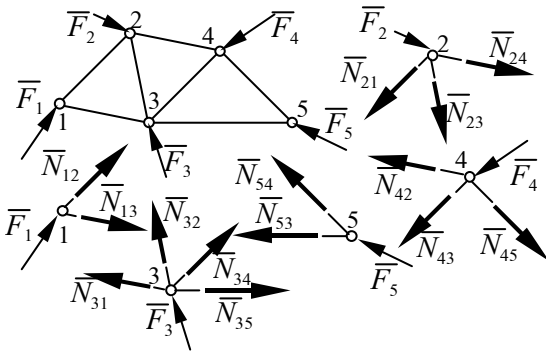


Fig. 5.4.

În felul acesta se izolează fiecare nod și fiecare bară. Așa cum s-a arătat, eforturile din bare sunt axiale deci eforturile aplicate în noduri au direcțiile cunoscute. Pentru determinarea mărimilor acestora rămâne să se exprime numai echilibrul fiecărui nod.

Din cele prezentate rezultă că în fiecare nod izolat va exista un sistem de forțe concurente. Prin exprimarea echilibrului tuturor nodurilor se vor scrie *n* relații de forma:

$$\overline{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \overline{N}_{ij} = 0 \ (i \neq j) \tag{5.4}$$

în care $\overline{F}_i = \overline{F}_i^a + \overline{F}_i^l$ reprezintă suma tuturor forțelor efectiv aplicate și de legătură din nodul i.

Relațiile vectoriale (5.4) duc la scrierea a $2n$ relații scalare în cauzul grinzii cu zăbrele plane și la $3n$ relații în cazul grinzii cu zăbrele spațiale. În ecuațiile astfel obținute apar ca necunoscute eforturile secționale N_{ij} și forțele de legătură exterioare. Cum $N_{ij} = N_{ji}$, numărul eforturilor din bare este egal cu numărul barelor b.

În cazul unei grinzi cu zăbrele plane vor exista $2n$ ecuații cu $b + 3$ necunos-cute, iar în cazul grinzii cu zăbrele spațiale, $3n$ ecuații cu $b + 6$ necunoscute.

Rezultă că eforturile în barele unei grinzi cu zăbrele se pot determina dacă relațiile (5.2) și (5.3) sunt satisfăcute la limită. Aceasta reprezintă *condiția de strictă indeformabilitate*.

Cele $2n$, respectiv $3n$ ecuații se rezolvă ușor apelând la tehnici moderne de calcul. În anumite cazuri însă, sistemul general de ecuații se poate rezolva ușor atunci când, de exemplu, o grindă plană este alcătuită din bare care formează triunghiuri *juxtapuse* în plan. În acest caz exită întotdeauna un nod unde sunt doar două bare în care eforturile sunt necunoscute și care prin scrierea condițiilor de echilibru pot fi determinate. Odată cunoscute aceste eforturi, se poate trece la izolarea unui nod vecin celui studiat în care, de asemenea, să existe numai două bare în care eforturile sunt necunoscute. În felul acesta se pot determina toate eforturile prin scrierea de ecuații simple, în care să apară cel mult două necunoscute.

Acestă metodă comportă cunoașterea forțelor de legătură exterioare, cel puțin în primul nod de la care începe scrierea ecuațiilor.

Dacă nu există nici un nod în care forțele exterioare (efectiv aplicate și de legătură) să fie cunoscute și să existe cel mult două bare concurente (pentru grinda plană), atunci forțele de legătură se vor determina prin teorema solidificării.

Această metodă permite determinarea tuturor eforturilor din bare, însă volumul de lucru este mare, iar corectitudinea rezultatelor poate fi verificată numai după scrierea ultimilor ecuații. Dacă se constată că ecuațiile de verificare nu sunt îndeplinite, nu se cunoaște unde este greșala și calculul

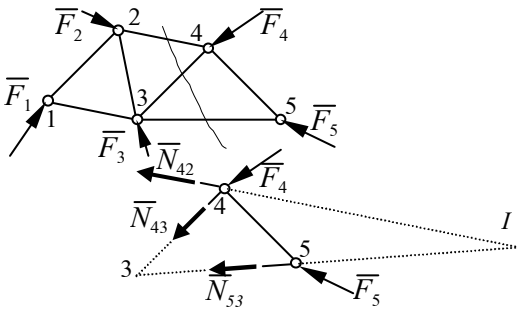


Fig. 5.5.

trebuie reluat de la prima la ultima ecuație.

Existența erorilor de calcul poate fi pusă în evidență prin utilizarea teoremei echilibrului părților sau a solidificării.

Metoda secțiunilor oarecare. Această metodă se bazează pe teorema echilibrului părților și constă în împărțirea grinzii cu zăbrele în două părți distincte printr-o secțiune oarecare. În cazul grinzii cu zăbrele plane, secțiunea trebuie să taie cel mult trei bare neconcurente în care eforturile să fie necunoscute. Pentru barele secționate se introduc eforturile secționale cu sensurile lor pozitive după care se exprimă echilibrul uneia dintre părți. În cazul grinzii cu zăbrele plane vor rezulta trei ecuații de echilibru în care, pentru a obține soluții nu trebuie să apară mai mult de trei necunoscute. Ecuațiile de echilibru se vor alege și se vor scrie în mod convenabil astfel încât în fiecare din ele să apară doar o necunoscută.

Spre exemplu, pentru grinda cu zăbrele din figura 5.5, în urma secționării se alege pentru exprimarea echilibrului partea dreaptă (cea în care sunt nodurile 4 și 5) deoarece este mai simplă și sunt mai puține forțe efectiv aplicate și de legătură.

Pentru scrierea ecuațiilor de echilibru se aleg ecuații de moment. Astfel pentru determinarea efortului $N_{5\text{-}3}$ se va scrie ecuația de moment în nodul 4 deoarece față de acest nod, eforturile $N_{4\text{-}2}$ și $N_{4\text{-}3}$ nu dau moment. Pentru determinarea efortului $N_{4\text{-}2}$ se va scrie o ecuație de moment în raport cu nodul 3, iar pentru determinarea efortului $N_{4\text{-}3}$ se va scrie o ecuație de moment în raport cu punctul I (cu toate că se vor întâmpina dificultăți la exprimarea brațelor forțelor).

Această metodă prezintă avantajul că permite să se determine anumite eforturi secționale repede și exact, fără a scrie un număr mare de ecuații.

La fel ca și în cazul metodei izolării nodurilor, în anumite situații, este necesară cunoașterea prealabilă a forțelor de legătură exterioare (prin aplicarea teoremei solidificării).

În practică, de cele mai multe ori, cele două metode se aplică cuplat într-un mod avantajos.

Aplicații.

A.5.1. Două sfere omogene, identice, de rază r, fiecare având greutatea G, sunt așezate în interiorul unui cilindru drept, de rază R, deschis la ambele capete, și care stă pe o masă orizontală aspră. Să se determine greutatea minimă a cilindrului, necesară pentru ca el să nu se răstoarne, neglijând grosimea pereților lui.

Pentru rezolvarea problemei se aplică metoda izolării corpurilor. Astfel, izolând cilindul, asupra lui acționează, pe lângă forța efectiv aplicată Q, și cele două forțe de legătură interioare N_C și N_D. Forța de legătură exterioară

N pentru situația de echilibru trebuie să aibă punctul de aplicație în interiorul perimetrului de sprijin al cilindrului. Deoarece ne interesează valoarea minimă a greutății Q pentru ca sistemul să rămână în echilibru, vom introduce reacțiunea N în punctul A (se va neglija grosimea peretelui cilindrului), studiind în acest caz echilibrul la limită (fig. 5.7).

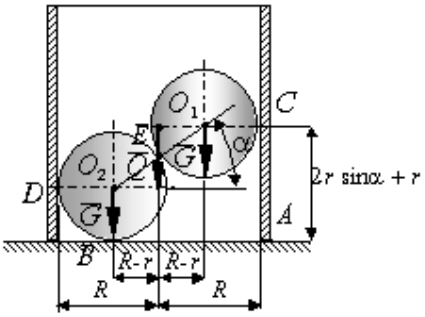


Fig.5.6.

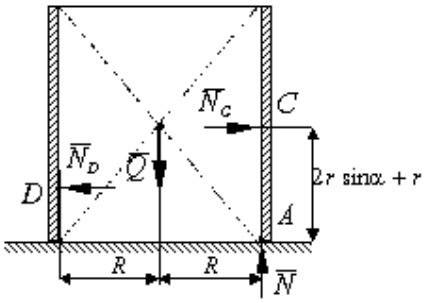


Fig. 5.7.

Ecuațiile de echilibru au forma:

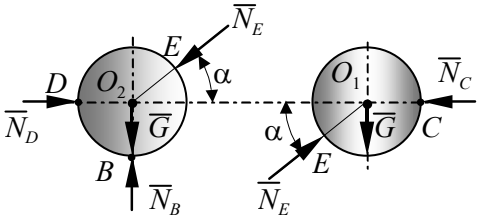
$$N_C - N_D = 0;$$

$$N - Q = 0;$$

$$N_C r\,(2\sin\alpha + 1) - N_D r - QR = 0.$$

În figura 5.8 sunt prezentate cele două sfere cu forțele efectiv aplicate și de legătură ce le acționează.

Se poate constata că sistemele de forțe astfel obținute sunt compuse din forțe concurente și coplanare, deci, condițiile de echilibru se exprimă doar prin două ecuații de proiecție (pe orizontală și verticală). Astfel pentu sfera din figura 5.8, *a* ecuațiile de echilibru au forma:



a) b)

Fig. 5.8.

$$N_D - N_E\cos\alpha = 0;$$

$$N_B - G - N_E\sin\alpha = 0.$$

Pentru sfera din figura 5.8, *b* ecuațiile de echilibru sunt:

$$N_E \cos\alpha - N_C = 0;$$

$$N_E \sin\alpha - G = 0.$$

Prin rezolvarea succesivă a ecuaților prezentate și prin eliminarea forțelor de legătură interioare se obține:

$$N_E = \frac{G}{\sin\alpha}; \qquad N_C = N_D = G\mathrm{ctg}\alpha;$$

$$N_B = 2G; \qquad 2Gr\cos\alpha = QR.$$

Valoarea minimă a greutății Q pentru ca cilindrul să nu se răstoarne este:

$$Q_{min} = 2G\frac{R-r}{R}, \text{ deoarece } \cos\alpha = \frac{R-r}{R} \text{ (vezi fig. 5.6).}$$

A.5.2. Pentru grinda cu zăbrele din figura 5.9 solicitată de forța F aplicată în nodul 3, se cere determinarea eforturile secționale din bare.

Pentru determinarea eforturilor secționale se folosește metoda separării nodurilor. Se poate constata că în cazul grinzii cu zăbrele analizate nu este necesar ca, în prealabil, să se determine forțele de legătură exterioere (V_1, V_4, H_4), deoarece metoda aplicată începe prin separarea nodului 3. În acest nod sunt concurente decât 2 bare, astfel încât, prin scrierea ecuațiilor de echilibru (2 la număr) se pot determina cele două eforturi secționale în funcție de forța efectiv aplicată F. Se trece apoi – în ordine – la nodurile 2,1 și 4 obținându-se următorul sistem de ecuații:

$$N_{3\text{-}4}\sin 30^0 + F = 0; \qquad N_{2\text{-}3} - N_{2\text{-}1}\sin 45^0 = 0;$$

$$N_{1\text{-}4} + N_{1\text{-}2}\cos 45^0 = 0; \qquad N_{3\text{-}2} + N_{3\text{-}4}\cos 30^0 = 0;$$

$$N_{2\text{-}4} + N_{1\text{-}2}\cos 45^0 = 0; \qquad N_{1\text{-}2}\cos 45^0 - V_1 = 0;$$

$$N_{4\text{-}3}\sin 60^0 - N_{4\text{-}1} + H_4 = 0; \qquad N_{4\text{-}3}\cos 60^0 + N_{4\text{-}2} - V_4 = 0.$$

Folosind egalități $N_{2\text{-}3} = N_{3\text{-}2}$; $N_{1\text{-}2} = N_{2\text{-}1}$; $N_{3\text{-}4} = N_{4\text{-}3}$; $N_{4\text{-}1} = N_{1\text{-}4}$ și $N_{4\text{-}2} = N_{2\text{-}4}$ se rezolvă, pe rând, ecuațiile anterioare, obținându-se eforturile din bare, precum și reacțiunile din legături.

Astfel:

$$N_{3\text{-}4} = N_{4\text{-}3} = -2F; \qquad N_{2\text{-}3} = N_{3\text{-}2} = F\sqrt{3}; \qquad N_{1\text{-}2} = N_{2\text{-}1} = F\sqrt{6};$$

$$N_{4\text{-}2} = N_{2\text{-}4} = -F\sqrt{3}; \qquad N_{4\text{-}1} = N_{1\text{-}4} = -F\sqrt{3}; \qquad V_1 = F\sqrt{3};$$

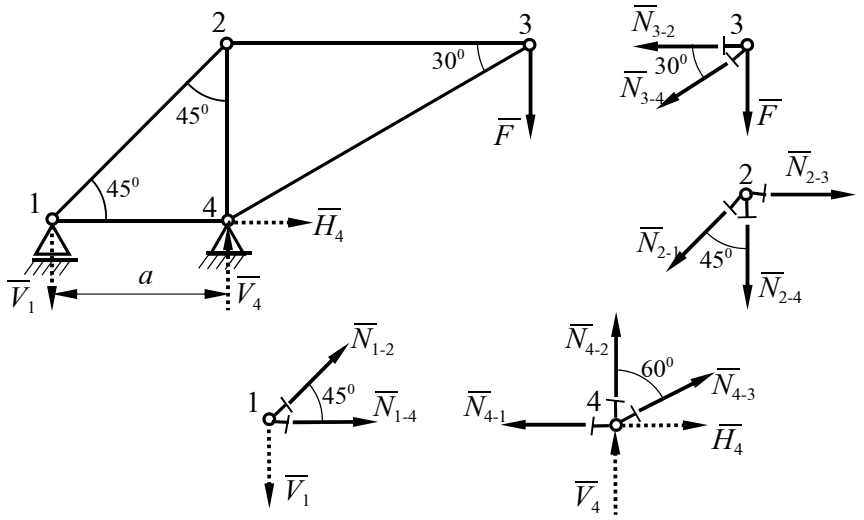


Fig. 5.9.

$H_4 = 0$; $V_4 = F(1+\sqrt{3})$.

Verificarea rezultatelor se poate face folosind teorema solidificării prin scrierea ecuațiilor de proiecție pe orizontală și pe verticală și a ecuației de moment în raport cu nodul 4:

$$H_4 = 0 \; ; \quad F + V_1 - V_4 = 0 \; ; \quad V_1 \cdot a - F \cdot a \cdot \mathrm{ctg}30^0 = 0.$$

A.5.3. Pentru cadrul cu trei articulații din figura 5.10, *a* se cere să se determine forțele de legătură.

Cele două corpuri care alcătuiesc sitemul de cadre sunt legate între ele prin intermediul articulației *B*, iar de corpul de referință prin intermediul articulațiilor *A* și *C*. Toate cele trei articulații sunt articulații plane (cilindrice) în care se neglijează frecările. Din această cauză, în urma ruperii legăturilor, în *A*, *B* și *C* se introduc decât câte două forțe de legătură, care au suporturile perpendiculare.

Forțele H_A, V_A, H_C și V_C sunt forțe de legătură exterioare. Forțele H_B și V_B sunt forțe de legătură interioare, fapt pentru care, pe cele două cadre, aceste forțe s-au introdus de sensuri contrare, mărimile lor fiind egale (fig. 5.10, *a* și *b*).

Sistemele de forțe compuse din forțele efectiv aplicate și de legătură, care acționează asupra celor două cadre, formează sisteme de forțe coplanare. În consecință, pentru fiecare cadru se poat scrie 3 ecuații de

echilibru, în total 6 ecuații. Necunoscutele din aceste ecuații le reprezintă forțele de legătură, în număr de 6. Rezultă că sistemul ecuațiilor de echilibru poate fi rezolvat, el fiind un sistem de 6 ecuații cu 6 necunoscute.

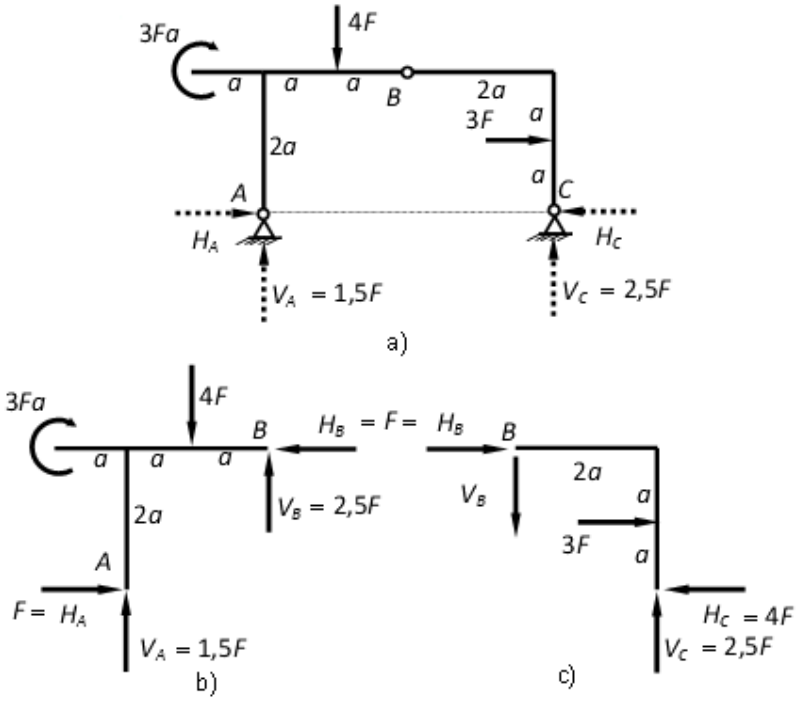


Fig. 5.10.

