1

INTRODUCERE IN TEORIA SISTEMELOR AUTOMATE

Disciplina *Teoria sistemelor automate* constituie o punte de legătura între etapa pregătirii tehnice fundamentale şi etapa pregătirii de specialitate, introducând o serie de cunoştinte, principii, proceduri, precum şi un mod de gândire sistemic, care să permită înțelegerea şi aprofundarea problemelor specifice domeniului automatizării şi informatizării proceselor.

Teoria sistemelor reprezintă un ansamblu de metode, principii şi cunoştinte, în general independente de aplicații, necesare interpretării şi explicării structurii, caracteristicilor şi comportamentului dinamic al sistemelor de orice fel, dar în mod special al sistemelor automate.

1.1. DEFINIREA ŞI CARACTERIZAREA SISTEMELOR

Conceptul de *sistem* a apărut şi s-a dezvoltat de-a lungul timpului ca rezultat al evidențierii unor trăsături şi comportamente comune pentru o serie de procese şi fenomene din diferite domenii, fapt ce a permis tratarea acestora, din punct de vedere structural-funcțional, într-un mod unitar, *sistemic*.

Noțiunea de sistem are o sferă de cuprindere foarte largă şi, în consecință, este frecvent întâlnită în ştiintă şi tehnică, în general în toate domeniile gândirii şi acțiunii umane, însă aproape întotdeauna în asociație cu un atribut de specificare; de exemplu, sistem automat, sistem de transmisie, sistem informațional, sistem de semnalizare, sistem de producție, sistem filozofic, sistem social etc.

In literatura de specialitate există diverse definiții ale conceptului de sistem, unele reflectând tendința definirii conceptului în întreaga sa generalitate, altele tendința de particularizare la un anumit domeniu al cunoaşterii.

In cele ce urmează, prin *sistem* vom înțelege *un ansamblu de entități* (*elemente*) *ce interacționează între ele şi cu exteriorul*, *în vederea atingerii unei finalități* (sens, obiectiv, scop).

Un sistem este o conexiune de elemente, fiecare element constituind la rândul său un sistem (subsistem). Interacțiunea dintre elemente poate conferi sistemului proprietăți şi comportamente noi, diferite de cele ale fiecărui element component.

In cazul sistemelor fizice (reale), interacțiunea se realizează prin intermediul fluxurilor de masă şi energie, purtătoare de informație. Teoria sistemelor operează cu conceptul de *sistem abstract*, care este în fapt un *model matematic* ce permite descrierea caracteristicilor şi comportamentului dinamic al unei clase de sisteme reale (fizice).

Sistemele automate sunt sisteme tehnice de supraveghere, comanda şi control al proceselor şi instalațiilor tehnologice, *fără intervenția directă a omului*.

Un sistem automat (SA) este alcătuit din două părți principale: *procesul de automatizat* (P) şi *dispozitivul de automatizare* (DA).

Să subliniem în continuare câteva *trăsături fundamentale* ale sistemelor:

- caracterul *structural-unitar*, care reflectă proprietatea unui sistem de a fi reprezentat ca o conexiune de subsisteme a căror acțiune este orientată spre un anumit scop (sens);
- caracterul *cauzal-dinamic*, care reflectă proprietatea unui sistem de a evolua în timp sub acțiunea factorilor interni şi externi, cu respectarea *principiului cauzalității* (conform căruia, orice efect este rezultatul unei cauze, efectul este întârziat față de cauză şi, în plus, două cauze identice generează în aceleaşi condiții efecte identice);
- caracterul *informațional*, care reflectă proprietatea unui sistem de a primi, prelucra, memora şi transmite informație.

In sensul teoriei sistemelor, prin *informație* se înțelege orice factor calitativ şi cantitativ care serveşte la descrierea comportamentului sistemului. La sistemele tehnice, mărimile fizice constituite ca suport pentru informație se numesc *semnale*.

Mărimile (variabilele) asociate unui sistem sunt de trei feluri: mărimi de intrare, mărimi de stare şi mărimi de ieşire.

Mărimile de intrare sunt independente de sistem (deci sunt de tip *cauză*) şi influențează din exterior starea şi evoluția sistemului.

Mărimile de stare sunt dependente de mărimile de intrare (deci sunt de tip *efect*) şi au rolul de a caracteriza complet starea curentă a sistemului.

Mărimile de ieşire sunt dependente de mărimile de stare, uneori şi direct de mărimile de intrare (deci sunt de tip *efect*), şi au rolul de-a transmite în exterior (sistemelor învecinate) informaţie referitoare la starea curentă a sistemului. Unele mărimi de ieşire pot fi în acelaşi timp mărimi de stare.

In timp ce transferul intrare-stare ($\mathrm{I} \rightarrow \mathrm{S}$) are loc cu **î**ntârziere strictă, după o dinamică proprie sistemului, transferul stare-ieşire ($\mathrm{S} \rightarrow \mathrm{E}$) şi transferul direct intrare-ieşire se realizează **i**nstantaneu (fig. 1).

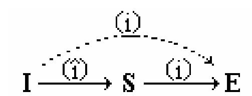


Fig. 1.1. *Transferuri cauzale între mărimile unui sistem.*

Transferul direct intrare-ieşire există numai în cazul sistemelor fizice idealizate, la care ieşirea are o componentă care urmăreşte instantaneu variaţiile intrării.