Rezolvarea acest sistem poate fi ușurată mult dacă se folosește particularitatea sistemului de cadre, care consta în faptul că cele două articulații exterioare se află la același nivel (fig. 5.10, *a*). Prin introducerea forțelor de legătură exterioare așa cum este prezentat în figura 5.10, *a*, se poate aplica metoda solidificării pentru determinarea forțelor V_A și V_C. Acest lucru este posibil scriind ecuații de moment în *A*, respectiv *C*, pe întreg sistemul, ecuații în care vor apare ca necunoscute V_C, respectiv V_A, deoarece forțele H_A și H_C nu dau momente în raport cu cele două articulații exterioare.

$$\left(\sum \mathrm{M}_A(\overline{F}_i) = 0\right): \; 3Fa + 4F{\cdot}a + 3F{\cdot}a - V_C \cdot 4a = 0 \;\Rightarrow V_C = 2{,}5F;$$

$$\left(\sum \mathrm{M}_C(\overline{F}_i) = 0\right): \; 3Fa - 4F{\cdot}3a + 3F{\cdot}a + V_A \cdot 4a = 0 \;\Rightarrow V_A = 1{,}5F.$$

Înainte de a calcula celelalte forțe de legătură se poate verifica corectitudinea calculelor anterioare prin scriere ecuației de proiecție pe verticală:

$$\left(\sum pr(\overline{F}_i)_{vert} = 0\right) : 1{,}5F - 4\mathrm{F} + 2{,}5F = 0.$$

Pentru determinarea forțelor H_A și H_C se scriu două ecuații de moment în raport cu punctul B, dar pe cele două corpuri separate.

$$\left(\left(\sum \mathsf{M}_B(\overline{F}_i)\right)_{A-B} = 0\right) : \; 3Fa + 1{,}5F{\cdot}2a - 4F{\cdot}a - H_A \cdot 2a = 0 \;\Rightarrow H_A = F;$$

$$\left(\left(\sum \mathsf{M}_B(\overline{F}_i)\right)_{B-C} = 0\right) : \; 3F{\cdot}a + 2{,}5F{\cdot}2a - H_C \cdot 2a = 0 \;\Rightarrow H_C = 4F.$$

Și aceste calcule se pot verifica prin scrierea unei ecuații de proiecție pe orizontală pentru toate forțele de pe întreg sistemul (metoda solidificării):

$$\left(\sum pr(\overline{F}_i)_{oriz} = 0\right) : F + 3\mathrm{F} - 4F = 0.$$

Pentru determinarea lui H_B și V_B, pe unul din cele două corpuri se pot scrie ecuații de proiecție pe orizontală, respectiv verticală. Rezultă:

$$\left(\left(\sum pr(\overline{F}_i)_{oriz}\right)_{A-B} = 0\right) : F - H_B = 0 \Rightarrow H_B = F;$$

$$\left(\left(\sum pr(\overline{F}_i)_{vert}\right)_{A-B} = 0\right) : 1{,}5F - 4F + V_B = 0 \Rightarrow V_B = 2{,}5F.$$

Verificarea acestor rezultate se face scriind două ecuații de proiecție, similare cu cele precedente, dar pentru corpul $B - C$

$$\left(\left(\sum pr(\overline{F}_i)_{oriz}\right)_{B-C} = 0\right) : F + 3F - 4F = 0;$$

$$\left(\left(\sum pr(\overline{F}_i)_{vert}\right)_{A-B} = 0\right) : 2{,}5F - 2{,}5F = 0.$$

Teste

T.5.1. Condiția necesară pentru ca o grindă cu zăbrele plană alcătuită din n noduri și b bare să formeze un sistem indeformabil din punct de vedere geometric este:

a) $b \le 2n - 3$; *b*) $b \ge 2n - 3$;

c) $b \le 3n - 6$; *d*) $b \ge 3n - 6$.

T.5.2. Care din următoarele afirmații este adevărată:

a) În cadrul unui sistem de corpuri forțele de legătură exterioare formează un sistem nul;

b) În cadrul unui sistem de corpuri forțele de legătură interioare au torsorul nul într-un punct;

c) În cadrul unui sistem de corpuri forțele de legătură exterioare au torsorul nul într-un punct;

d) În cadrul unui sistem de corpuri forțele de legătură interioare

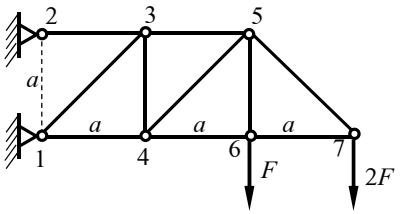


Fig. 5.11.

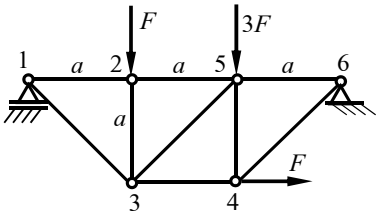


Fig. 5.12.

formează un sistem nul;

T.5.3. Pentru grinda cu zăbrele din figura 5.11 efortul secțional din bara 5 – 3 este:

a) $N_{5\text{-}3} = 4\text{F}$; *b*) $N_{5\text{-}3} = 5\text{F}$;

c) $N_{5\text{-}3} = 3\text{F}$; *d*) $N_{5\text{-}3} = \text{F}$.

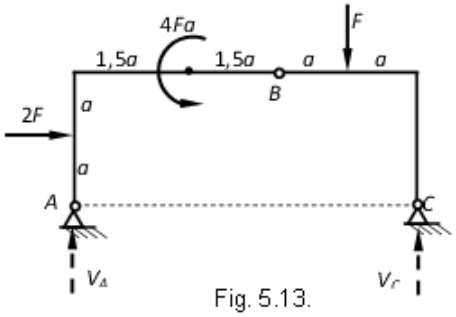


Fig. 5.13.

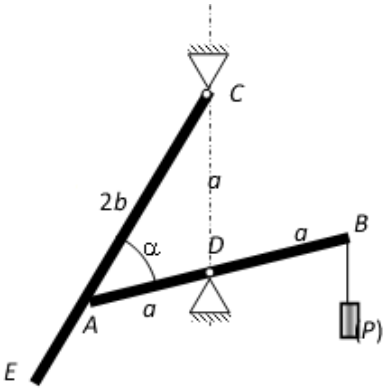


Fig. 5.15.

T.5.4. Pentru grinda cu zăbrele din figura 5.12 efortul secțional din bara 3 – 4 este:

a) $N_{3\text{-}4} = 2\text{F}$; *b*) $N_{3\text{-}4} = 5\text{F}$;

c) $N_{3\text{-}4} = 3\text{F}$; *d*) $N_{3\text{-}4} = \text{F}$

T.5.5. Pentru sistemul de cadre din figura 5.13 forțele de legătură exterioare verticale din *A* și *C* au valorile:

a) $V_A = 0{,}3F$; $V_C = 0{,}7F$; *b)* $V_A = 0{,}8F$; $V_C = 0{,}2F$;

c) $V_A = 0{,}6F$; $V_C = 0{,}4F$; *d*) $V_A = 0{,}1F$; $V_C = 0{,}9F$.

T.5.6. Două bare omogene *AB* (fig.5.15) de lungime 2*a* și *CE*, de lungime 2*b* și greutate *Q* se pot roti într-un plan vertical: prima în jurul mijlocului său *D*, a doua în jurul articulației *C*, situată pe aceeași verticală cu *D* la distanța *CD* = *a*. De capătul *B* al barei *AB* este legată o greutate *P*. Bara *AB* sprijinindu-se cu capul *A* pe bara *CE*, o înclină din poziția ei verticală. În poziția de echilibru unghiul *CAD* = α are valoarea:

a) $\alpha_1 = \arcsin\dfrac{Qb}{4Pa}$; $\alpha_2 = 0$;

b) $\alpha_1 = \arcsin\dfrac{Pb}{4Qa}$; $\alpha_2 = 0$;

c) $\alpha_1 = \arccos\dfrac{Qb}{4Pa}$; $\alpha_2 = 0$;

d) $\alpha_1 = \arcsin\dfrac{Pb}{4Qa}$; $\alpha_2 = 0$.

Rezistenţa materialelor

1. NOŢIUNI FUNDAMENTALE

În cadrul mecanicii teoretice corpurile au fost considerate ca fiind perfect rigide. În realitate, sub acţiunea forţelor exterioare şi a mişcării, corpurile se deformează şi chiar se pot distruge producând pagube.

Partea mecanicii care studiază mecanica mediilor deformabile este Mecanica aplicată. Aceasta are drept obiect de studiu solidul perfect elastic, solidul perfect plastic, mecanica fluidelor ideale şi a celor reale.

Cu aspectele teoretice ale mecanicii aplicate se ocupă: Teoria elasticităţii, Teoria plasticităţii şi Mecanica fluidelor, iar cu problemele practice: Mecanica construcţiilor (adică Statica, Dinamica şi Stabilitatea Construcţiilor), Rezistenţa materialelor şi Hidraulica.

Rezistenţa materialelor, care are drept obiect de studiu efectele interne ale forţelor aplicate asupra corpurilor deformabile, furnizează cunoştinţele necesare proiectării şi exploatării în deplină siguranţă şi cu eficienţă economică, a construcţiilor de orice fel, de la cele mai simple la aparate şi maşini extrem de complexe.

1.1. CLASIFICAREA CORPURILOR

Elementele constitutive ale construcţiilor, maşinilor şi utilajelor, prin care se asigură funcţionarea, rezistenţa şi durabilitatea acestora, pe toată durata de exploatare, sunt modelate de Rezistenţa materialelor drept corpuri solide sau simple corpuri.

În funcţie de dimensiunile lor geometrice, în formă schematizată, corpurile se împart în trei mari grupe: bare, plăci şi corpuri masive (blocuri).

1.1.1. Bare

Barele sunt corpuri care au o dimensiune (şi anume lungimea) cu mult mai mare decât celelalte două (lăţimea şi grosimea). Ele sunt caracterizate prin axa longitudinală şi secţiunea plană şi dreaptă (secţiunea transversală) (fig.1.1, *a*).

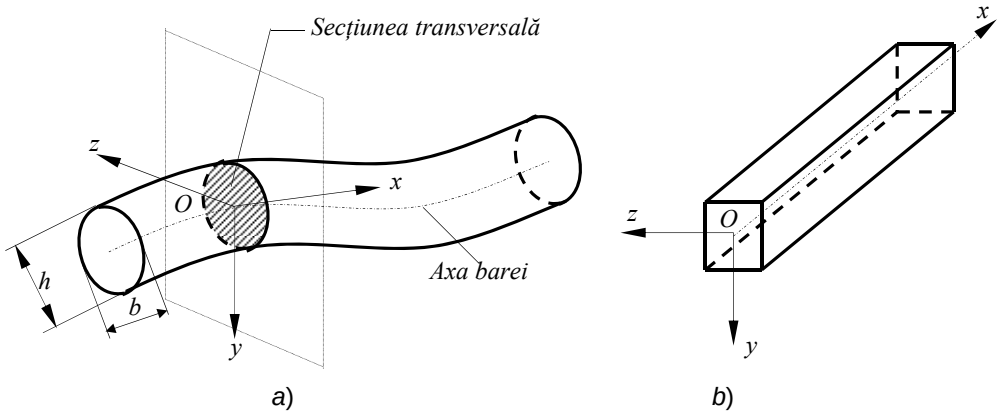


Fig. 1.1.

Secțiunea transversală rezultă din intersecția barei cu un plan perpendicular pe tangenta la axa barei. Axa longitudinală (axa barei) reprezintă locul geometric al centrele de greutate ale secțiunilor transversale ale barei. După forma axei, barele se clasifică în: bare drepte (axa barei este o linie dreaptă, fig. 1.1, *b*), bare cotite (axa este o linie frântă plană sau spațială) şi bare curbe (axa este o linie curbă plană sau strâmbă, fig. 1.1, *a*).

Dimensiunile caracteristice ale unei bare sunt: l – lungimea axei barei; b, h – dimensiunile secțiunii transversale.

Pentru calculele de rezistență, barele se schematizează prin axa lor, fapt ce face ca ele să fie numite şi corpuri cu fibră medie.

1.1.2. Plăci

Corpurile care au una din dimensiuni, şi anume grosimea, mult mai mică decât celelalte două (lungime şi lățimea), se numesc plăci. Ele sunt caracterizate prin suprafața mediană şi prin grosimea h (fig. 1.2, *a*).

Grosimea h, într-un punct al plăcii, se măsoară după direcția normalei la suprafața mediană, în punctul respectiv. Suprafața mediană este constituită de locul geometric al punctelor ce marchează jumătăților segmentelor de lungime h.

Plăcile pot fi subțiri dacă $h << l$ şi $h << l'$, caz în care ele se schematizează prin suprafața lor mediană, de grosime medie sau plăci groase.

În funcție de forma suprafeței mediane, plăcile pot fi plane (fig. 1.2, *b*), cu simplă curbură (fig. 1.2, *c*) sau cu dublă curbură (fig. 1.2, *d*).

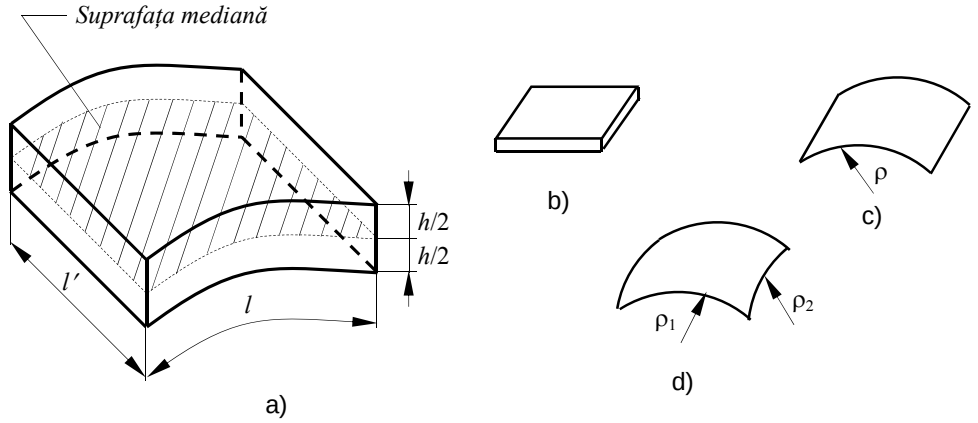


Fig. 1.2.

După forma conturului suprafeței mediane plăcile plane pot fi: dreptunghiulare, circulare, triunghiulare etc.

Dacă raportul h/ρ (ρ – raza de curbură) se poate neglija față de unitate, atunci, placa este o placă subțire şi poartă denumirea de membrană. Calculele de rezistență aferente plăcilor sunt mult mai dificile decât în cazul barelor.

1.1.3. Corpuri masive (blocuri)

Corpurile cu toate cele trei dimensiuni (lungime, lățime, grosime) comparabile sunt denumite corpuri masive sau blocuri. Aceste corpuri nu pot fi schematizate, iar calculele de rezistență, în acest caz, sunt deosebit de complexe.

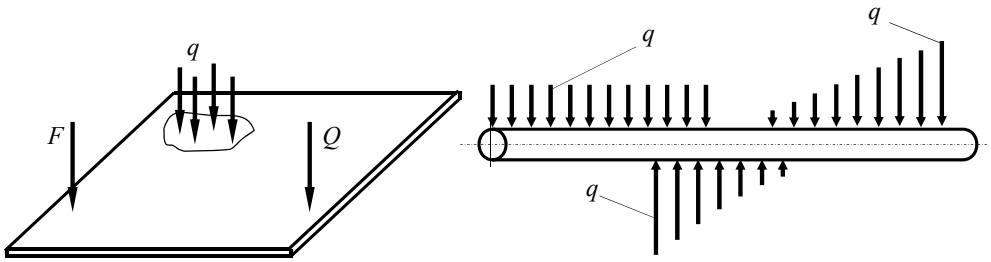
1.2. CLASIFICAREA ÎNCĂRCĂRILOR

Solicitările exterioare care produc deformarea corpurilor sunt numite încărcări. Din punct de vedere al calculului de rezistență, încărcările se clasifică în funcție de: suprafața pe care sunt distribuite, poziția punctelor de aplicație, variația în timp a intensității.

În funcție de suprafața pe care se distribuie, forțele se împart în:

– forțe concentrate, care se aplică, teoretic, într-un singur punct (fig. 1.3, *a*);

– forțe distribuite pe o suprafață sau pe o linie (fig. 1.3).



a) b)

Fig. 1.3.

Legea de variație a forțelor distribuite după o line poate fi: constantă, liniară parabolică etc. (fig. 1.3, *b*)

Forțele concentrate (*F* şi *Q* din fig. 1.3, *a*) se măsoară în N, cele distribuite pe o linie (fig. 1.3, *b*) în N/m, iar cele distribuite pe o suprafață (*q* din fig. 1.3, *a*) în N/m^2.

În funcție de poziția punctelor de aplicație, forțele se clasifică în:

– forțe care se aplică pe suprafața corpului, provenind din interacțiunea cu alte corpuri;

– forțe de volum sau masice (care provin din greutatea proprie a corpului) şi forțele de inerție.

În funcție de poziția în timp a punctelor de aplicație, forțele se clasifică în:

– forțe fixe, ale căror puncte de aplicație rămân mereu aceleaşi pe toată durata aplicării lor;

– forțe mobile, ale căror puncte de aplicație se schimbă în timp.

După variația în timp a intensității forțelor, se disting:

– încărcări statice, la aplicarea cărora nu este necesară luarea în considerare a forțelor de inerție deoarece intensitatea forțelor creşte suficient de încet, viteza de încărcare fiind considerată, teoretic, egală cu zero;

– încărcări dinamice, la aplicarea cărora apar vibrații şi şocuri.

În funcție de efectele interne pe care le produc, încărcările se împart în:

– încărcări constante, la care efectele interne sunt aceleaşi pe toată durata solicitării;

– încărcări variabile, la care efectele interne produse de acestea, variază în timp.

1.3. EFORTURI SECŢIONALE

Dacă se secţionează, cu un plan, un solid rigid acţionat de un sistem de forţe aflat în echilibru (fig. 1.4, *a*), pe feţele celor două corpuri astfel obţinute trebuie introduse forţele de legătură (egale şi direct opuse) ce se manifestă între punctele ce aparţin acestora. Sistemele forţelor de legătură ce apar pe cele două secţiuni ale corpului, reduse în centrele de greutate ale acestora, conduc la obţinerea unui vector rezultant $\overline{R}$ şi a unui vector moment rezultant $\overline{M}_O$ care au cunoscute doar punctul de aplicaţie (fig. 1.4, *b*).

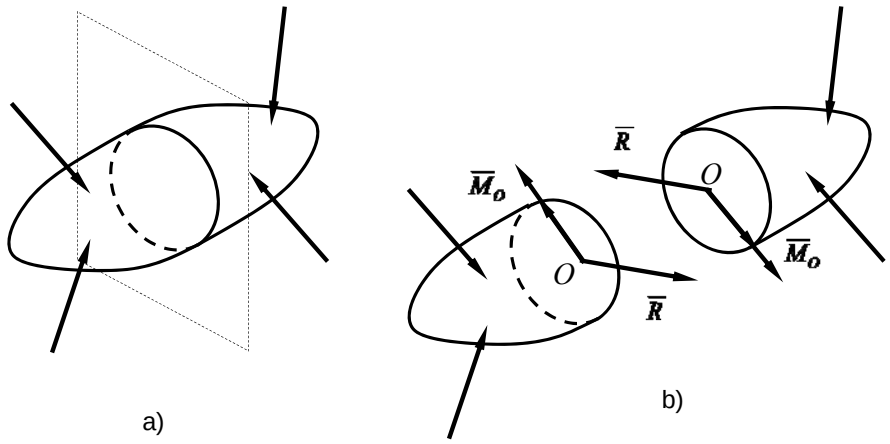


Fig. 1.4.

În cazul unei bare aflate în echilibru sub acţiunea forţelor exterioare (fig. 1.5, *a*) prin secţionarea acestei cu un plan normal pe axa ei, se obţin două părţi, bara *I* aflată în stânga secţiunii şi bara *II* aflată în dreapta secţiunii (fig. 1.5, *a*). Izolând bara *II*, pe secţiunea transversală a acesteia trebuie introduse forţele de legătură ce se manifestă între cele două bucăţi de bară şi care reprezintă efectul mecanic al părţii înlăturate asupra părţii rămase. Acest lucru se realizează cu ajutorul torsorului acestor forţe de legătură, calculat în centrul de greutate al secţiunii transversale considerate, $T_O(\overline{R}, \overline{M}_O)$. Descompunerea vectorului rezultant $\overline{R}$ şi a vectorului moment rezultant $\overline{M}_O$

pe axele sistemului de referință adoptat (axa *Ox* are acelaşi sens cu sensul de parcurgere şi este tangentă la axa barei în punctul *O*, axele *Oy* şi *Oz* sunt cuprinse în planul secțiunii transversale) conduce la obținerea eforturilor secționale.

Din descompunerea vectorului rezultant $\overline{R}$ rezultă următoarele componente:

N – numit *efort axial* sau *forță axială*; este pozitiv când este în sens invers axei *Ox*, atunci când este aplicat pe fața din dreapta secțiunii (cea în care axa *Ox* intră, fig. 1.5, *c*) şi în sensul axei *Ox* când este aplicată pe fața din stânga secțiunii (cea din care axa *Ox* iese, fig. 1.5, *b*), sau, mai general, când trage de secțiunea pe care se aplică.

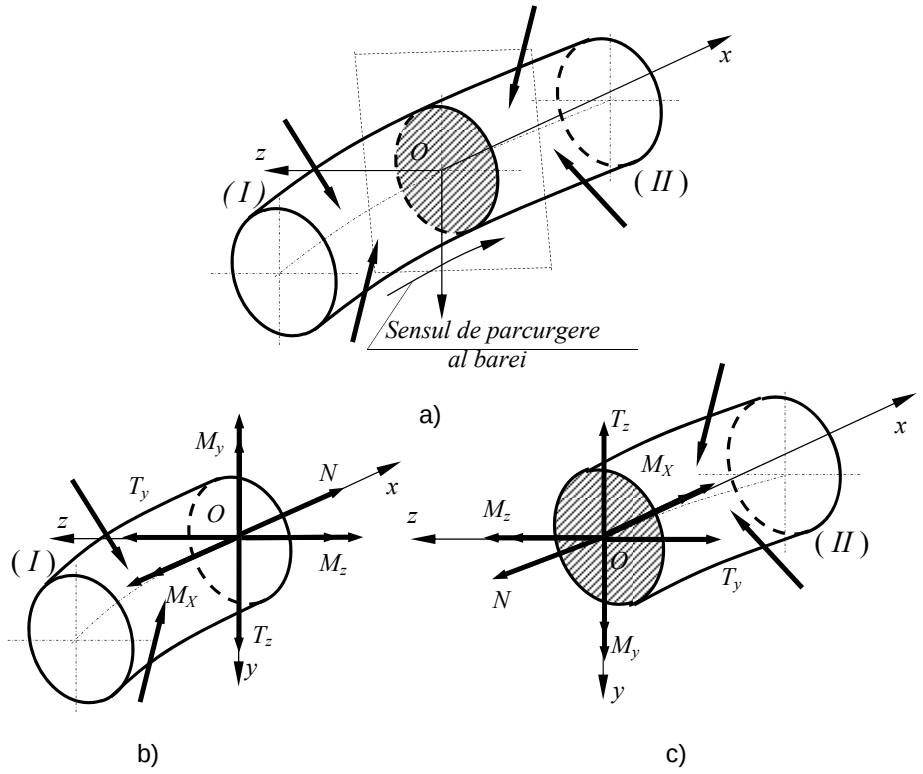


Fig. 1.5.

T_y , T_z – *eforturi tăietoare* sau *forțe tăietoare*; sunt pozitive când sunt în sens invers axelor *Oz*, respectiv *Oy*, atunci când sunt aplicate pe fața din dreapta secțiunii (v.fig.1.5, *c*) şi în sensul axelor *Oz*, respectiv *Oy*, când sunt aplicate pe fața din stânga secțiunii (fig. 1.5, *b*), sau, mai general, atunci când rotesc pozitiv

corpul pe care sunt aplicate.

M_x – *moment de răsucire* sau *moment de torsiune*; este pozitiv când vectorul său este dirijat în sensul pozitiv al axei *Ox*, atunci când este aplicat pe fața din dreapta secțiunii (v. fig. 1.5, *c*) .

M_y, M_z – *momente de încovoiere*; sunt pozitive când vectorii lor sunt dirijați în sensul pozitiv al axelor *Oy*, respectiv *Oz*, atunci când sunt aplicați pe fața din dreapta secțiunii (v. fig. 1.5, *c*).

1.4. CLASIFICAREA SOLICITĂRILOR

În funcție de particularitățile sistemului de forțe aplicat barei, într-o secțiune transversală oarecare a acesteia, pot exista unul, două sau chiar toate eforturile secționale. Denumirea solicitării barei se stabileşte în funcție de eforturile secționale nenule.

Astfel, dacă în secțiunea barei apare numai forța axială *N* solicitarea este de *întindere* sau *compresiune* după cum *N* este pozitiv sau negativ. Solicitarea de compresiune este definită în acest caz numai pentru barele foarte groase, la care pericolul pierderii stabilității echilibrului în starea deformată a barei (flambajul) este mic sau inexistent.

Dacă în secțiunea transversală a barei apare, ca urmare a solicitărilor, numai forța tăietoare T_z sau T_y, solicitarea este de *forfecare pură*.

Atunci când în secțiunea transversală a barei apare numai momentul încovoietor M_y sau M_z, solicitarea este de *încovoiere pură*. Dacă, pe lângă momentul încovoietor M_z apare şi forța tăietoare T_z, sau pe lângă M_y apare şi T_y, solicitarea este de *încovoiere simplă*.

Când în planul secțiunii transversale, ca urmare a solicitărilor la care bara este supusă, se dezvoltă momentul de răsucire M_x, solicitarea este numită *torsiune* sau *răsucire*.

Aceste solicitări sunt denumite generic *solicitări simple*.

Solicitările în care în secțiunea transversală a barei apar două sau mai multe eforturi secționale dintre *N*, M_x, M_y, M_z se numesc *solicitări compuse*. Dintre acestea menționam următoarele:

– *încovoiere oblică* sau *dublă*; în secțiunea transversală a barei apar eforturile secționale M_z şi M_y;

– *încovoiere simplă cu forță axială*; în secțiunea transversală a barei apar eforturile secționale *N* şi M_z sau *N* şi M_y;

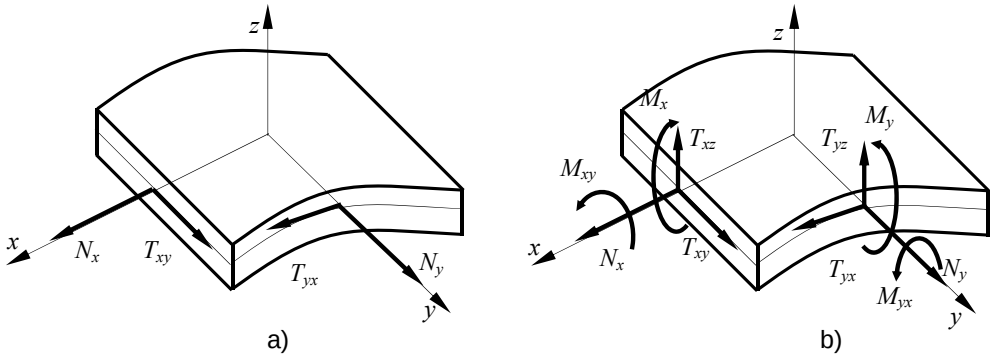


Fig. 1.6

– *încovoiere dublă cu forță axială*; în secțiunea transversală a barei apar eforturile secționale N, M_z şi M_y;

– *încovoiere cu torsiune*; în secțiunea transversală a barei apar eforturile secționale (M_x, M_z) sau (M_x, M_y) sau (M_x, M_y, M_z).

Solicitările plăcilor subțiri în baza cărora se efectuează calculul de rezistență al acestora se împart în:

– solicitări în teoria de membrană, atunci când pe secțiunile plăcii apar numai eforturi secționale de natura forțelor, cuprinse în planul suprafeței mediane (fig. 1.6, *a*);

– solicitări în teoria de momente atunci când pe lângă eforturile de natura forțelor apar şi eforturi – cupluri (fig. 1.6, *b*).

1.5. TENSIUNI. TENSORUL TENSIUNILOR

Dacă dintr-un corp raportat la un sistem de referință $xOyz$ se eliberează o particulă elementară de volum $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ situată într-un punct oarecare P de coordonate (x,y,z), pe fețele acesteia trebuie introduse acțiunile particulelor învecinate, rezultate din aplicarea forțelor exterioare asupra corpului şi din mişcarea acestuia. Aceste acțiuni, ce se manifestă pe întreaga suprafață a fiecărei fețe a particulei, vor fi reprezentate prin forțe distribuite pe aceste fețe, care apar ca forțe efectiv aplicate pentru particula respectivă.

Fețele particulei fiind foarte mici se poate admite că aceste forțe se repartizează uniform pe fiecare față a acesteia. Astfel, pentru fiecare față a particulei, aceste forțe uniform distribuite se pot reduce la o forță elementară $\Delta\overline{F}_{\nu}$ aplicată în centrul de greutate al feței respective orientată prin normala $\overline{\nu}$.

Identificarea forţei elementare $\Delta\overline{F}_\nu$ se face prin indicele $\overline{\nu}$ care reprezintă normala la planul pe care se dezvoltă această forţă.

Forţele elementare $\Delta\overline{F}_\nu$ sunt denumite *eforturi elementare*.

Rezultă că, datorită mişcării şi forţelor exterioare aplicate asupra corpului, în fiecare punct $P(x,y,z)$ al acestuia se dezvoltă o stare de eforturi, cuprinzând toate eforturile elementare $\Delta\overline{F}_\nu$ care apar pe diferitele suprafeţe elementare ΔA, ce aparţin

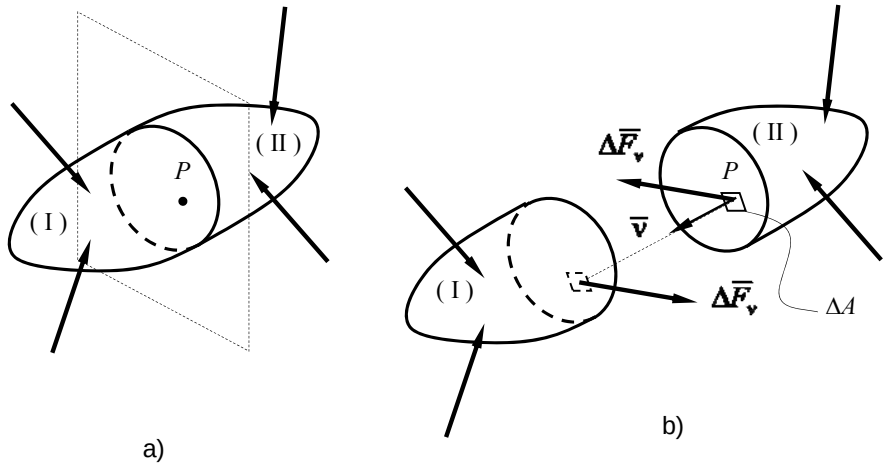


Fig. 1.7.

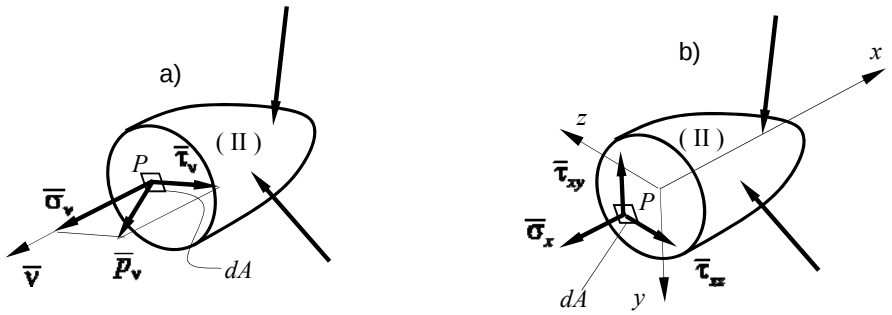
diferitelor plane, orientate prin normalele $\overline{\nu}$, care conţin punctul P.

Fie un corp raportat la un sistem de referinţă $xOyz$ şi solicitat de un sistem de forte în echilibru (fig. 1.7, *a*). Dacă prin punctul oarecare P de coordonate (x,y,z), ce aparţine acestui corp, se duce un plan de secţionare, se obţin două corpuri *I* şi *II* (fig. 1.7, *b*). Pe suprafeţele, din planul de secţionare, ale corpului *I*, respectiv *II* se consideră un element de arie ΔA. Forţa de legătură dintre corpurile *I* şi *II*, corespunzătoare elementului de arie ΔA este reprezentată de efortul elementar $\Delta\overline{F}_\nu$ (fig. 1.8, *b*).

Deoarece efortul elementar $\Delta\overline{F}_\nu$ depinde de mărimea ΔA, a suprafeţei pe care se aplică, se poate elimina această dependenţă definind o mărime vectorială (fig. 1.8, *a*):

$$\overline{p}_\nu = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta\overline{F}_\nu}{\Delta A} \tag{1.1}$$

denumită *tensiune totală*. Această mărime este o *mărime tensorială* deoarece depinde atât de efortul elementar $\Delta\overline{F}_\nu$ (care este o mărime vectorială) cât şi de orientarea elementului ΔA dată de versorul $\overline{\nu}$.



a) b)

Fig. 1.8.