Un sistem interacţionează cu sistemele învecinate numai prin intermediul mărimilor de intrare şi de ieşire. Mărimile de ieşire ale unui sistem sunt deci mărimi de intrare pentru sistemele învecinate. Mărimile de ieşire ale sistemelor tehnice sunt măsurabile, în timp ce mărimile de stare nu sunt în totalitate accesibile măsurării.

In figura 1.2 este arătat modul de reprezentare a unui sistem Σ; $U=[u_1\, u_2 \cdots u_m]^{\mathrm{T}}$ este vectorul coloană *m*-dimensional al mărimilor de intrare, $Y=[y_1\, y_2 \cdots y_p]^{\mathrm{T}}$ - vectorul coloană *p*-dimensional al mărimilor de ieşire, iar $X=[x_1\, x_2 \cdots x_n]^{\mathrm{T}}$ - vectorul coloană *n*-dimensional al mărimilor de stare. Numărul n al variabilelor de stare ale unui sistem reprezintă *dimensiunea* sau *ordinul* sistemului.

Atunci când variabilele unui sistem sunt separate în variabile cauză şi variabile efect, sistemul se numeşte *orientat*. La sistemele abstracte, orientarea este formală, în timp ce la sistemele reale, orientarea rezultă din aplicarea legilor fizico-chimice specifice, prin respectarea necondiţiontă a principiului cauzalităţii.

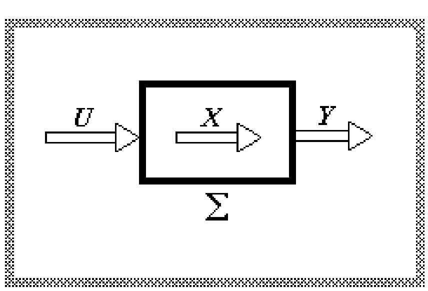


Fig. 1.2. *Reprezentarea unui sistem.*

Mărimile de stare ale unui sistem au două proprietăţi esenţiale:

- de *mediere* a transferului *intrare-ieşire* (I-E), care devine astfel transfer *intrare-stare-ieşire* (I-S-E);

- de *acumulare* într-o formă concentrată (sintetică) a întregii informaţii privind evoluţia anterioară a sistemului, adică a istoriei trecute a sistemului.

Ultima proprietate poate fi exprimată matematic astfel: S*tarea* X_0 *la momentul iniţial* t_0 *şi intrarea U pe intervalul de timp* $[t_0, t]$, *adică* $U_{[t_0\,,\,t\,]}$, *determină în mod univoc starea X la momentul t*, *adică X*(*t*). De aici reiese existenţa unei *funcţii de tranziţie a stării* φ, care exprimă evoluţia în timp a stării X dintr-o stare iniţială X_0 sub acţiunea intrării $U(\cdot)$, adică

$$X(t) = \varphi(t;\, t_0, X_0, U(.)), \tag{1}$$

unde prin $U(\cdot)$ am notat funcţia de intrare U pe intervalul $[t_0, t]$, adică $U_{[t_0\,,\,t\,]}$. La sistemele continue, funcţia de tranziţie a stării este de tip integral.

Axiomatica funcţiei de tranziţie include următoarele proprietăţi:

a) *directivitatea*, adică $\varphi(t;\, t_0, X_0, U(.))$ este definită şi are sens pentru $t \ge t_0$;

b) *consistenţa*, adică

$$\varphi(t_0;\, t_0, X_0, U(.)) = X_0\,, \quad \forall\ t_0,\, X_0\,; \tag{2}$$

c) *tranzitivitatea*, adică dacă $t_0 < t_1 < t$, atunci

$$\varphi(t;\, t_0, X_0, U_{[t_0,\, t]}) = \varphi(t;\, t_1, X_1, U_{[t_1\,,\, t]})\,, \tag{3}$$

unde $X_1 = \varphi(t_1;\, t_0, X_0, U_{[t_0\,,\, t_1]})$.

Pentru o stare iniţială X_0 şi o intrare dată $U_{[t_0\,,\,\infty)}$, curba de evoluţie a stării $X(t) = [x_1(t)\ x_2(t) \cdots x_n(t)]^{\mathrm{T}}$ în *spaţiul stărilor* (*n*-dimensional) se numeşte *traiectorie de stare*. Pentru o intrare dată $U(\cdot)$, mulţimea traiectoriilor de stare formează *portretul stărilor*. Pentru $n = 2$, portretul poate fi reprezentat grafic în planul stărilor. O traiectorie de stare definită pentru $X_0 \ne 0$ şi $U_{[t_0,\,\infty)} = 0$ se numeşte *liberă*. Dacă însă $X_0 = 0$ şi $U_{[t_0,\,\infty)} \ne 0$, atunci traiectoria este *forţată* (fig. 1.3).

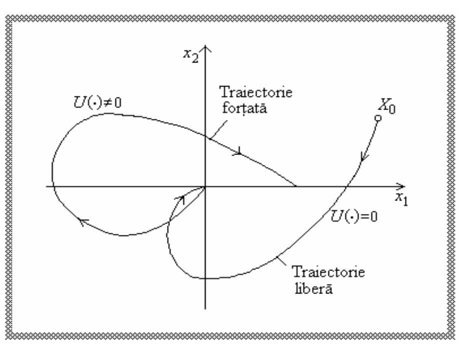


Fig. 1.3. *Traiectorii de stare.*

La rândul ei, ieşirea Y poate fi exprimată în funcţie de starea curentă X şi de intrarea curentă U prin intermediul *funcţiei de ieşire*

$$Y(t)=\eta(t;X(t),U(t)) . \tag{4}$$

Funcţia de ieşire este de tip algebric.