Vectorul tensiune totală $\overline{p}_\nu$ se descompune după direcția versorului normalei $\overline{\nu}$ şi după o direcție cuprinsă în planul elementului de arie ΔA (fig. 1.8, *a*). In acest mod se obțin două componente: componenta $\overline{\sigma}_\nu$, denumită *tensiune normală*, dirijată după versorul normalei $\overline{\nu}$ şi componenta $\overline{\tau}_\nu$, denumită *tensiune tangențială*, orientată după o direcție oarecare cuprinsă în planul elementului de arie ΔA.

Deoarece $\overline{\sigma}_\nu$ şi $\overline{\tau}_\nu$ sunt perpendiculare între ele se poate scrie:

$$p_\nu^2 = \sigma_\nu^2 + \tau_\nu^2 . \tag{1.2}$$

Dacă se alege un sistem de referință cu axele *Oy* şi *Oz* cuprinse în planul elementului de arie ΔA şi axa *Ox* după direcția versorului $\overline{\nu}$, astfel încât să formeze un triedru drept, atunci tensiunile ce apar în planul *yOz* sunt (fig. 1.8, *b*):

– σ_x – tensiunea din planul cu versorul normalei dirijat după axa *Ox*. Ea poartă numele de *tensiune normală* şi este pozitivă când este orientată în sensul negativ al axei *Ox*;

– τ_{xy} şi τ_{xz} – *tensiunile tangențiale* din planul cu versorul normalei dirijat după axa *Ox*, paralele cu axele *Oy*, respectiv *Oz*. Ele provin din descompunerea tensiunii tangențiale τ_ν şi sunt pozitive când sunt orientate în sensul negativ al axelor în raport cu care sunt paralele.

Dacă se va proceda analog şi pentru planele ce au versorii dirijați după axa *Oy*, respectiv axa *Oz*, se obțin cele nouă componente ale *tensorului tensiunilor* în punctul *P*, a cărui formă matriceală este:

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

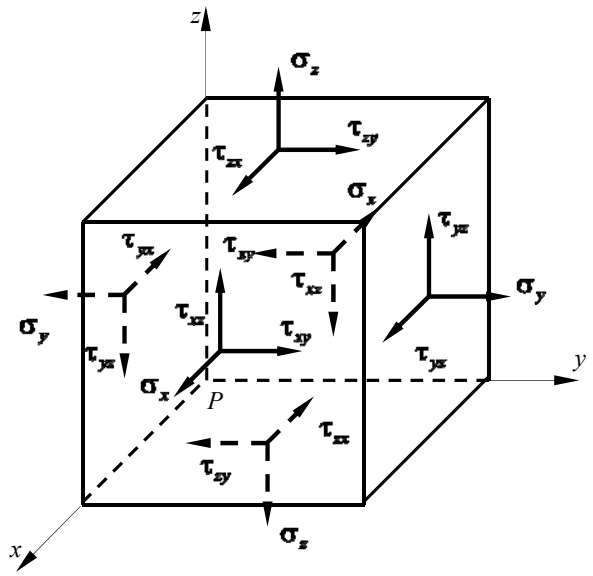


Fig. 1.9.

Componentele tensorului tensiunilor dintr-un punct *P* oarecare al unui corp, pot fi vizualizate pe feţele unui element de volum elementar de forma unui cub cu muchiile orientate după axele de coordonate aşa cum este ilustrat în figura 1.9.

1.5.1. Teorema dualităţii tensiunilor tangenţiale

Se izolează dintr-un corp o particulă elementară de formă tetraedrică (*PBCD*) din punctul $P(x,y,z)$ şi se reprezintă tensiunile ce se dezvoltă pe feţele acesteia (fig. 1.10).

Se consideră că tensiunile au punctele de aplicaţie în centrele de greutate ale suprafeţelor pe care se manifestă, adică în centrele de greutate ale triunghiurilor. Forţele la care particula este supusă sunt forţele generate de tensiuni (a căror mărime se obţine înmulţind valoarea tensiunii cu aria suprafeţei pe care se manifestă) şi forţele masice. Greutatea particulei se poate neglija deoarece ea este o cantitate mică de ordin superior ($g\rho \mathrm{d}V = g\rho \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{6}$) faţă de forţele date de tensiuni ($\sigma_x \mathrm{d}y\mathrm{d}z, \sigma_y \mathrm{d}x\mathrm{d}z$, etc.).

Sub acţiunea acestor forţe particula elementară este în echilibru.

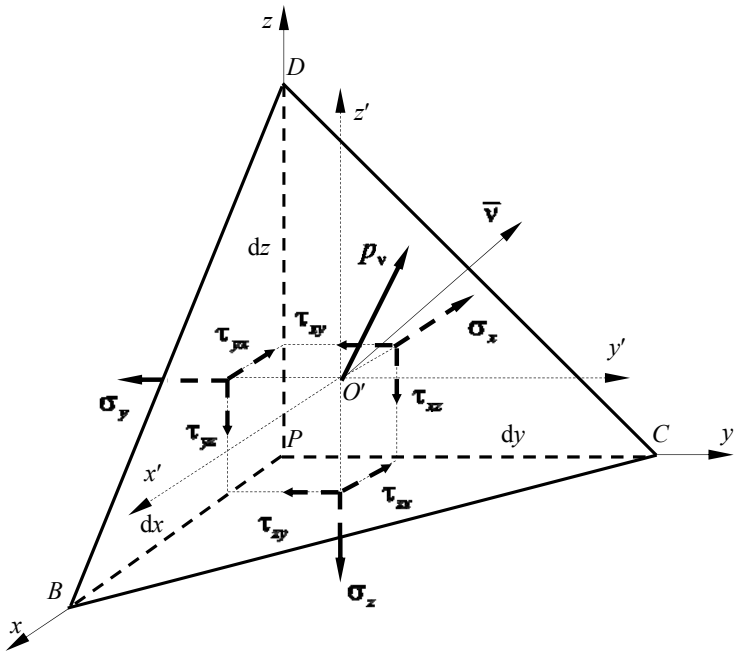


Fig. 1.10.

Dacă se scrie o ecuație de moment în raport cu o axă $O'z'$, paralelă cu axa Pz, ce trece prin punctul de aplicație al tensiunii totale p_ν, singurele forțe ce dau moment sunt $\tau_{xy} \cdot \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{2}$ şi $\tau_{yx} \cdot \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}z}{2}$, ale căror brațe sunt $\frac{\mathrm{d}x}{3}$, respectiv $\frac{\mathrm{d}y}{3}$. Ecuația de moment va fi în acest caz:

$$\tau_{xy} \cdot \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{3} - \tau_{yx} \cdot \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}z}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{3} = 0. \tag{1.4}$$

Rezultă:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \tag{1.5}$$

Dacă, prin analogie, se scriu încă două ecuații de moment în raport cu axe $O'x'$ şi $O'y'$ paralele cu axa Px, respectiv Py, ce trec prin punctul de aplicație al tensiunii totale p_ν se obține:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \text{ şi } \tau_{zx} = \tau_{xz} \tag{1.6}$$

Relațiile (1.5) şi (1.6) exprimă analitic *teorema dualității tensiunilor tangențiale* care se enunță astfel: pe două plane perpendiculare unul pe celălalt,

care trec printr-un punct oarecare *P* din interiorul unui corp, tensiunile tangenţiale se dezvoltă în aşa fel încât componentele lor perpendiculare pe linia de intersecţie a celor două plane, sunt egale ca mărime şi simetric dispuse faţă de muchia comună a celor două plane.

In baza acestei teoreme se deduce că tensorul tensiunilor $\mathbf{T}_\sigma$, precizat de relaţia (1.3), este un tensor simetric faţă de diagonala principală şi are numai şase componente independente.

Dacă se notează cu $\overline{p}_x$ vectorul tensiune totală din planul cu versorul normalei dirijat după axa *Px* (faţa *PCD* a tetraedrului din fig. 1.10) şi, analog, $\overline{p}_y$ şi $\overline{p}_z$ tensiunile totale din planele ai căror versori sunt dirijaţi după axa *Py*, respectiv *Pz*, se poate scrie:

$$\begin{aligned} \overline{p}_x &= \sigma_x \overline{i} + \tau_{xy} \overline{j} + \tau_{xz} \overline{k}\,; \\ \overline{p}_y &= \tau_{yx} \overline{i} + \sigma_y \overline{j} + \tau_{yz} \overline{k}\,; \\ \overline{p}_z &= \tau_{zx} \overline{i} + \tau_{zy} \overline{j} + \sigma_z \overline{k}\,. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Deoarece vectorii tensiune totală exprimaţi prin relaţiile (1.7) au componentele orientate în sens invers axelor de coordonate, iar componentele tensiunii totale $\overline{p}_\nu = p_{\nu x}\overline{i} + p_{\nu y}\overline{j} + p_{\nu z}\overline{k}$ din planul cu versorul normalei $\overline{\nu}$, se consideră pozitive în sensul axelor de coordonate la care s-a raportat particula elementară *PBCD*, ecuaţia de echilibru, sub formă vectorială, în cazul neglijării forţelor masice, capătă forma:

$$\overline{p}_\nu \mathrm{d}A - \left(\overline{p}_x \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{2} + \overline{p}_y \frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{2} + \overline{p}_z \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{2} \right) = 0 \tag{1.8}$$

şi ea permite, prin proiectarea ei pe axele sistemului de referinţă, determinarea componentelor $p_{\nu x}$, $p_{\nu y}$, $p_{\nu z}$ în funcţie de componentele tensorului tensiunilor $\mathbf{T}_\sigma$ în punctul $P(x,y,z)$. Cunoscând aceste componente se poate calcula tensiunea totală $\overline{p}_\nu$ şi deoarece planul pe care se dezvoltă aceasta tensiune este un plan oarecare, se deduce că, în funcţie de componentele tensorului tensiunilor $\mathbf{T}_\sigma$, se poate determina tensiunea totală pe orice plan ce trece prin punctul *P*. Rezultă că tensorul tensiunilor $\mathbf{T}_\sigma$ caracterizează complet stare de tensiuni dintr-un punct *P* din interiorul unui corp.

1.5.2. Tensorul tensiunilor în cazul barelor

Pentru bare cu secțiune constantă, în cadrul Rezistenței materialelor s-au introdus anumite ipoteze care au drept scop uşurarea considerabilă a determinării componentelor tensorului tensiunilor.

Astfel, bara se consideră ca fiind alcătuită din fibre care nu se apasă şi nu lunecă între ele în direcție normală pe axa ei.

Drept consecință a acestei ipoteze în toate planele longitudinale tensiunile normale şi tensiunile tangențiale perpendiculare pe axa barei sunt nule.

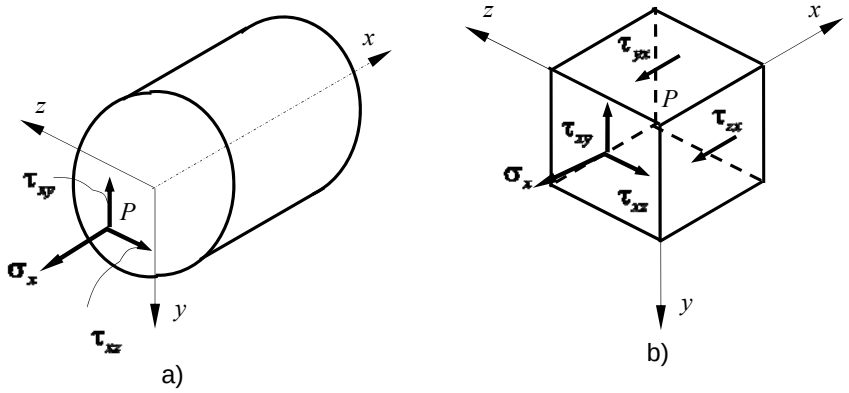


Fig. 1.11.

Dacă se izolează o particulă elementară din punctul *P* din interiorul barei (fig. 1.11, *a*) pe fețele sale paralele cu planele sistemului de referință apar numai tensiunile σ_x, τ_{xy}, τ_{yx}, τ_{xz} şi τ_{zx}, reprezentate in figura 1.11, *b*.

Rezultă că în cazul barelor tensorul tensiunilor $\mathbf{T}_\sigma$ are forma:

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.9}$$

ceea ce arată că starea de tensiuni dintr-un punct oarecare din interiorul unei bare este complet determinată dacă se cunosc tensiunile σ_x, τ_{xy}, τ_{xz} din planul secțiunii transversale ce trece prin punctul respectiv.

1.6. DEFORMAŢII SPECIFICE. TENSORUL DEFORMAŢIILOR SPECIFICE

Sub acţiunea forţelor exterioare efectiv aplicate şi a mişcării fiecare particulă din corp va suferi o deplasare (o translaţie şi/sau o rotaţie) şi o deformare cauzată de mişcare relativă între punctele corpului.

În punctul P de coordonate (x, y, z), dintr-un corp aflat în echilibru, se consideră o particulă elementară sub formă de cub cu laturile dx, dy, dz, orientată după axele sistemului de coordonate rectangular $Oxyz$ (fig. 1.12).

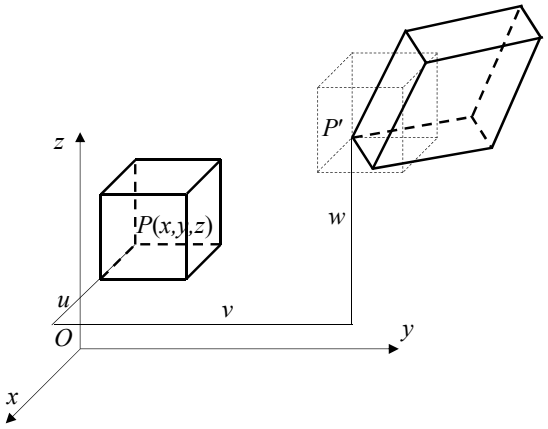


Fig.1.12.

În urma aplicării asupra corpului a unui sistem de forţe, cubul se deplasează din poziţia corespunzătoare punctului P în poziţia corespunzătoare punctului P' şi în acelaşi timp se şi deformează, astfel că muchiile îşi modifică lungimile şi poziţiile relative dintre ele (fig. 1.12).

Dacă se consideră numai o faţă a cubului care se deplasează în planul său (de exemplu faţa cubului paralelă cu planul xOy fig. 1.13) se definesc ca deplasări mărimile u si v. Pentru definirea deformaţiilor muchiilor elementare se introduce noţiunea de *deformaţie specifică liniară* care este egală cu raportul dintre variaţia lungimii unui segment şi lungimea ei iniţială. În conformitate cu această definiţie, deformaţia specifică liniară a particulei elementare pe direcţia axei Ox este (fig. 1.13):

$$\varepsilon_x = \frac{\overline{a_1 d_2} - \overline{ad}}{\overline{ad}} = \frac{\left(\mathrm{d}x + u + \dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x - u\right) - \mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad (1.10)$$

iar deformaţia specifică liniară pe direcţia axei Oy

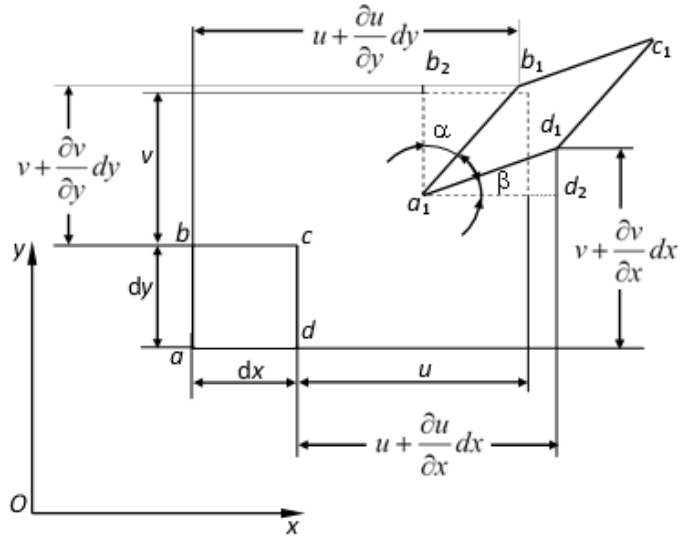


Fig. 1.13.

$$\varepsilon_x = \frac{\overline{a_1b_2} - \overline{ab}}{\overline{ab}} = \frac{\left(\mathrm{d}y + v + \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y - v\right) - \mathrm{d}y}{\mathrm{d}y} = \frac{\partial v}{\partial y}. \tag{1.11}$$

Analog se poate scrie:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{1.12}$$

Concomitent cu modificarea lungimilor muchiilor, se produce şi o modificare a unghiurilor drepte (diedre). Variația acestor unghiuri este definită ca *deformație specifică unghiulară* sau *lunecare specifică*. Aceasta este egală cu variația, în radiani, a unghiului format de doua muchii perpendiculare (sau, în caz general, a două drepte perpendiculare) şi este pozitivă când corespunde micşorării unghiului dintre direcțiile pozitive ale axelor.