♦ Un exemplu de sistem îl constituie *circuitul electric RLC* din figura 1.4. Dacă tensiunea variabilă u_1 este generată din exterior (având forma de variaţie în timp arbitrară, independentă de circuit) şi dorim să cunoaştem modul de variaţie în timp a tensiunii u_L de la bornele inductivităţii *L*, atunci circuitul *RLC* poate fi considerat un sistem orientat, în care u_1 este mărime de intrare, u_L mărime de ieşire, iar tensiunile u_R şi u_C de la bornele rezistorului R şi condensatorului C sunt mărimi de stare.

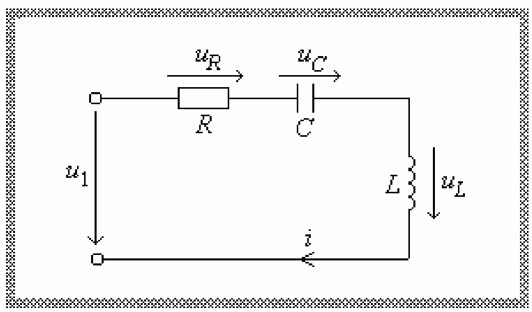


Fig. 1.4. *Exemplu de sistem fizic.*

Sistemul are două variabile de stare, deoarece conţine 2 elemente capabile să înmagazineze şi să transfere cu viteză finită energie (capacitatea *C* şi inductivitatea *L*). Aşa cum se va arăta ulterior, dintre cele trei tensiuni de tip efect (u_R, u_C şi u_L), numai u_R şi u_C pot fi alese variabile de stare.

In condiţiile în care unul dintre parametrii *R*, *L*, *C* este variabil în timp, acesta trebuie considerat mărime parametrică. Dacă, pe lângă u_L, ne interesează şi modul de variaţie în timp a tensiunii u_R, atunci avem două mărimi de ieşire (u_L şi u_R), iar u_R este atât variabilă de ieşire, cât şi variabilă de stare.

La sistemele care respectă strict principiul cauzalităţii, variabilele de tip efect au o *evoluţie în timp întârziată* faţă de cea a variabilelor de tip cauză. Dacă, de exemplu, între o variabilă cauză u şi o variabilă efect y există o corelaţie de forma

$$\dot{y}(t)+y(t)=u(t+3), \quad t\in\mathbf{R} \tag{5}$$

sau de forma

$$y(t)+y(t-1)=u(t+3), \quad t\in\mathbf{Z} \tag{6}$$

care exprimă faptul că efectul la momentul t este influențat de cauza la momentul $t+3$, atunci sistemul respectiv nu respectă principiul cauzalității, deci nu este fizic realizabil.

Un sistem trivial fără variabile de intrare se numeste sistem *sursă,* iar un sistem trivial fără variabile de ieşire se numeşte sistem *izolat.* La sistemele netriviale (care fac obiectul teoriei sistemelor), clasa funcțiilor de intrare admise $\mathcal{U}$ satisface următoarele două proprietăți (axiome):

- *netrivialitatea*, adică $\mathcal{U} \neq \emptyset$;
- *concatenaritatea*, adică dacă $U'(t)$ şi $U''(t)$ sunt intrări admise pe intervalul $[t_0, t_2]$, iar $t_1 \in (t_0, t_2)$, atunci intrarea

$$U = \begin{cases} U'(t), & t \in [t_0,\ t_1) \\ U''(t), & t \in [t_1,\ t_2) \end{cases} \tag{7}$$

este, de asemenea, admisă.

♦ **Aplicația 1.1.** Transferul intrare-stare al unui *sistem continuu* cu intrarea u şi starea x este descris de ecuația diferențială

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax + bu\ ,\quad t \in \mathbf{R}\ .$$

Să se arate că sistemul are funcția de tranziție a stării

$$\varphi(t;\ t_0, x_0, u(.)) = \mathrm{e}^{a(t-t_0)}\, x_0 + b\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{a(t-\tau)} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau\ .$$

Soluție. Inmulțind ambii membrii ai ecuației diferențiale cu exponențiala e^{-at}, obținem succesiv

$$\mathrm{e}^{-at}(\dot{x} - ax) = b\,\mathrm{e}^{-at}\, u\ ,$$

$$(\mathrm{e}^{-at}\, x)' = b\,\mathrm{e}^{-at}\, u\ ,$$

$$\int_{t_0}^{t} (\mathrm{e}^{-at}\, x)'\,\mathrm{d}t = b\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-a\tau}\, u(\tau)\,\mathrm{d}\tau\ ,$$

$$\mathrm{e}^{-at}\, x(t) - \mathrm{e}^{-at_0}\, x(t_0) = b\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-a\tau}\, u(\tau)\,\mathrm{d}\tau\ ,$$

$$x(t) = \mathrm{e}^{a(t-t_0)}\, x_0 + b\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{a(t-\tau)} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau\ .$$

Se poate verifica uşor că funcția de tranziție verifică proprietățile de directivitate, consistență şi tranzitivitate.

In cazul particular $a = 0$, funcția de tranziție are forma

$$\varphi(t;\ t_0, x_0, u(.)) = x_0 + b\int_{t_0}^{t} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau\ .$$

♦ **Aplicația 1.2.** Transferul intrare-stare al unui *sistem discret* cu intrarea u şi starea x este descrisă de ecuația cu diferențe

$$x(t+1) = ax(t) + bu(t), \quad t \in \mathbf{Z}\,.$$

Să se arate că sistemul are funcția de tranziție a stării

$$\varphi(t;t_0,x_0,u(.)) = a^{t-t_0}x_0 + b\sum_{i=t_0}^{t-1} a^{t-i-1}u(i)\,.$$

Soluție. Avem

$$x(t_0+1) = ax(t_0) + bu(t_0)\,,$$

$$x(t_0+2) = a^2x(t_0) + abu(t_0) + bu(t_0+1)\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x(t_0+k) = a^k x(t_0) + a^{k-1}bu(t_0) + a^{k-2}bu(t_0+1) + \cdots + bu(t_0+k-1)\,.$$

In ultima relație, înlocuind pe k cu $t-t_0$ obținem

$$x(t) = a^{t-t_0}x(t_0) + a^{t-t_0-1}bu(t_0) + a^{t-t_0-2}bu(t_0+1) + \cdots + bu(t-1)\,.$$

In cazul particular $a=1$, funcția de tranziție are forma

$$\varphi(t;t_0,x_0,u(.)) = x_0 + b\sum_{i=t_0}^{t-1} u(i)\,.$$

1.2. CLASIFICAREA SISTEMELOR

Pe baza unor proprietăți derivate din caracterul structural-unitar, cauzal-dinamic şi informațional al sistemelor, acestea pot fi împărțite în clase şi categorii de sisteme cu trăsături şi comportamente asemănătoare.

1.2.1. Sisteme continue şi discrete

Sistemele cu timp continuu (numite, pe scurt, *continue*) sunt acele sisteme la care mărimile de intrare, de stare şi de ieşire iau valori la orice moment de timp t aparținând mulțimii numerelor reale **R**.

Sistemele cu timp continuu pot fi sisteme *netede* (*analogice*) sau *seminetede*. Sistemele netede satisfac următoarea proprietate: Oricare ar fi starea inițială X_0 şi funcția de intrare $U(t)$ continuă (în sens matematic) pe intervalul $[t_0,t]$, funcția de stare $X(t)$ şi funcția de ieşire $Y(t)$ sunt, de asemenea, continue. Sistemele cu timp continuu care nu satisfac această proprietatea (cel puțin una dintre funcțiile $X(t)$ şi $Y(t)$ nu este continuă pentru orice stare inițială X_0 şi orice intrare $U(t)$ continuă) se numesc *seminetede*.

♦ Circuitele electronice formate din elemente analogice, dar care conțin şi un releu electromagnetic având cel puțin un contact conectat în circuit, sunt sisteme continue seminetede.

Sistemelor cu timp discret (numite, pe scurt, *discrete*) sunt acele sisteme la care mărimile de intrare, de stare şi de ieşire iau valori numai la anumite momente discrete de timp $t_k = kT$, $k \in \mathbf{Z}$. Alegând, prin convenție, perioada (tactul) T=1, rezultă $t_k = k$ şi deci timpul t este o variabilă de tip întreg ($t \in \mathbf{Z}$).

Sistemele discrete la care mărimile de intrare, de stare şi de ieşire sunt *cuantificate*, adică iau un număr finit de valori, se numesc *sisteme finite* sau *automate finite*. Sistemele finite la care variabilele iau numai două valori distincte ("0" şi "1") se numesc *sisteme logice*, iar sistemele finite la care variabilele iau un număr mare de valori se numesc *sisteme numerice* (*digitale*).

♦ Dispozitivele de semnalizare optică şi acustică (pentru alarmare la ieşirea unei mărimi fizice în afara limitelor admise) sunt sisteme logice, iar calculatoarele sunt sisteme numerice.

Semnalele numerice obținute prin *eşantionarea* (discretizarea) semnalelor de timp continuu se numesc *semnale eşantionate*, iar sistemele cu semnale eşantionate se numesc *sisteme cu eşantionare* sau *sisteme eşantionate*.

1.2.2. Sisteme liniare şi neliniare

Sistemele liniare sunt acelea care, în orice condiții, verifică *principiul superpoziției* (*suprapunerii efectelor*): suma efectelor cauzelor este egală cu efectul sumei cauzelor, adică

$$E(c_1) + E(c_2) + \cdots + E(c_k) = E(c_1 + c_2 + \cdots + c_k), \tag{8}$$

unde prin $E(c_i)$ am notat efectul cauzei c_i.

In cazul unui sistem liniar aflat inițial în regim staționar, dacă intrării $u = f_1(t)$ îi corespunde ieşirea $y = g_1(t)$, iar intrării $u = f_2(t)$ îi corespunde ieşirea $y = g_2(t)$, atunci intrării

$$u = \alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) ,$$

îi va corespunde ieşirea

$$y(t) = \alpha_1 g_1(t) + \alpha_2 g_2(t) . \tag{9}$$

Sistemul obținut prin interconectarea a două sau mai multor subsisteme liniare este, de asemenea, liniar. Reciproca acestei afirmații nu este totdeauna adevărată, adică liniaritatea unui sistem nu implică în mod necesar liniaritatea subsistemelor componente.

Sistemele neliniare sunt acele sisteme care nu satisfac în toate cazurile principiul superpoziţiei (adică acele sisteme care nu sunt liniare). Modul neconstructiv de definire a sistemelor neliniare (prin negarea unei proprietăţi) şi multitudinea modurilor de manifestare a neliniarităţilor conduc la ideea imposibilităţii construirii unei teorii unitare, aplicabile la toate sistemele neliniare. In consecinţă, sistemele neliniare sunt studiate pe *clase de sisteme*, definite pe baza unor proprietăţi comune.