În planul *Oxy*, cu notațiile din figura 1.13, deformația specifică unghiulară γ_{xy} provine din rotirea muchiilor *ab*, respectiv *ad*, în raport cu starea lor precedentă, şi este egală cu suma unghiurilor α şi β. Se constată că:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\overline{b_1b_2}}{\overline{a_1b_2}} = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\right) - u}{\mathrm{d}y + v + \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y - v} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y + \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{1+\varepsilon_y}; \tag{1.13}$$

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{\overline{d_1 d_2}}{\overline{a_1 d_2}} = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x\right) - v}{\mathrm{d}x + u + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x - u} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \varepsilon_x}. \tag{1.14}$$

Deoarece ε_x şi ε_y sunt neglijabile în comparație cu unitatea, iar α şi β sunt foarte mici, se poate scrie:

$$\alpha = \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \beta = \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1.15}$$

Lunecarea specifică în planul *xOy* (micşorarea unghiului $\angle bad$) în conformitate cu cele prezentate anterior este:

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{1.16}$$

Pentru celelalte plane de coordonate, procedând analog, deformațiile specifice

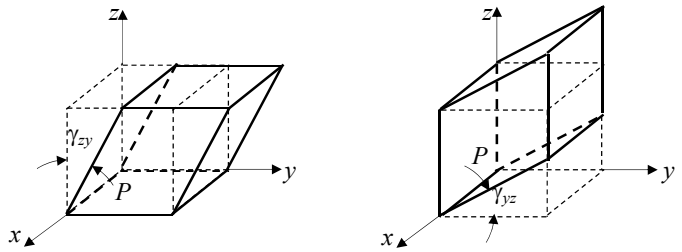


Fig. 1.14.

unghiulare au expresiile:

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \tag{1.17}$$

Se poate observa că modificarea aceluiaşi unghi drept se poate obține prin lunecarea a două fețe ale cubului elementar (fig. 1.14): fața ce are versorul normalei dirijat după *Oz* se deplasează în sensul axei *Oy* şi produce lunecarea specifică γ_{zy}, iar fața ce are versorul normalei dirijat după *Oy* se deplasează în sensul axei *Oz* şi produce lunecarea specifică γ_{yz}. Cum cele două deplasări produc modificarea aceluiaşi unghi drept rezultă că:

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy}. \tag{1.18}$$

Prin analogie:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}\ ;\ \gamma_{xz} = \gamma_{zx}. \tag{1.19}$$

Dacă se consideră deformațiile specifice liniare şi cele unghiulare care se produc în cele trei plane de coordonate care trec printr-un punct P din interiorul unui corp şi se pun într-un tablou de forma:

$$\mathbf{T}_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{yx}}{2} & \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{zy}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{pmatrix}, \tag{1.20}$$

se obține tensorul *deformațiilor specifice proprii* din punctul $P(x,y,z)$. Acest tensor este un tensor simetric față de diagonala principală în baza egalităților (1.18) şi (1.19).

Observații:

– Deoarece tensorul tensiunilor $\mathbf{T}_{\sigma}$, precum şi tensorul deformațiilor specifice $\mathbf{T}_{\varepsilon}$ sunt definite într-un punct $P(x,y,z)$ din interiorul corpului, componentele acestora vor varia de la punct la punct, ele fiind funcții de coordonatele punctului în care se determină.

– Între componentele tensorului tensiunilor $\mathbf{T}_{\sigma}$ şi cele ale tensorului deformațiilor specifice proprii $\mathbf{T}_{\varepsilon}$ există relații de cauzalitate ceea ce face ca ele să nu fie independente unele față de altele. Aceste relații de cauzalitate sunt de natură fizică şi caracterizează din punct de vedere mecanic materialul din care este alcătuit corpul, ele stabilindu-se pe cale experimentală.

1.7. IPOTEZE DE LUCRU ŞI PROBLEMELE REZISTENŢEI MATERIALELOR

1.7.1. Ipoteze

Ipotezele utilizate de Rezistența materialelor se împart în două categorii. Prima categorie cuprinde ipotezele folosite în Mecanica teoretică şi preluate de Rezistența materialelor, iar a doua categorie cuprinde ipotezele specifice Rezistenței materialelor.

In prima categorie este inclusă *ipoteza independenţei* dintre spaţiu, timp şi masă. De asemenea, se identifică materia cu substanţa, se acceptă *ipoteza continuităţii* precum şi modelul de continuum pentru diferite corpuri din natură. In rezistenţa materialelor corpurile solide se consideră perfect omogene şi izotrope.

Din punct de vedere mecanic, ipoteza continuităţii are unele implicaţii importante:

a) In baza acestei ipoteze s-a introdus noţiunea de efort elementar $\Delta\overline{F}_{\mathrm{v}}$ (vezi paragraful 1.5) pe baza căreia s-a definit tensiunea totală $\overline{p}_{\mathrm{v}}$;

b) *Ipoteza micilor deformaţii* care stipulează că deformaţiile şi deplasările particulelor ce alcătuiesc corpul sunt mici în raport cu dimensiunile acestuia. Consecinţele acestei ipoteze sunt: dependenţa dintre deplasări şi deformaţii este liniară; ecuaţiile de echilibru se scriu pe forma nedeformată a corpului ceea ce conduce la o dependenţă liniară între eforturi şi forţele exterioare şi, în consecinţă, posibilitatea aplicării suprapunerii efectelor pentru calculul eforturilor;

c) Se consideră că *deformaţiile sunt elastice*, adică reversibile (dispar odată cu înlăturarea cauzelor care le-au produs). Această ipoteză permite aplicarea suprapunerii efectelor pentru calculul deplasărilor, deoarece dependenţa dintre deplasări şi forţele exterioare este liniară.

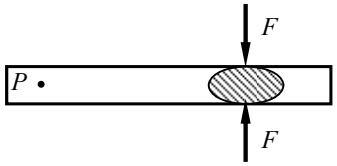


Fig. 1.15.

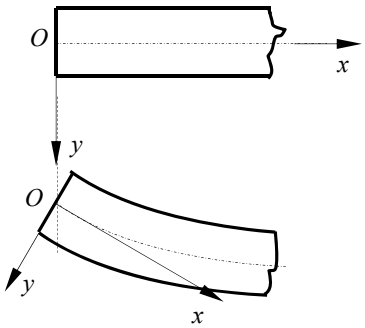


Fig. 1.16.

Aceste trei ipoteze sunt specifice Rezistenţei materialelor şi lor li se adaugă aşa numitul principiu al lui Saint-Venant care se enunţă astfel: un sistem de forţe aflat în echilibru, aplicat pe o zonă restrânsă pe suprafaţa unui corp, influenţează starea de tensiuni şi deformaţii a acestuia numai în apropierea zonei de aplicare a sarcinilor (v. fig. 1.15). Cu alte cuvinte, în punctul *P* din afara zonei haşurate, suficient de departe de aceasta, (fig. 1.15) nu există nicio stare de tensiune.

In cazul barelor, pe lângă ipoteza admisă în paragraful 1.5.2, pe baza căreia tensorul tensiunilor are forma (1.9) este admisă şi ipoteza lui Bernoulli, denumită *ipoteza secţiunilor plane*, care se enunţă astfel: o secţiune plană şi normală pe axa barei înainte de deformaţie rămâne plană şi normală pe axa barei şi după deformaţie (fig. 1.16).

1.7.2. Problemele rezistenţei materialelor

Rezistența materialelor are drept scop evaluarea structurilor sub solicitări astfel încât exploatarea acestora să se facă în deplină siguranță.

S-a văzut că, în baza ipotezei continuității, sub acțiunea forțelor exterioare şi a mişcării, în fiecare punct dintr-un corp se dezvoltă o stare de tensiuni, caracterizată de tensorul tensiunilor $\mathbf{T}_\sigma$ (1.3) şi o stare de deformații, caracterizată de tensorul deformațiilor specifice $\mathbf{T}_\varepsilon$ (1.20) care variază de la un punct la altul.

Pe acest model, rezistența materialelor caută evaluări cantitative privind fenomenele care însoțesc un proces considerat periculos sau inadmisibil în exploatarea structurilor, cum este ruperea sau producerea şi dezvoltarea unor deformații permanente mari.

Astfel se consideră că fenomenele periculoase nu pot apare dacă:

– într-un punct al structurii tensiunea maximă efectivă nu depăşeşte o valoare limită admisibilă:

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_a, \tag{1.21}$$

în care σ_a este tensiunea admisibilă;

– într-un punct al structurii deplasarea totală maximă efectivă nu depăşeşte o valoare maximă admisibilă:

$$\Delta_{\max} = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \leq \Delta_a, \tag{1.22}$$

în care Δ_a este deplasarea admisibilă;

– forța maximă de solicitare nu depăşeşte o valoare critică:

$$F_{\max} \leq \frac{F_{cr}}{c}, \tag{1.23}$$

în care F_{cr} este forța critică şi c coeficientul de siguranță.

Condiția (1.21) constituie condiția de rezistență, (1.22) – condiția de deformație (rigiditate), iar (1.23) – condiția de stabilitate. Toate cele trei condiții exprimă problemele rezistenței materialelor şi ele se concretizează în:

a) *Dimensionarea structurilor*. Pentru o structură la care solicitările şi caracteristicile mecanice ale materialului din care este făcută, sunt cunoscute, se determină forma şi dimensiunile acesteia astfel condițiile (1.21) – (1.23) să fie îndeplinită;

b) *Verificarea structurilor*. O structură, definită ca formă şi dimensiuni, la care solicitările şi caracteristicile mecanice ale materialului din care este realizată sunt

cunoscute, trebuie să verifice condiţiile (1.21) –(1.23);

c) *Determinarea solicitării maxime*. Pentru o structură, definită ca formă şi dimensiuni, la care caracteristicile mecanice ale materialului din care este făcută, sunt cunoscute, valoarea maximă a solicitărilor este cea care îndeplineşte condiţii (1.21) –(1.23).

1.7.3. Coeficienţi de siguranţă. Rezistenţe admisibile

Valorile mărimilor σ_a, Δ_a şi F_{cr} se determină în funcţie de valorile maxime ale tensiunilor, deplasărilor, respectiv ale solicitărilor la care apar fenomenele periculoase.

Dacă într-un punct din interiorul unui corp se produce fenomenul periculos, atunci se consideră că în acel punct tensiunile au atins o valoare limită, adică s-a atins starea limită de tensiuni, care pentru o exploatare sigură a structurii nu trebuie depăşită.

De exemplu, pentru o bară supusă static la întindere, starea limită este atinsă atunci când tensiunea maximă intr-un punct al său este egală cu rezistenţa la tracţiune a materialului din care este făcută bara:

$$\sigma_{\max} = R_m \,. \tag{1.24}$$

Datorită unor serii de factori care intervin şi care pot modifica, independent de voinţa omului, tensiunea maximă efectivă este necesar ca între rezistenţa limită a materialului şi tensiunile maxime efective din timpul exploatării să existe o diferenţă. Această diferenţă poate fi mai mare sau mai mică, în funcţie de precizia evaluării factorilor care intervin. Dintre aceşti factori ce introduc incertitudini asupra tensiunii maxime $\sigma_{\max}$ putem aminti: incertitudini în evaluarea forţelor maxime, abateri de la dimensiunile prevăzute pentru piese şi erori de montaj; incertitudini asupra valorilor efective ale tensiunilor ca urmare a ipotezelor simplificatoare pe baza cărora au fost determinate. Pentru rezistenţa la tracţiune R_m amintim: neomogenitatea materialelor, posibilitatea reducerii în timp a rezistenţei materialului ca urmare a unor degradări prin coroziune, uzură, etc.

Prin definiţie mărimea:

$$c = \frac{R_m}{\sigma_{\max}}, \tag{1.25}$$

se numeşte *coeficient de siguranţă*.

Rezultă că tensiunea maximă efectivă trebuie să aibă cel mult valoarea:

$$\sigma_a = \frac{R_m}{c}, \tag{1.26}$$

denumită şi *rezistenţă admisibilă*.

La materialele ductile, ca limită de rezistenţă se foloseşte limita de curgere aparentă, R_e, caz în care:

$$\sigma_a = \frac{R_e}{c}. \tag{1.27}$$

Metoda de calcul bazată pe condiţia (1.21) este denumită *metoda rezistenţelor admisibile*.

1.8. ASPECTELE PROBLEMELOR REZISTENŢEI MATERIALELOR

Pentru rezolvarea problemelor Rezistenţei materialelor prezentate în subcapitolul 1.7, trebuie evaluate stările de tensiuni şi deformaţii ce se dezvoltă în punctele unei structuri. Pentru aceasta se folosesc cele trei aspecte ale problemelor de rezistenţa materialelor: aspectul static, aspectul geometric şi aspectul fizic.

1.8.1. Aspectul static

S-a văzut că într-o secţiune curentă a unei bare, pe faţa din dreapta secţiunii, se dezvoltă eforturile secţionale ce sunt reprezentate în figura 1.5, *c*. Pe de altă parte, pe un element de suprafaţa dA din aceeaşi secţiune, se dezvoltă tensiunea totală $\overline{p}_\gamma$ (fig. 1.8, *a*) cu componentele σ_x, τ_{xy}, τ_{xz} (fig. 1.8, *b*).

Forţele $\overline{p}_\nu \mathrm{d}A$ alcătuiesc un sistem de forţe care trebuie să fie echivalent, din punct de vedere mecanic, cu sistemul de forţe al cărui torsor $T_O(\overline{R}, \overline{M}_O)$ are drept componente eforturile secţionale precizate în figura 1.5, *c*. Acest lucru conduce la:

$$\begin{cases} \overline{R} = \int\limits_{(A)} \overline{p}_\gamma \mathrm{d}A \\ \overline{M}_O = \int\limits_{(A)} \overline{r} \times \overline{p}_\gamma \mathrm{d}A \end{cases} \tag{1.28}$$

în care $\bar{r}$ este vectorul de poziţie al elementului dA faţă de originea sistemului de referinţă ales.

În baza relaţiilor (1.28) şi în conformitate cu figura 1.17 se pot scrie următoarele egalităţi:

$$N = \int_{(A)} \sigma \cdot \mathrm{d}A; \qquad M_x = \int_{(A)} \left(\tau_{xy} \cdot z - \tau_{xz} \cdot y\right)\mathrm{d}A;$$

$$T_z = \int_{(A)} \tau_{xy} \cdot \mathrm{d}A; \qquad M_y = -\int_{(A)} \sigma \cdot z\mathrm{d}A; \tag{1.29}$$

$$T_y = \int_{(A)} \tau_{xz} \cdot \mathrm{d}A; \qquad M_z = \int_{(A)} \sigma \cdot y\mathrm{d}A.$$

Relaţiile (1.29) constituie relaţiile aspectului static la bare şi ele definesc legătura dintre tensiuni şi eforturile secţionale.

Din analiza celor şase egalităţi (1.29) rezultă determinarea tensiunilor într-un punct din interiorul unei bare în funcţie de eforturile secţionale se poate face numai dacă se cunoaşte modul de variaţie al acestora pe secţiune. În acest scop este necesară studierea aspectele geometric şi fizic.

1.8.2. Aspectul geometric

Aspectul geometric al problemelor de rezistenţa materialelor este dat de relaţiile ce pot fi scrise între deplasările u, v, w şi deformaţiile specifice ε şi γ. Aceste relaţii, în marea majoritate a cazurilor, se determină din condiţii geometrice obţinute în urma observării modului de deformare a structurii sub acţiunea solicitărilor.

1.8.3. Aspectul fizic

În practică se constată că deformaţiile corpurilor nu depind numai de forţele care acţionează asupra lor ci şi de materialul din care acestea sunt alcătuite. Rezultă că relaţiile dintre componentele tensorului tensiunilor $\mathbf{T}_\sigma$ şi tensorul deformaţiilor specifice proprii $\mathbf{T}_\varepsilon$, care constituie aspectul fizic al problemelor rezistenţei materialelor, se determină pe cale experimentală.

Pentru ca în urma unei astfel de experienţe să se poată desprinde anumite concluzii utile este necesar ca această să îndeplinească următoarele condiţii:

– în toate punctele corpului supus încercării (numit epruvetă) trebuie să se dezvolte aceeaşi stare de tensiuni şi de deformaţii pe întreaga durată a determinărilor;

– experienţa efectuată trebuie să fie cât mai simplă pentru ca rezultatele

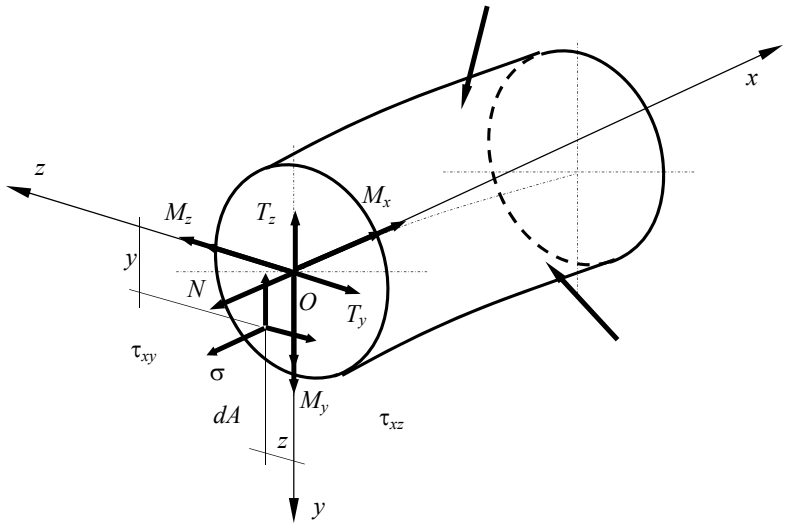


Fig. 1.17.

obținute să poată fi comparabile ori de câte ori s-ar repeta şi oriunde s-ar efectua, în aceleaşi condiții – de mediu şi de încărcare a epruvetei;

– în urma efectuării experienței să rezulte date referitoare la caracteristicile fizico-mecanice ale materialului din care este alcătuită epruveta.