1.2.3. Sisteme cu şi fără memorie

Sistemele *fără memorie* (numite şi *statice*) sunt sisteme de *ordinul zero* (fără variabile de stare), având valoarea ieşirii Y la momentul t complet determinată de valoarea intrarii U la momentul t. La aceste sisteme, ieşirea urmăreşte instantaneu (fără întârziere) variaţiile în timp ale intrării. Sistemele fără memorie nu au capacitatea de memorare a istoriei trecute şi nu conţin în componenţa lor elemente capabile să înmagazineze şi să transfere cantităţi semnificative de masă şi energie.

Sistemele *cu memorie* (numite şi *dinamice*) se caracterizează prin prezenţa regimurilor tranzitorii, ca o consecinţă a faptului că includ în componenţa lor elemente capabile să acumuleze şi să transfere, cu viteză finită, cantităţi semnificative de masă şi energie.

♦ Sistemul reprezentat de circuitul electric *RLC* din figura 1.4 este, evident, un sistem cu memorie. Un circuit simplu format numai dintr-o rezistenţă *R*, având ca intrare tensiunea şi ca ieşire curentul (sau invers), este un sistem fără memorie.

1.2.4. Sisteme staţionare şi nestaţionare

Sistemele *staţionare* (*invariante* sau *cu parametri constanţi*) au structura şi parametrii interni constanţi în timp, iar sistemele *nestaţionare* (*cu parametri variabili*) au structura variabilă în timp, sau cel puţin un parametru intern variabil în timp. Starea unui sistem staţionar aflat iniţial în regim staţionar (caracterizat prin constanţa în timp a tuturor variabilelor de intrare, stare, ieşire) se poate modifica numai din exterior, prin acţiunea variabilelor de intrare.

♦ Un exemplu de sistem cu parametri variabili este cuptorul tubular cu flacără directă la care, în timp, se produc fenomene de depunere şi de cocsare a materialului tubular prin care circulă produsul încălzit, ceea ce are ca efect modificarea parametrilor de transfer termic.

Circuitul electric din figura 1.5, având întrerupătorul **I** acţionat la momente arbitrare de timp, este un sistem cu structură variabilă.

1.2.5. Sisteme monovariabile şi multivariabile

Sistemele *monovariabile* au o singură intrare şi o singură ieşire. Sistemele *multivariable* au cel puţin două intrări şi două ieşiri. In plus, cel puţin o ieşire este influenţată de minimum două intrări.

Sistemele cu o singură intrare ($m=1$) şi mai multe ieşiri ($p>1$), precum şi sistemele cu mai multe intrări ($m>1$) şi o singură ieşire ($p=1$), pot fi reduse la p, respectiv m sisteme monovariabile. Sistemele monovariabile se mai numesc sisteme SISO (single input-single output), iar sistemele multivariabile se mai numesc sisteme MIMO (multi input-multi output).

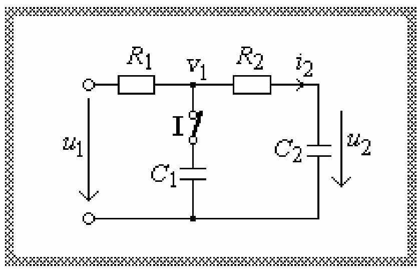


Fig. 1.5. S*istem cu structură variabilă.*

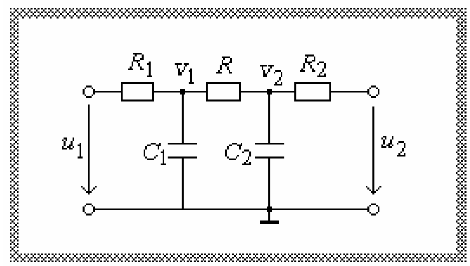


Fig. 1.6. S*istem multivariabil.*

♦ Circuitul electric de tip RC din figura 1.6, având ca intrări tensiunile u_1 şi u_2, iar ca ieşiri tensiunile v_1 şi v_2, constituie un sistem multivariabil.

1.2.6. Sisteme cu parametri concentraţi şi distribuiţi

Sistemele cu *parametri concentraţi* sunt acelea la care se poate considera, cu suficientă precizie, că mărimile fizice asociate oricărui element al sistemului au aceeaşi valoare în toate punctele elementului.

Sistemele cu *parametri distribuiţi* sunt acelea la care cel puţin o mărime fizică asociată unui element dimensional al sistemului are valori care diferă sensibil de la un punct la altul, adică are valori distribuite de-a lungul unei linii, în plan sau în spaţiu.

Deoarece toate obiectele fizice sunt de tip spaţial, pentru determinarea caracterului concentrat sau distribuit al unui obiect se ţine seama de *timpul de propagare* a masei (energiei) pe direcţiile spaţiale ale obiectului, care depinde de dimensiunile acestuia şi de viteza de propagare. Mai exact, se are în vedere *timpul* *relativ de propagare*, definit prin raportarea timpului de propagare la constanta de timp dominantă ce caracterizează dinamica obiectului considerat.

♦ Pentru exemplificare, în timp ce presiunea unui gaz într-un vas are practic aceeaşi valoare în toate punctele vasului, presiunea unui gaz într-o conductă de transport cu lungimea mare are, evident, valori diferite de-a lungul traseului. Prin urmare, primul proces poate fi considerat cu parametri concentraţi, iar al doilea trebuie considerat cu parametri distribuiţi.

Având în vedere complexitatea formalismului matematic la sistemele cu parametri distribuiţi, în condiţiile în care eroarea de modelare datorată renunţării la ipoteza de distributivitate se încadrează în limite acceptabile (timpul relativ de propagare este sub 10 %), se preferă considerarea sistemului analizat ca fiind cu parametri concentraţi. In asemenea situaţii, sistemele cu parametri distribuiţi pot fi tratate în maniera specifică sistemelor cu parametri concentraţi, alegând ca variabile de intrare-ieşire mărimi fizice locale asociate unor puncte (de obicei extreme) ale obiectului fizic.

1.2.7. Sisteme cu timp mort

In cazul sistemelor fizice cu parametri distribuiţi, la care viteza de propagare a fenomenului este relativ redusă (cazul proceselor cu transfer de masă şi transfer caloric), între mărimile de ieşire şi mărimile de intrare poate fi evidenţiată o întîrziere pură, de tip „timp mort". Astfel, dacă mărimea de intrare suferă o variaţie la momentul $t=0$ (fig. 1.7), efectul devine observabil la ieşire începând de la un anumit moment $t=\tau>0$. Intervalul de timp τ în care efectul este insesizabil la ieşire se numeşte *timp mort*.

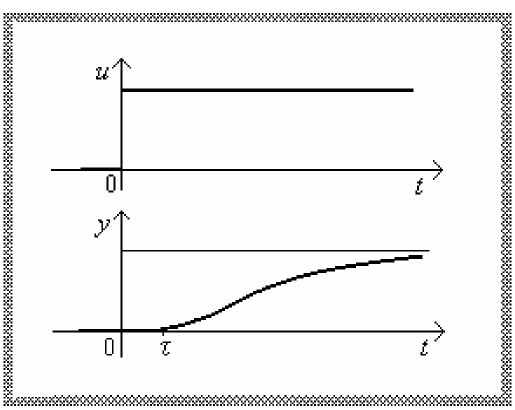


Fig. 1.7. *Răspunsul la intrare treaptă al unui sistem cu timp mort.*

♦ Un cuptor tubular pentru încălzirea petrolului, având ca mărime de intrare debitul de produs (sau temperatura de intrare a produsului) şi ca mărime de ieşire temperatura produsului încălzit (la ieşirea din cuptor), constituie un exemplu de sistem cu timp mort.

1.2.8. Sisteme deterministe şi stochastice

La sistemele *stochastice* (*probabiliste*), spre deosebire de cele deterministe, starea inițială X_0 şi funcția de intrare $U_{[t_0,t]}$ nu mai determină în mod univoc starea X la momentul t. Sistemele stochastice au cel puțin un parametru intern (asociat structurii sistemului) care variază aleator şi imprimă astfel un caracter aleator (stochastic) mărimilor de stare şi de ieşire.

Caracterul determinist sau stochastic al unui sistem nu este influențat de tipul semnalelor aplicate la intrare (deterministe sau stochastice). Sistemele stochastice generează întotdeauna semnal aleator, iar sistemele deterministe generează semnal determinist la intrări deterministe şi semnal aleator la intrări stochastice.

Dacă anumite ipoteze asupra formei de variație a semnalelor stochastice pot fi admise apriori, atunci este posibilă caracterizarea acestora pe baza elementelor de *calcul probabilistic* şi *statistică matematică*. Formalismul matematic este considerabil simplificat în cazul sistemelor stochastice cu caracter *staționar* şi *ergodic*, care implică constanța în timp a proprietăților statistice şi, respectiv, permite analiza sistemului pe baza unui singur semnal aleator reprezentativ.

Un tip special de sistem stochastic este sistemul *fuzzy*, la care mulțimea stărilor şi mulțimea ieşirilor sunt mulțimi fuzzy (definite în mod *vag*, în sensul că un element aparține unei mulțimi de valori date într-o măsură mai mare sau mai mică, exprimată printr-o funcție de apartenență).

♦ La un set de automobile identice, din aceeaşi serie, unghiurile de viraj pentru un unghi dat al volanului formează o mulțime fuzzy, iar sistemul de direcție este un sistem de tip fuzzy (la care jocul volanului are o valoare aleatoare, datorită modului de construcție şi uzurii în timp).

1.2.9. Sisteme deschise şi închise

Sistemele deschise (cu structură deschisă) sunt caracterizate printr-un flux de informație *unidirecțional*. *Sistemele închise* (cu structură închisă sau cu buclă închisă) sunt sisteme la care poate fi evidențiat un flux de informație *bidirecțional.* Un sistem închis conține cel puțin un subsistem a cărui intrare este influențată de propria ieşire.

♦ Un *sistem automat* este format din două mari subsisteme: procesul (instalația) de automatizat P şi dispozitivul de automatizare DA (fig. 1.8). Sistemele automate cu structurile a) şi b) sunt sisteme deschise, iar cele cu structura c) sunt sisteme închise. Sistemul cu structura a) este un sistem de *supraveghere automată* (prin măsurare şi semnalizare), sistemul cu structura b) este un sistem de *comandă automată* (după un program prestabilit), iar sistemul cu structura c) este un sistem de *reglare automată* a procesului P.