Experiența care îndeplineşte condițiile de mai sus este cea de întindere monoaxială uniformă (fig. 1.18, *a*), în care tensorul tensiunilor are numai componenta $\sigma_x = \sigma$, căreia îi corespunde deformația specifică liniară $\varepsilon_x = \varepsilon$ (fig. 1.18, *b*).

Se poate admite că în zona calibrată dintre reperele *B* şi *C* (fig. 1.18, *a*) efectele prinderii epruvetei în bacurile maşinii de încercare la întindere nu se fac simțite şi, deci, pe orice particulă cu fețele paralele, respectiv normale pe axa epruvetei, se dezvoltă aceeaşi stare monoaxială de tensiuni (fig. 1.18, *b*) $\sigma = F/S_0$, unde *F* este intensitatea forței aplicată la capetele epruvetei, iar S_0 aria secțiunii inițiale a zonei calibrate a acesteia.

Se admite, de asemenea, că alungirea specifică fiecărei particule, în direcția axei barei, este aceeaşi şi egală cu $\varepsilon = \Delta L/L_0$, unde ΔL este alungirea totală a zonei calibrate a epruvetei (de lungime L_0) sub acțiunea forței *F* de la capete.

Plecând de la valoarea $F = 0$ şi urmărind valorile tensiunilor σ şi ale deformației specifice ε, graficul σ – ε pentru această încercare de întindere (fig. 1.18, *c*) poartă numele de *curba caracteristică convențională la tracțiune* (CCCT). La majoritatea materialelor utilizate în realizarea construcțiilor şi

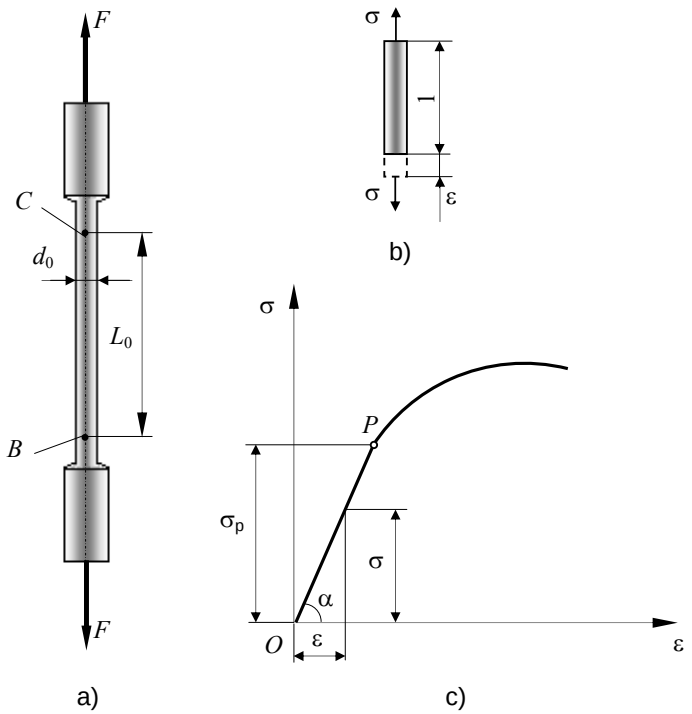


Fig. 1.18

maşinilor, CCCT pe o anumită porțiune (*OP* în fig. 1.18, *c*) este liniară şi se exprimă prin relația:

$$\sigma = (\tan\alpha)\cdot\varepsilon = E\cdot\varepsilon\,. \tag{1.30}$$

Această relație este denumită *legea lui Hooke*, pentru starea liniară de tensiuni şi arată că σ este proporțional cu ε.

Coeficientul de proporționalitate E(= tan α) reprezintă *modulul de elasticitate longitudinal* al materialului din care a fost confecționată epruveta sau modulul lui Joung de ordinul I şi este o caracteristică mecanică a materialului respectiv.

2. DIAGRAME DE EFORTURI PE SRUCTURI PLANE STATIC DETERMINATE ALCĀTUITE DIN BARE

Graficele care reprezintă variaţia eforturilor secţionale, prezentate în subcapitolul 1.3, în fiecare secţiune a unei bare sau al unui sistem de bare, sunt denumite *diagrame de eforturi*.

Dacă este posibilă determinarea acestora din ecuaţii de echilibru static atunci sistemul este static determinat. Un sistem este static determinat atunci când numărul necunoscutelor este egal cu numărul ecuaţiilor de echilibru care pot fi scrise. Dacă solidul rigid este acţionat de un sistem de forţe coplanare atunci pentru ca el să reprezinte un sistem static determinat sunt necesare 3 legături simple pentru a deveni corp cu legături complete. Legătura simplă este legătura care răpeşte corpului un singur grad de libertate corespunzător deplasării pe direcţia legăturii (fig. 2.1, *a*). Tipurile de legături pe care un sistem plan le poate prezenta au fost studiate în cadrul Mecanicii teoretice şi ele sunt:

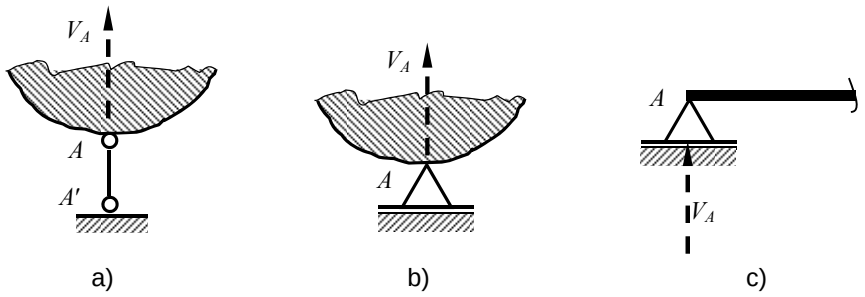


Fig. 2.1.

– *reazemul simplu* care împiedică deplasarea după o singură direcţie (în fig. 2.1, *a* punctul *A* care aparţine solidului rigid nu se poate deplasa pe direcţia *A–A′*); el se reprezintă ca în figura 2.1, *b* sau se schematizează ca în figura 2.1, *c*; din punct de vedere mecanic, reazemul simplu poate fi înlocuit cu o singură forţă de legătură (de exemplu V_A), dirijată după direcţia *AA′*, a cărei mărime este

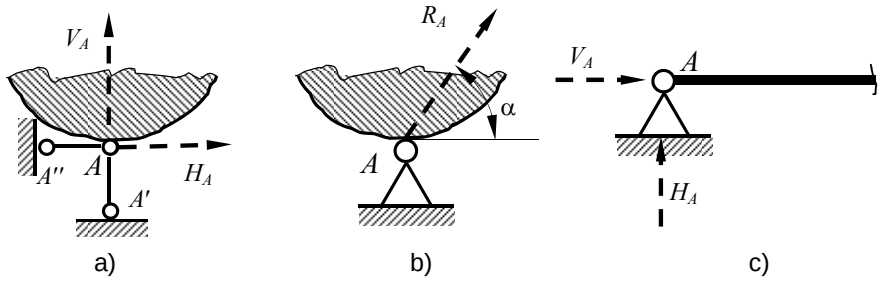


Fig. 2.2.

necunoscută (punctul de aplicaţie şi direcţia fiind cunoscute, sensul iniţial este ales arbitrar, cel real rezultând din condiţiile de echilibru static).

– *articulaţia cilindrică* sau *articulaţia plană* (se mai numeşte şi reazem dublu) împiedică deplasarea după două direcţii (în figura 2.2, *a* punctul *A* al solidului rigid nu se poate deplasa după direcţiile $A–A'$ şi $A–A''$); acest tip de legătură se reprezintă ca în figura 2.2, *a*, sau se schematizează ca în figurile 2.2, *b*, *c*; o astfel de legătură poate fi înlocuită cu o forţă cu punctul de aplicaţie în *A*, care are ca necunoscute mărimea R_A şi direcţia prin unghiul α (fig. 2.2, *b*); aceste două necunoscute pot fi înlocuite de alte două necunoscute, de aceeaşi natură, şi anume de două componente ale lui R_A, perpendiculare între ele: H_A şi V_A (fig. 2.1, *c*).

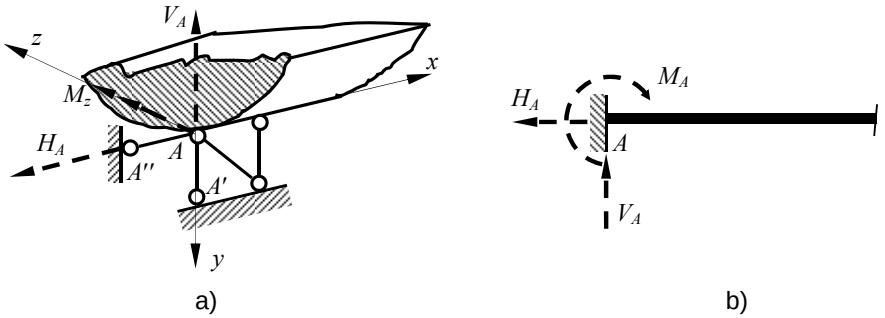


Fig. 2.3.

– *încastrarea plană* care împiedică deplasarea după două direcţii şi rotirile după o direcţie normală la planul format de direcţiile deplasărilor împiedicate (în figura 2.3, *a* punctul *A* nu se poate deplasa după direcţiile $A–A'$ şi $A–A''$, iar solidul rigid nu se poate roti în jurul axei $A–z$); Încastrarea plană poate fi înlocuită

cu două forțe de legătură H_A şi V_A, perpendiculare între ele şi care au mărimile necunoscute şi un moment M_A dirijat după o direcție normală pe planul definit de cele două forțe şi care are, de asemenea, mărimea necunoscută (fig.2.3, *b*).

2.1. DETERMINAREA EFORTURILOR SECŢIONALE ÎNTR-O SECŢIUNE OARECARE A BAREI

Dacă o bară plană este acționată de un sistem de forțe coplanare cuprinse în planul barei, atunci şi legăturile sunt situate în acelaşi plan cu forțele, aşa cum se poate observa în figura 2.4, *a* unde bara a fost schematizată prin axa sa. De obicei se consideră că sistemul este situat în planul *xOy*. În această situație, într-o secțiune curentă *i*, pe fața din dreapta acesteia – fața în care intră axa *Ox*, figura 2.4, *b* – apar următoarele eforturi secționale: N, T_z şi M_z care, pentru simplificare, se vor nota fără indicele *z* (fig. 2.4, *c*).

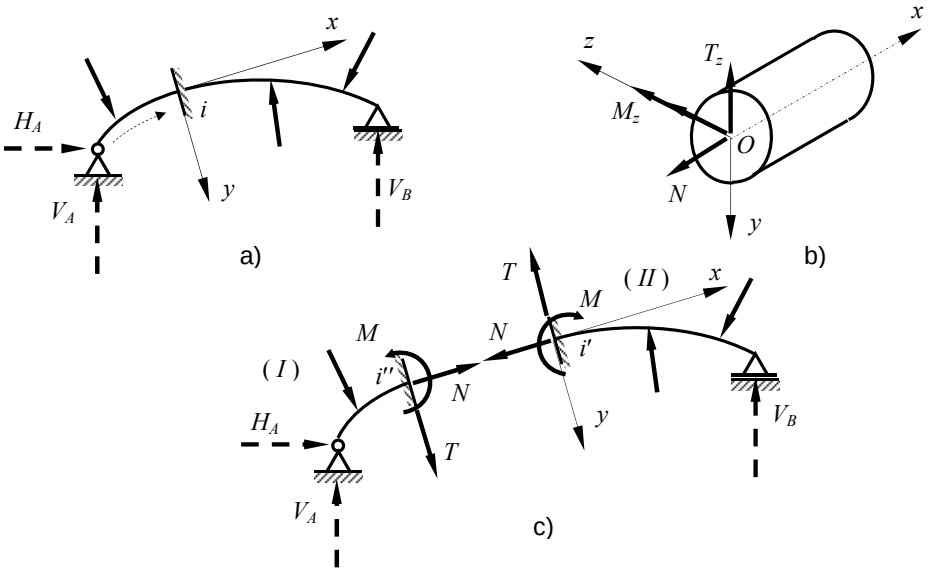


Fig. 2.4.

Prin secționarea barei în punctul *i* se obțin barele *I* şi *II*, iar eforturile secționale din secțiunea efectuată se introduc ca în figura 2.4, *c*. În baza reciprocității acțiunii şi reacțiunii, eforturile de pe fața din dreapta secțiunii (fața *i'* ce aparține barei *II*, fig. 2.4, *c*), marcată de sensul pozitiv al axei *x*, care coincide

cu sensul de parcurgere al axei barei, sunt egale şi de sensuri contrare, faţă de cele de pe faţa din stânga secţiunii (faţa *i''* ce aparţine barei *I*, fig. 2.4, *c*).

Sensurile pozitive ale eforturilor secţionale, atunci când ne referim la faţa din dreapta secţiunii sunt, aşa cum s-a precizat în subcapitolul 1.3: *N* şi *T* – pozitive când sunt în sens invers axelor cu care sunt paralele, iar *M* este pozitiv când are vectorul dirijat în sensul axei *Oz* (fig. 2.4, *b*).

Dacă bara din figura 2.4, *a* este în echilibru sub acţiunea forţelor exterioare efectiv aplicate şi de legătură atunci, după secţionare, barele *I* şi *II* sunt în echilibru sub acţiunea forţelor exterioare efectiv aplicate şi de legătură şi a eforturilor secţionale introduse. Din ecuaţiile de echilibru care se pot scrie pentru fiecare din cele două bare obţinute în urma secţionării, se pot determina valorile eforturilor secţionale. Astfel, pentru bara *I* se poate scrie:

$$\begin{cases} N + \sum (pr\overline{F}_i^{\,I})_x = 0 \\ T + \sum (pr\overline{F}_i^{\,I})_y = 0 \\ -M + \sum \mathsf{M}_O \overline{F}_i^{\,I} = 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} N = -\sum (pr\overline{F}_i^{\,I})_x = \sum (pr\overline{F}_i^{\,I})_{-x} \\ T = -\sum (pr\overline{F}_i^{\,I})_y = \sum (pr\overline{F}_i^{\,I})_{-y} \\ M = \sum \mathsf{M}_O \overline{F}_i^{\,I} \end{cases}; \qquad (2.1)$$

pentru bara *II*:

$$\begin{cases} -N + \sum (pr\overline{F}_i^{\,II})_x = 0 \\ -T + \sum (pr\overline{F}_i^{\,II})_y = 0 \\ M + \sum \mathsf{M}_O \overline{F}_i^{\,II} = 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} N = \sum (pr\overline{F}_i^{\,II})_x = -\sum (pr\overline{F}_i^{\,II})_{-x} \\ T = \sum (pr\overline{F}_i^{\,II})_y = -\sum (pr\overline{F}_i^{\,II})_{-y} \\ M = -\sum \mathsf{M}_O \overline{F}_i^{\,I} \end{cases}. \qquad (2.2)$$

Rezultă:

$$\begin{cases} N = \sum (pr\overline{F}_i^{\,I})_x = -\sum (pr\overline{F}_i^{\,II})_{-x} \\ T = \sum (pr\overline{F}_i^{\,I})_y = -\sum (pr\overline{F}_i^{\,II})_{-y} \\ M = \sum \mathsf{M}_O \overline{F}_i^{\,I} = -\sum \mathsf{M}_O \overline{F}_i^{\,II} \end{cases} \qquad (2.3)$$

Relaţiile (2.3) se citesc astfel:

– forţa axială *N* este egală cu suma proiecţiilor pe axa –*x*, a tuturor forţelor de pe bara *I* sau a celor de pe bara *II*, luată cu semn schimbat;

– forţa tăietoare *T* este egală cu suma proiecţiilor pe axa –*y*, a tuturor forţelor de pe bara *I* sau a celor de pe bara *II*, luată cu semn schimbat;

– momentul încovoietor *M* este egal cu suma momentelor forţelor de pe bara *I*,

calculate faţă de centrul de greutate *O* al secţiunii, sau a celor de pe bara *II*, luată cu semn schimbat.

Relaţiile (2.3) exprimă legătura dintre eforturile secţionale dintr-o secţiune oarecare a unei bare şi forţele exterioare efectiv aplicate şi de legătură ce solicită bara. Ele pun în evidenţă faptul că eforturile secţionale sunt funcţii discontinui de poziţia *x* a secţiunii, punctele de discontinuitate fiind: capetele barei, punctele de aplicaţie ale forţelor sau cuplurilor exterioare concentrate pe axa barei şi punctele unde încep şi se termină forţele distribuite pe axa barei. În intervalele dintre aceste puncte (denumite limite sau capete de interval), funcţiile de variaţie a eforturilor secţionale sunt funcţii continui.

Rezultă că diagramele de eforturi sunt reprezentările grafice, pe fiecare interval în parte, a acestor funcţii.

2.2. RELAŢIILE DIFERENŢIALE ÎNTRE EFORTURILE SECŢIONALE ŞI SARCINI

Se detaşează din bara aflată în echilibru sub acţiunea forţelor exterioare efectiv aplicate şi de legătură, la distanţa *x* de origine, un element de bară de lungime d*x*, prin două secţiuni drepte (fig. 2.5, *a*). Pe acest element de bară va acţiona forţa exterioară uniform distribuită $\overline{q} = q_x\overline{i} + q_y\overline{j}$, iar în secţiunile de la capetele lui se introduc eforturile secţionale: *N*, *T*, *M* în secţiunea situata la distanţa *x* de origine

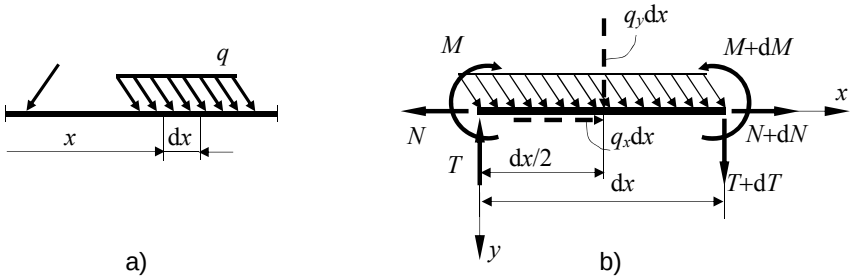


Fig. 2.5.

şi $N + \mathrm{d}N$, $T + \mathrm{d}T$, $M + \mathrm{d}M$ în secţiunea situată la distanţa $x + \mathrm{d}x$, toate introduse cu semn pozitiv (fig. 2.5, *b*).

Ecuaţiile de echilibru scrise pentru elementul de bară de lungime d*x* au forma:

$$(N + \mathrm{d}N) - N + q_x \mathrm{d}x = 0$$

$$(T + \mathrm{d}T) - T + q_y \mathrm{d}x = 0 \tag{2.4}$$

$$M + \mathrm{d}M - M - T \cdot \mathrm{d}x - q_x \mathrm{d}x \cdot \frac{\mathrm{d}x}{2} = 0$$

Dacă în ultima ecuație (2.4) termenul $q_x \mathrm{d}x \cdot \frac{\mathrm{d}x}{2}$ se neglijează, el fiind considerat o cantitate elementară de ordin superior, atunci rezultă:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{dx}} = -q_x\,;$$

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{dy}} = -q_y\,; \tag{2.5}$$

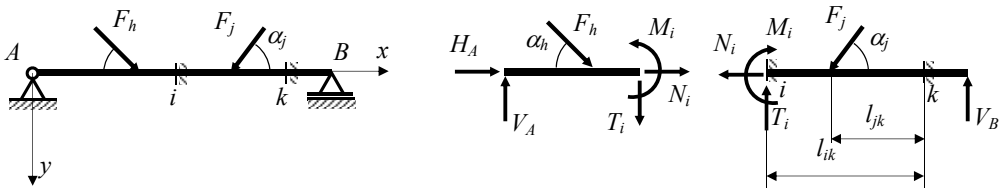
$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = T$$

Deoarece, după cum s-a precizat, diagramele de eforturi sunt reprezentările grafice ale funcțiilor $N = N(x)$, $T = T(x)$, $M = M(x)$ pe diferitele intervale ale barei, relațiile (2.5) reprezintă pantele diagramelor respective în secțiunea x. Cu ajutorul relațiilor diferențiale (2.5) se pot determina: alura graficului respectiv pe un interval oarecare, valorile maxime sau minime ale efortului secțional pe intervalul respectiv, precum şi semnul unghiului dintre tangentele la cele două ramuri ale unei diagrame, din stânga sau din dreapta unui punct de discontinuitate.

2.3. RELAŢII DE RECURENŢĂ PENTRU EFORTURILE SECŢIONALE LA BARE DREPTE

Pe bara din figura 2.6, *a* s-a delimitat intervalul *i–k*. Dacă se secționează bara în *i,* în această secțiune apar eforturile secționale reprezentate în figura 2.6, *b* care, pentru fața din dreapta secțiunii, reprezintă torsorul tuturor forțelor, efectiv aplicate şi de legătură, care acționează asupra barei din stânga secțiunii. Din punct de vedere mecanic, aceste eforturi secționale reprezintă efectul părții înlăturate asupra părții rămase.

Eforturile de pe fața din dreapta secțiunii *k* se pot determina în funcție de eforturile de pe fața din dreapta secțiunii *i* şi de forțele exterioare, efectiv aplicate şi de legătură (fig. 2.6, *b*), cu următoarele relații de recurență:



a) b)

Fig. 2.6.

$$N_k = N_i + \sum_i^k F_j \cos\alpha_j \,;$$

$$T_k = T_i - \sum_i^k F_j \sin\alpha_j \,; \tag{2.6}$$

$$M_k = M_i + T_i l_{ik} - \sum_j^k (F_j \sin\alpha_j) l_{jk} \,.$$

Dacă pe intervalul *i-k* acționează o forță distribuită (fig.2.7) eforturile într-o secțiune curentă *x* se determină astfel:

$$T_x = T_i - qx \,; \tag{2.7}$$

$$M_x = M_i + T_i x - \frac{qx^2}{2} \,. \tag{2.8}$$

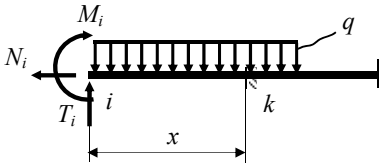


Fig. 2.7.

Dacă forța tăietoare se anulează pe intervalul *i-k*, din condiția $T_x = 0$ se obține:

$$x_0 = \frac{T_i}{q} \,, \tag{2.9}$$

care identifică secțiunea în care momentul încovoietor este maxim. Înlocuind valoarea lui x_0 în expresia lui M_x din (2.8) se obține:

$$M_{\max} = M_i + \frac{T_i^2}{2q} \,, \tag{2.10}$$

relație care permite determinarea momentului încovoietor maxim pe intervalul pe care este distribuită forța distribuită *q*.

2.4. DIAGRAME DE EFORTURI LA CONSOLE

Prin consolă se înțelege acea porțiune a unei bare care are un capăt liber. De exemplu în figura 2.8 , *a* este reprezentată o consolă cu un capăt liber *A* şi un capăt încastrat *D*. În figura 2.9, *a* porțiunea *D–E* a barei poartă de asemenea numele de consolă.

Pentru determinarea diagramelor de eforturi pentru consola din figura 2.8, *a* se alege sistemul de axe de coordonate cu originea în *A*, punctul cel mai din stânga al barei. Axa *x* coincide cu axa barei şi indică sensul de parcurgere al acesteia, de la stânga la dreapta. Alegând sensul axei *y* în jos rezultă că axa *z* este perpendiculară pe planul forțelor care acționează asupra barei şi are sensul astfel încât sistemul axelor de referință să fie un sistem drept.

Deoarece bara are un capăt liber nu este neapărat necesar să se calculeze forțele de legătură V_D şi H_D precum şi momentul M_D din încastrarea *D*, calculul eforturilor secționale *N*, *T* şi *M* putându-se face reducând forțele din urma secțiunii situată la cota *x* (fig. 2.8, *a*).

Capetele de interval fiind deja notate cu *A*, *B*, *C*, *D* se trece la calculul eforturilor secționale ținând seama de convențiile făcute în subcapitolul 1.3 şi de relațiile de recurență prezentate în subcapitolul 2.3. Fiindcă bara se parcurge de la stânga la dreapta, în sensul axei *x*, eforturile secționale de pe fața din dreapta secțiunii se determină prin reducerea tuturor forțelor din urmă, adică a tuturor forțelor care se află pe porțiunea de bară parcursă.

Forța axială *N*, calculată pe fața din dreapta secțiunii în care se determină, are următoarele valori la capete de interval:

$N_{A_1} = 3qa$, deoarece forța $3qa$ are sensul invers axei *x*;

$N_{B_1} = 3qa$, deoarece între secțiunile A_1 şi B_1 nu există nicio forță aplicată barei care să se proiecteze pe axa *x*;

$N_{B_2} = 3qa - 5qa = -2qa$, deoarece forța $5qa$ are sensul axei *x*;

$N_{C_1} = -2qa$, deoarece între secțiunile B_2 şi C_1 nu există nici-o forță aplicată barei care să se proiecteze pe axa *x*;

$N_{C_2} = -2qa + 2qa = 0$, deoarece forța $2qa$ are sensul invers axei *x*;

$N_{D_1} = 0$ deoarece între secțiunile C_2 şi D_1 nu există nici-o forță aplicată barei care să se proiecteze pe axa *x*.

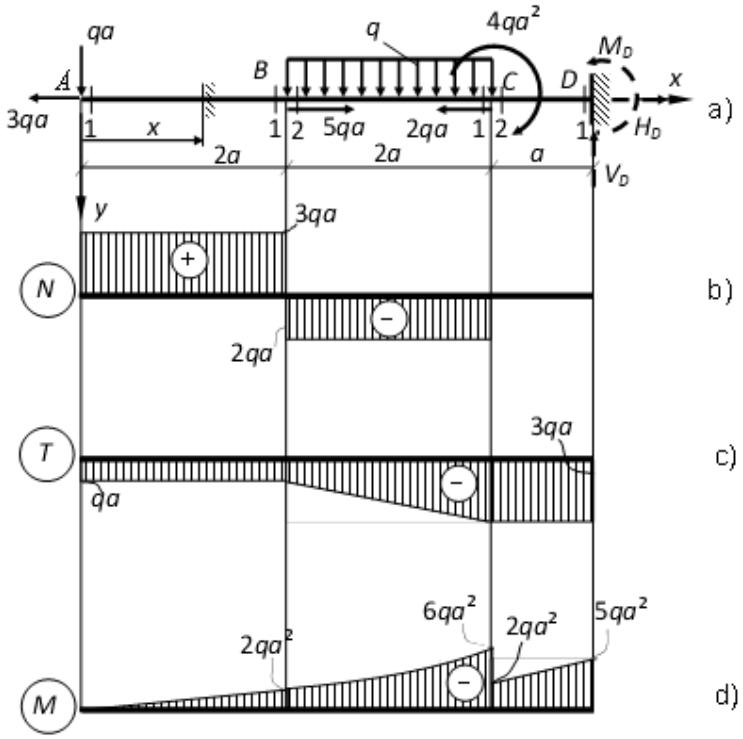


Fig. 2.8.

Forța tăietoare T, calculată pe fața din dreapta secțiunii în care se determină, are următoarele valori la capete de interval:

$T_{A_1} = -qa$, deoarece forța qa are sensul axei y;

$T_{B_1} = -qa$, deoarece între secțiunile A_1 şi B_1 nu există nicio forță aplicată barei care să se proiecteze pe axa y;

$T_{B_2} = -qa$, deoarece secțiunea B_2 este situată foarte aproape de B fapt ce conduce la neglijarea sarcinii echivalente corespunzătoare forței uniform distribuite q pe intervalul B–B_1;

$T_{C_1} = -qa - 2qa = -3qa$, deoarece sarcina echivalentă forței uniform distribuite q pe intervalul B–C, $2qa$ are sensul axei y;

$T_{C_2} = -3qa$, deoarece pe intervalul C_1–C_2 nu există nici-o forță aplicată barei care să se proiecteze pe axa y, iar secțiunea C_1 este situată foarte aproape de C fapt ce conduce la neglijarea sarcinii echivalente corespunzătoare forței uniform distribuite q pe intervalul C_1–C;

$T_{D_1} = -3qa$, deoarece pe intervalul C_2–D_1 nu există nici-o forță aplicată barei care să se proiecteze pe axa y.

Momentul încovoietor M, calculat pe fața din dreapta secțiunii în care se determină, are următoarele valori la capete de interval:

$M_{A_1} = 0$, deoarece secțiunea A_1 este situată foarte aproape de A astfel încât brațul forței qa este suficient de mic pentru a neglija momentul dat de această forță;

$M_{B_1} = -qa \cdot 2a = -2qa^2$, deoarece roteşte negativ (are vectorul în sensul invers axei z, axă care împreună cu axele x şi y formează un triedru drept – axa z în cazul studiat are sensul de la cititor la foaiea de hârtie);

$M_{B_2} = -2qa^2$, deoarece secțiunea B_2 este situată foarte aproape de B fapt ce conduce la neglijarea momentului dat de sarcina echivalentă corespunzătoare forței uniform distribuite q pe intervalul B–B_1;

$M_{C_1} = -qa \cdot 4a - 2qa \cdot a = -6qa^2$, deoarece sarcina echivalentă forței uniform distribuite q este aplicată la jumătatea intervalului B–C, iar momentul dat de ea are vectorul în sensul invers axei z;

$M_{C_2} = -6qa^2 + 4qa^2 = -2qa^2$, deoarece cuplul concentrat $4qa^2$ roteşte pozitiv;

$M_{D_1} = -qa \cdot 5a - 2qa \cdot 2a + 4qa^2 = -5qa^2$.

Pentru trasarea diagramelor de eforturi se vor lua în considerare dependența dintre eforturi şi sarcini precizate de relațiile (2.5).

Astfel pentru forțe axială N pe intervalul A_1–B_1, $q_x = 0$ şi deci, N este constant având valoarea $3qa$ (fig. 2.8, *b*). Analog pentru intervalele B_2–C_1 şi C_2–D_1, pe care forța axială este constantă având valorile – $2qa$, respectiv zero.

Forța tăietoare rămâne constantă pe intervalele A_1–B_1, respectiv C_2–D_1, deoarece pe aceste intervale $q_y = 0$ şi are o variație liniară pe intervalul B_2–C_1, interval pe care $q_y = q =$ const. (fig 2.8, *c*).

Deoarece pe intervalul A_1–B_1 forța tăietoare este constantă $T = qa$, rezultă că $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = qa =$ const. şi deci momentul încovoietor are o variație liniară (fig. 2.8, *d*). Pe intervalul B_2–C_1 $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = q =$ const. ceea ce conduce la $\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = q$, adică momentul încovoietor are o variație parabolică. Tangenta în B la parabola respectivă face cu axa x acelaşi unghi (are aceeaşi pantă) cu dreapta ce reprezintă variația momentului încovoietor pe intervalul A_1–B_1 deoarece $T_{B_1} = T_{B_2}$. Deoarece a doua derivată a momentului încovoietor este pozitivă acesta admite un minim. Pentru că forța tăietoare nu se anulează pe intervalul B_2–C_1, valoarea minimă a

momentului încovoietor M nu se afla între secţiunile B_2 şi C_1. Pe intervalul C_2–D_1 momentul încovoietor are o variaţie liniară deoarece, pe acest interval forţa tăietoare este constantă $T = -3qa$. Dreapta care reprezintă variaţia momentului încovoietor pe intervalul C_2–D_1 are aceeaşi pantă ca tangenta la parabolă în C_1 la valoarea $-6qa^2$.

Observaţii. Diagrama N prezintă un salt în dreptul unei forţe concentrate în axa barei, salt de mărimea şi în sensul acesteia, aşa cum rezultă din figura 2.8, *b* în secţiunea B a barei.

În secţiunea C a barei momentul încovoietor M are un salt în sensul şi de mărimea cuplului concentrat $4qa^2$.

Forţele de legătură din încastrarea D se pot determina pe baza diagramelor de eforturi. Astfel, reducând forţele care acţionează pe bucata de bară aflată înaintea secţiunii D_1, eforturile secţionale calculate pe faţa din dreapta secţiunii, conform cu relaţiile (2.2), sunt:

$$N_{D_1} = -(-H_D) = 0 \Rightarrow H_D = 0;$$

$$T_{D_1} = -(V_D) = -3qa \Rightarrow V_D = -3qa;$$

$$M_{D_1} = -(-M_D) = -5qa^2 \Rightarrow M_D = -5qa^2.$$

2.5. DIAGRAME DE EFORTURI LA GRINZI SIMPLU REZEMATE

Prin grindă simplu rezemată se înţelege o bară dreaptă care prezintă ca legături un reazem simplu şi o articulaţie plană, aşa cum se poate vedea în figura 2.9, *a*.