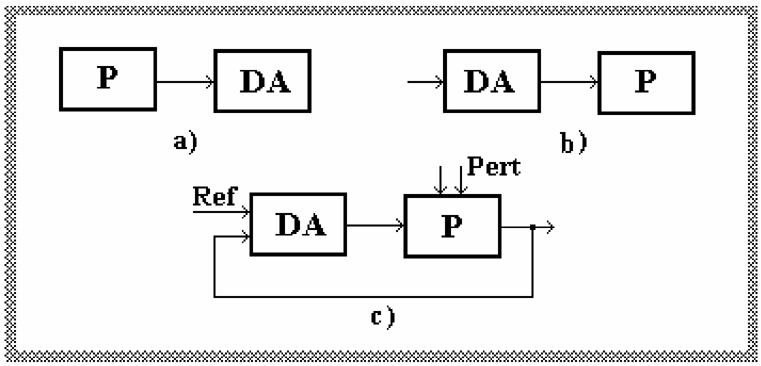


Fig. 1.8. *Structuri ale unui sistem automat.*

In cazul sistemului de reglare automată, dispozitivul de automatizare DA primeşte informație despre starea curentă a procesului reglat P şi, pe baza acestei informații, generează comenzi convenabile asupra procesului, în vederea menținerii sau aducerii acestuia într-o anumită stare dorită (de referință). Abaterea stării curente a procesului de la starea de referință se datoreşte acțiunii perturbațiilor şi/sau modificării stării de referință.

1.2.10. Clasificări ale sistemelor automate

a) După natura elementelor din componența dispozitivului de automatizare şi a semnalelor de comunicație între aceste elemente, sistemele automate pot fi: *electronic*e, *pneumatice*, *hidraulice*, *mecanice* şi *mixte*.

Sistemele electronice sunt superioare celorlalte în privința performanțelor tehnice şi a posibilităților de cuplare la echipamentele de calcul numeric şi de transmisie a semnalelor la distanță. In mediile cu pericol de explozie, sistemele electronice pot fi utilizate numai dacă au fost fabricate în construcție antiex-plozivă. Când sistemul automat conține elemente de natură diferită, interconec-tarea acestora se face prin intermediul elementelor convertoare (de interfață).

b) După gradul de universalitate a elementelor din componența dispozitivu-lui de automatizare, sistemele automate pot fi *unificate* sau *specializate*. Sistemele unificate conțin elemente universale care funcționează cu *semnal unificat* (standard).

Sistemele automate electronice de putere medie funcționează cu *semnal electronic unificat* 4 … 20 mA c.c. Prin intermediul unei rezistențe de 250 Ω, acest semnal poate fi transformat în tensiune în gama 1 … 5 V. Semnalul de tip curent, spre deosebire de semnalul tip tensiune, poate fi transmis fără pierderi la distanțe mari de până la 1000 … 2000 m. Domeniul de variație al semnalului unificat este deplasat față de zero, pentru ca şi în cazul valorilor mici ale semnalului unificat, raportul semnal util-zgomot să rămână la o valoare ridicată. In plus, fiind curentul de colector al unui tranzistor de putere, semnalul unificat nu poate fi generat la valori apropiate de zero (care ar presupune aducerea punctului de funcționare al tranzistorului din zona de amplificare în zona de blocare).

Sistemele automate pneumatice de presiune medie funcționează cu *semnal pneumatic unificat* 0,2 … 1,0 bar. Presiunea de 1 bar este suficient de mică pentru a nu avea consumuri energetice ridicate şi a nu crea probleme deosebite de etanşare; în acelaşi timp, este suficient de mare, pentru ca prin intermediul unor membrane circulare cu raza de 10…20 cm, să creeze forțe de ordinul sutelor de kgf, necesare în acționarea robinetelor de reglare.

Sistemele automate specializate sunt utilizate în cazul unor automatizări de mai mică amploare, când nu se pune problema transmiterii semnalelor la distanță. Aceste sisteme sunt de obicei cu acțiune directă (fără energie auxiliară), simple şi robuste.

c) In raport cu funcția îndeplinită, sistemele automate se clasifică în:

- sisteme automate de *supraveghere* (de măsurare şi/sau semnalizare);
- sisteme automate de *protecție*;
- sisteme automate de *comandă directă* (după un program prestabilit);
- sisteme automate de *reglare* (de comandă după un algoritm care ține seama de starea curentă a sistemului reglat) ;
- sisteme automate de *conducere* (prin supraveghere, protecție, comandă, reglare).

Protecția automată presupune oprirea (blocarea) parțială sau totală a procesului (instalației), atunci când un parametru iese în afara domeniului admisibil de funcționare, afectând calitatea produsului finit şi/sau securitatea instalației respective.

Reglarea automată constă în aducerea şi menținerea stării procesului în vecinătatea unei stări de referință, în condițiile modificării în timp a stării de referință şi a acțiunii perturbațiilor asupra procesului reglat.

2

REPREZENTAREA MATEMATICA A SISTEMELOR

Comportamentul unui sistem în *regim dinamic* (care include *regimul staționar* şi *regimul tranzitoriu*) poate fi descris pe baza unui *model matematic*, format din ecuații algebrice şi din ecuații diferențiale (ordinare sau cu derivate parțiale) sau cu diferențe – după cum sistemul este cu timp continuu sau cu timp discret. In teoria sistemelor se utilizează două modalități distincte de reprezentare matematică a sistemelor în domeniul timpului: prin ecuații de tip *intrare-ieşire* (I-E) şi prin ecuații de tip *intrare-stare-ieşire* (I-S-E).

Caracterizarea prin ecuații de tip I-E implică un formalism matematic mai simplu, prin evitarea evidențierii tuturor aspectelor referitoare la comportamentul intern al sistemului. In cazul unui sistem dinamic, valoarea ieşirii y la momentul t nu poate fi determinată numai pe baza intrării $u_{[0,\,t]}$, fiind necesară şi cunoaşterea unor condiții inițiale (cum ar fi $y(0)$, $\dot{y}(0)$ etc.).