Originea sistemului de referinţă se alege în punctul A, situat la extremitatea stângă a barei, iar axa x să coincidă cu axa barei. În acest fel sensul de parcurgere al barei este de la stânga la dreapta. Pentru a putea trasa diagramele de eforturi secţionale este necesar ca mai întâi să se determine cel puţin forţele de legătură exterioare fie din articulaţia A, fie din reazemul simplu D. Se poate observa că forţa orizontală H_A se determină scriind o ecuaţie de proiecţie a tuturor forţelor efectiv aplicate şi de legătură pe direcţia axei barei:

$$H_A - 3qa + qa = 0 \Rightarrow H_A = 2qa.$$

Deoarece sistemul de forţe care acţionează asupra barei este un sistem de forţe coplanar se mai pot scrie încă două ecuaţii de echilibru. Se vor scrie ecuaţii de moment în raport cu punctele A şi D fiindcă, în acest fel, cele două necunoscute V_A şi V_D nu apar simultan în aceeaşi ecuaţie. Astfel din ecuaţia de moment în raport cu punctul A:

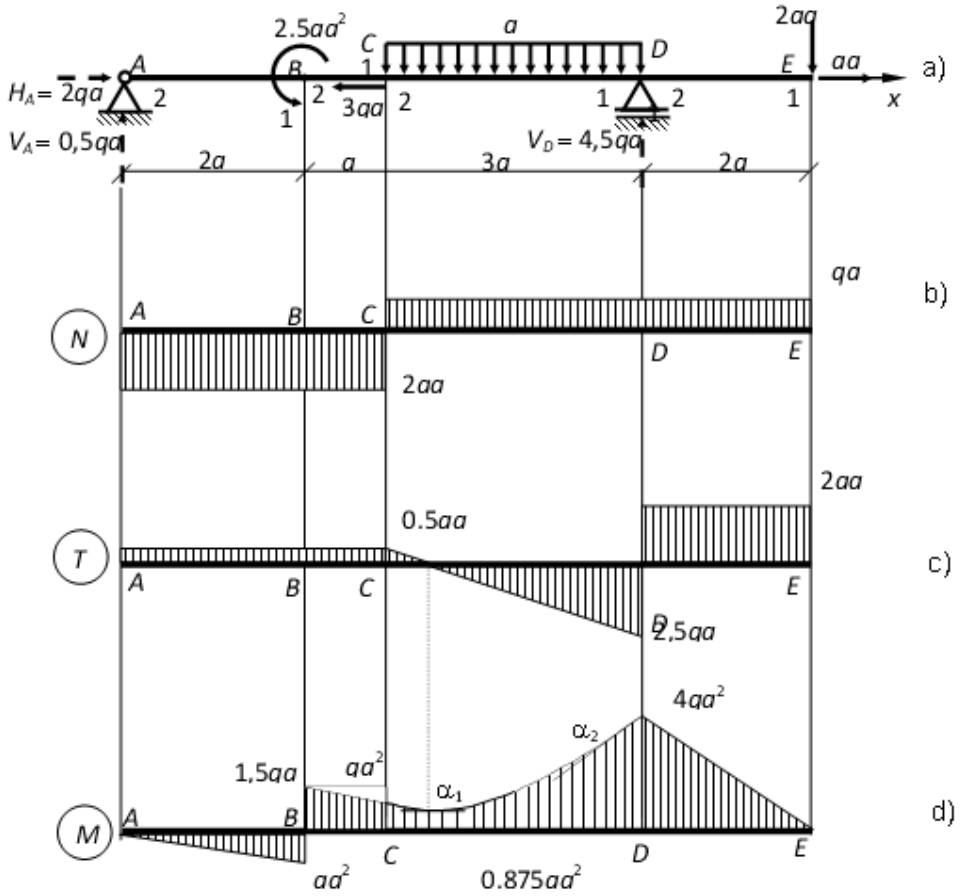


Fig. 2.9.

$$-2{,}5qa^2 + 3qa\cdot 4{,}5a - V_D\cdot 6a + 2qa\cdot 8a = 0,$$

rezultă forța de legătură $V_D = 4{,}5qa$, iar din ecuația de moment în raport cu punctul D:

$$V_A\cdot 6a - 2{,}5qa^2 - 3qa\cdot 1{,}5a + 2qa\cdot 2a = 0,$$

rezultă forța de legătură $V_A = 0{,}5qa$. Verificarea acestor calcule se poate face scriind o ecuație de proiecție pe o direcție perpendiculară pe axa barei:

$$V_A - 3qa + V_D - 2qa = 0,$$

care după înlocuire

$$0{,}5qa - 3qa + 4{,}5qa - 2qa = 0$$

confirmă corectitudinea rezultatelor.

Calculul eforturilor secționale N, T şi M la capete de interval se poate face, de această dată, reducând forțele fie din urma secțiunii în raport cu care se determină eforturile secționale, fie din înaintea acesteia, după cum calculul respectiv este mai mult sau mai puțin complicat.

Astfel forța axială N, considerând convențiile de semn precizate în subcapitolul 1.3, are valorile:

$$N_{A_2} = -H_A = -2qa;$$

$$N_{B_1} = -H_A = -2qa;$$

$$N_{B_2} = -H_A = -2qa;$$

$$N_{C_1} = -H_A = -2qa;$$

$$N_{C_2} = -H_A + 3qa = qa;$$

$$N_{D_1} = qa;$$

$$N_{D_2} = qa;$$

$$N_{E_1} = qa.$$

Forța tăietoare T în corelație cu convenția de semne făcută în subcapitolul 1.3 are valorile:

$$T_{A_2} = V_A = 0{,}5qa;$$

$$T_{B_1} = V_A = 0{,}5qa;$$

$$T_{A_2} = V_A = 0{,}5qa;$$

$$T_{B_2} = V_A = 0{,}5qa;$$

$$T_{C_1} = V_A = 0{,}5qa;$$

$$T_{C_2} = V_A = 0{,}5qa;$$

$$T_{D_1} = V_A - 3qa = -2{,}5qa;$$

$T_{D_2} = 2qa$, (au fost reduse forțele din dreapta secțiunii);

$$T_{E_1} = 2qa.$$

Analog, momentul de încovoiere M are valorile:

$M_{A_2} = 0;$

$M_{B_1} = V_A \cdot 2a = 0{,}5qa \cdot 2a = qa^2;$

$M_{B_2} = M_{B_1} - 2{,}5qa^2 = -1{,}5qa^2;$

$M_{C_1} = V_A \cdot 2a - 2{,}5qa^2 = qa^2;$

$M_{C_2} = V_A \cdot 2a - 2{,}5qa^2 = qa^2;$

$M_{D_1} = -(2qa \cdot 2a) = -4qa^2$, (au fost reduse forțele din dreapta secțiunii);

$M_{D_2} = -(2qa \cdot 2a) = -4qa^2;$

$M_{E_1} = 0.$

Cu ajutorul relațiilor diferențiale dintre eforturile secționale şi încărcări (2.5) se poate trasa variația eforturilor secționale pe fiecare interval al barei.

Astfel, deoarece pe intervalele *A–B* şi *B–C* nu există sarcină distribuită în axa barei, adică $q_x = 0$, forța axială *N* rămâne constantă cu valoarea $-2qa$; de asemenea pe intervalele *C–D* şi *D–E* pe care $N = qa$ (fig. 2.9, *b*).

Forța tăietoare *T* este constantă şi are valoarea $0{,}5qa$ pe intervalul *A–B* respectiv *B–C* deoarece pe aceste intervale $q_y = 0$ (fig. 2.9, *c*). Pe intervalul *C–D*, deoarece $q_y = q = \text{const.} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$, forța tăietoare are o variație liniară de la valoarea $0{,}5qa$ la $-2{,}5qa$. De asemenea, *T* este constantă pe intervalul *D–E* şi are valoarea $2qa$ pentru că pe acest interval $q_y = 0 = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$ (fig. 2.9, *c*).

Momentul încovoietor *M* are o variație liniară pe intervalul *A–B* (fig. 2.9, *d*) deoarece $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = T = 0{,}5qa = \text{const.}$ La fel şi pe intervalul *B–C*, cele două drepte, care redau variația momentului încovoietor *M* având aceeaşi pantă, deoarece forța tăietoare are aceeaşi valoare, $T = 0{,}5qa$ pe cele două intervale. Pe intervalul *C–D* momentul încovoietor *M* are o variație parabolică deoarece $\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -q = \text{const.}$ Parabola respectivă admite o valoare maximă deoarece, pe acest interval, forța tăietoare se anulează. Această valoare se determină cu relația (2.10):

$$M_{\max} = -qa^2 + \frac{(0{,}5qa)^2}{2q} = -4qa^2 + \frac{(2{,}5qa)^2}{2q} = -0{,}875qa^2.$$

Parabola care redă variația momentului încovoietor pe intervalul *C–D* admite

în C o tangentă care are aceeaşi pantă cu dreapta ce redă variaţia momentului încovoietor pe intervalul B–C deoarece $T_{B_1} = T_{B_2}$, adică forţa tăietoare nu are salt în B. În secţiunea în care momentul încovoietor are valoarea maximă $M_{\max}$ şi în care $T = 0$ tangenta la parabolă este paralelă cu axa barei. La dreapta intervalului C–D tangenta la parabolă se obţine rotind antiorar o dreaptă paralelă cu axa barei ce trece prin valoarea $-4qa^2$ cu un unghi a cărui tangentă $\mathrm{tg}\alpha_2 = -2{,}5qa$, iar la stânga intervalului tangenta la parabolă se obţine rotind orar o dreaptă paralelă cu axa barei care trece prin valoarea $-qa^2$ cu un unghi a cărui tangentă $\mathrm{tg}\alpha_1 = 0{,}5qa$. Pe intervalul D–E variaţia momentului încovoietor este liniară deoarece pe acest interval forţa tăietoare $T = 2qa = \text{const}$.

Analizând diagramele se poate constata că în dreptul unei forţe concentrate, perpendiculară pe axa barei, de exemplu forţa de legătură V_D, variaţia forţei tăietoare redată în diagrama T (fig. 2.9, *c*) are un salt în sensul şi de mărimea forţei concentrate, iar variaţia momentului încovoietor, redată în diagrama M (fig. 2.9, *d*) are o schimbare bruscă de pantă.

Variaţia momentului încovoietor M are un salt în secţiunea în care este aplicat un cuplu de forţe (vezi punctul B de pe bară, fig. 2.9, *a*). Saltul respectiv este de mărimea şi în sensul cuplului de forţe.

2.6. DIAGRAME DE EFORTURI LA CADRE

În cadrul sistemelor de bare intersecţiile dintre acestea poartă numele de *noduri*. Nodurile pot fi *rigide* (nodurile C şi E din fig. 2.10, *a*), caz în care barele adiacente lui nu au rotiri relative, sau *articulaţii* (nodul D din fig. 2.10, *a*) atunci când rotirile relative dintre toate barele nodului sunt permise.

Prin cadru se înţelege un sistem de bare care prezintă cel puţin un nod rigid (fig. 2.10, *a*).

Pentru a putea trasa diagramele pe cadrul din figura 2.10, *a* este necesar ca mai întâi să se determine forţele de legătură exterioare, adică forţele din articulaţiile A, respectiv F. Deoarece cele două articulaţii exterioare sunt la acelaşi nivel, forţele de legătură V_A şi V_B se determină scriind ecuaţii de moment în F, respectiv A, pe întreg sistemul de bare (forţele de legătură H_A şi H_F nu dau moment în raport cu punctele A şi F).

$$V_A \cdot 5a - qa \cdot 2a - 2qa \cdot 6a + 3qa^2 - 3qa \cdot 1{,}5a = 0 \Rightarrow V_A = 3{,}1qa;$$

$$-qa \cdot 2a - 2qa \cdot a + 3qa^2 + 3qa \cdot 3{,}5a - V_F \cdot 5a = 0 \Rightarrow V_F = 1{,}9qa.$$

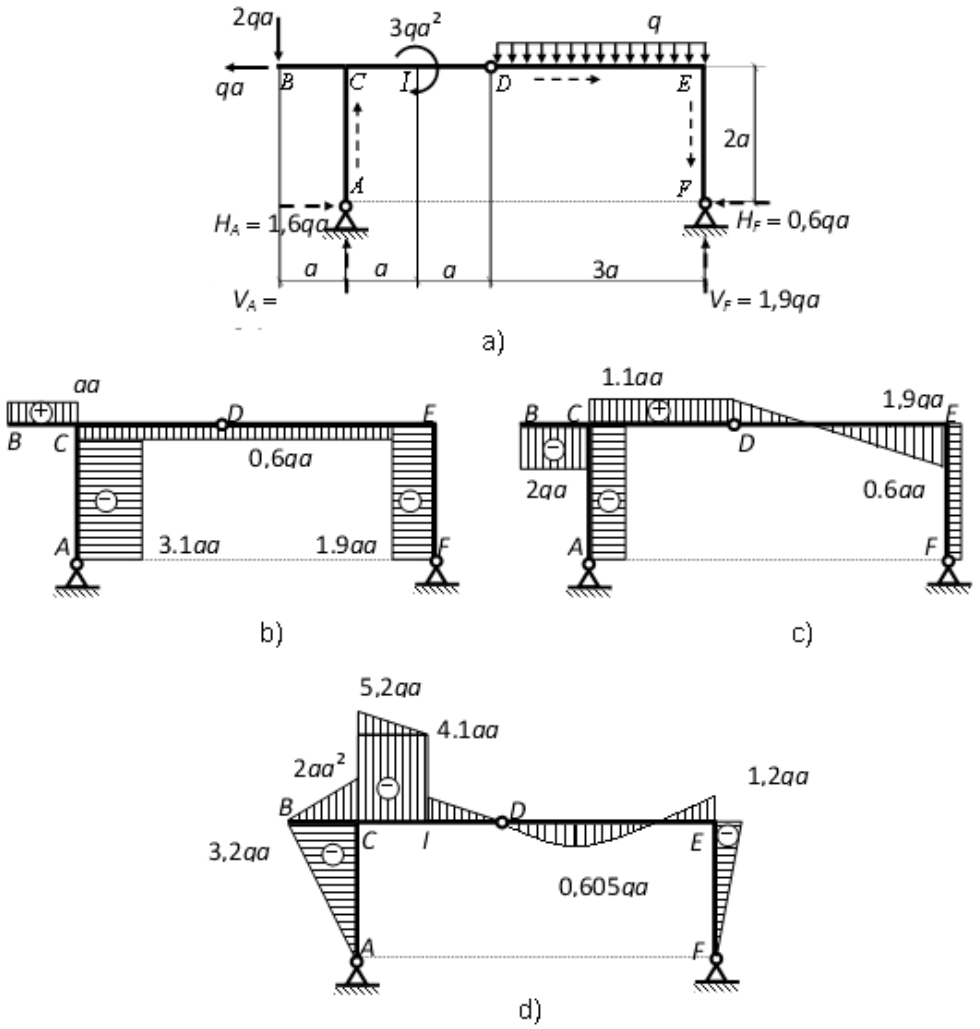


Fig. 2.10

Verificarea acestor calcule se face scriind o ecuație de proiecție pe verticală pe întreg sistemul:

$$V_A - 2qa - 3qa + V_F = 0 \Leftrightarrow 3{,}1qa - 5qa + 1{,}9qa = 0.$$

Determinarea forțelor de legătură H_A şi H_F se face, aplicând metoda izolării corpurilor, prin scrierea de ecuații de moment în raport cu D, pe corpul $A–D$ pentru H_A, respectiv pe corpul $D–F$ pentru H_F.

$$3{,}1qa\cdot 2a - H_A\cdot 2a - 2qa\cdot 3a + 3qa^2 = 0 \Rightarrow H_A = 1{,}6qa;$$

$$3qa\cdot 1{,}5a + H_F\cdot 2a - 1{,}9qa\cdot 3a = 0 \Rightarrow H_F = 0{,}6qa.$$

Ecuația de proiecție pe orizontală, pe întreg sistemul:

$$-qa + H_A - H_F = 0 \Leftrightarrow -qa + 1{,}6qa - 0{,}6qa = 0$$

confirmă exactitatea calculelor.

În vederea trasării diagramelor de eforturi se alege un sens de parcurgere pentru fiecare bară a cadrului. În figura 2.10, *a* sensul de parcurgere a fost marcat prin săgețile punctate situate sub axele barelor.

La fel ca în cazul barelor drepte, trebuie ca mai întâi să se determine valoarea eforturilor secționale la capetele de interval. Acest lucru se face prin efectuarea unei secțiuni, în punctul în care se dorește să se determine efortul secțional, și prin reducerea tuturor forțelor fie din urma acesteia fie din fața acesteia prin raportare la sensul de parcurgere ales.

După determinarea eforturilor secționale diagramele de eforturi se trasează, pe fiecare interval, în conformitate cu relațiile (2.5). În funcție de sensul de parcurgere al barei ales valorile pozitive se vor trasa deasupra axei barei, iar cele negative sub axa acesteia pentru diagramele *N* și *T*, iar pentru diagrama *M* valorile negative deasupra axei barei, cele pozitive sub axa acesteia (v. fig. 2.10, *b*, *c*, *d*).

Toate observațiile făcute anterior cu privire la diagramele de eforturi secționale la console și bare drepte rămân valabile și în acest caz.

3. SOLICITĂRI SIMPLE ALE BARELOR DREPTE

3.1. INTINDEREA SAU COMPRESIUNEA SIMPLĂ

O bară sau numai o porțiune din ea este solicitată la întindere sau compresiune simplă atunci când numai efortul axial N este diferit de zero.

În cadrul acestui capitol, prin compresiune simplă se înțelege solicitarea la compresiune a barelor la care pericolul pierderii stabilității echilibrului în starea deformată este mic sau inexistent. Este cazul barelor foarte groase.

3.1.1. Distribuţia tensiunilor pe secţiunea dreaptă a barei

Deoarece în planul secțiunii drepte a barei torsorul eforturilor secționale este compus numai din forța axială N, relațiile de echivalență ale aspectului static (1.29) sunt (fig. 3.1):

$$\begin{aligned} N &= \int_{(A)} \sigma_x \mathrm{d}A \neq 0; & M_x &= \int_{(A)} (\tau_{xy} z - \tau_{xz} y)\mathrm{d}A = 0; \\ T_z &= \int_{(A)} \tau_{xy} \mathrm{d}A = 0; & M_y &= -\int_{(A)} \sigma_x z \mathrm{d}A = 0; \\ T_y &= \int_{(A)} \tau_{xz} \mathrm{d}A = 0; & M_z &= \int_{(A)} \sigma_x y \mathrm{d}A = 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Pentru determinarea tensiunilor în funcție de eforturile secționale este necesară cunoaşterea modului de variație a acestora pe secțiunea barei fapt ce implică folosirea aspectelor geometric şi fizic.

Pentru a stabili dependența dintre deplasările diferitelor particule ale barei şi deformațiile acestora – care defineşte aspectul geometric – se trasează, pe suprafața exterioară a barei nedeformate, două curbe directoare, la o distanță foarte mică una față de cealaltă, dx (fig. 3.2, *a*). Aceste curbe pot fi imaginate ca