La sistemele reprezentate prin ecuații I-S-E, condițiile inițiale sunt incluse în starea inițială X_0. Atunci când se pune problema conducerii optimale a sistemului, creşte interesul de a dispune de cât mai multă informație despre sistem, care să fie însă şi convenabil structurată. Aceste considerente justifică de ce conceptul de stare a devenit esențial în *teoria modernă* a sistemelor.

Reprezentarea matematică a sistemelor dinamice cu *parametri distribuiți* se face prin *ecuații diferențiale cu derivate parțiale*, deoarece în afara variabilei t mai intervine cel puțin una dintre variabilele spațiale x, y, z. Aceste sisteme fac parte din categoria sistemelor *infinit dimensionale*. In general, numărul n al variabilelor de stare, adică dimensiunea vectorului de stare X, determină *dimensiunea* (*ordinul*) sistemului. Pentru reprezentarea matematică a sistemelor monovariabile cu *timp mort* simplu, egal cu τ, în modelul sistemului fără timp mort se înlocuieşte funcția de intrare $u(t)$ cu $u(t-\tau)$.

In continuare ne vom referi la sistemele deterministe, cu parametri concentrați şi fără timp mort, care sunt sisteme *finit dimensionale*.

2.1. MODELAREA SISTEMELOR

Oricărui sistem cu memorie i se poate asocia un *model dinamic* - pentru caracterizarea regimului de funcţionare dinamic şi un *model staţionar* - pentru caracterizarea regimului de funcţionare staţionar. *Regimul staţionar* poate fi *static* (când variabilele sistemului sunt constante în timp) sau *permanent* (când forma de variaţie în timp a variabilelor sistemului este constantă - de tip rampă, sinusoidal etc.). In cadrul acestei lucrări, vom considera modelul staţionar ca fiind asociat regimului staţionar de tip static.

Modelele sistemelor statice (fără memorie) şi modelele staţionare ale sistemelor dinamice (cu memorie) sunt constituite din *ecuaţii algebrice*, în timp ce modelele dinamice al sistemelor dinamice sunt constituite din *ecuaţii diferenţiale* (la sistemele continue) sau din *ecuaţii cu diferenţe* (la sistemele discrete). Modelul dinamic include şi modelul staţionar, care se obţine din modelul dinamic printr-o particularizare convenabilă (prin anularea derivatelor tuturor variabilelor – la sistemele continue, respectiv prin egalarea valorilor oricărei variabile la toate momentele de timp – la sistemele discrete).

Sistemelor liniare le corespund *modele liniare* (formate din ecuaţii liniare), iar sistemelor neliniare - *modele neliniare* (care conţin cel puţin o ecuaţie neliniară). In majoritatea aplicaţiilor practice, pentru simplificarea formalismului matematic, sistemelor cu neliniarităţi uşoare li se asociază modele liniare sau liniarizate.

Modelarea unui sistem real, adică operaţia de obţinere a modelului matematic, se poate efectua prin *metode analitice*, *experimentale* sau *mixte*.

Indiferent de metodă, operaţia de modelare se bazează pe luarea în consideraţie a unor ipoteze de lucru, cu rol simplificator. In raport cu modul de alegere a ipotezelor simplificatoare şi cu gradul de concordanţă a acestora cu fenomenul real, modelul obţinut este mai simplu sau mai complex, reflectând realitatea fizică cu un grad de precizie mai mare sau mai mic. Dacă numărul ipotezelor simplificatoare luate în consideraţie este mare, atunci modelul obţinut este simplu, robust, uşor de prelucrat şi de interpretat, dar mai puţin precis. Nici modelele foarte complicate nu nu sunt recomandate, datorită lipsei de acurateţe în determinarea unor parametri, a imposibilităţii calculului analitic, a erorilor de rotunjire şi trunchiere care apar în procesarea numerică etc.

Modelarea analitică a sistemelor tehnice se efectuează pe baza legilor generale şi particulare care guvernează fenomenele fizico-chimice asociate sistemului real (legea conservării masei sau volumului, legea conservării energiei, legea conservării impulsului, legile echilibrului fizico-chimic, legile gazelor etc.).

Legea conservării masei este aplicată frecvent sub forma

$$Q_1(t)-Q_2(t)=\frac{\mathrm{d}m_a(t)}{\mathrm{d}t}, \tag{1}$$

care exprimă faptul că diferența dintre debitul masic de intrare Q_1 şi debitul masic de ieşire Q_2 este egală cu viteza de variație a masei acumulate m_a.

Relația (1) se obține prin derivarea în raport cu variabila t a ecuației de bilanț material

$$m_1(t)-m_2(t)=m_a(t),$$

unde $m_1(t)$, $m_2(t)$ şi $m_a(t)$ reprezintă respectiv masa intrată, masa ieşită şi masa acumulată în intervalul de timp $[0, t]$.

Ecuația de bilanț material (1) poate fi extinsă la bilanțul energetic, cu observația că în cazul reacțiilor chimice trebuie să se țină seama şi de căldura degajată sau absorbită prin reacție.

In cazul sistemului reprezentat de *amestecătorul* din figura 2.1, considerăm că debitele volumice Q_1, Q_2 şi Q pot fi modificate în mod independent, cu ajutorul unor pompe reglabile. In consecință, cele trei debite sunt mărimi de intrare, iar nivelul h şi densitatea ρ sunt mărimi de ieşire. Pentru obținerea *modelului analitic*, presupunem că:

a) cele două fluide sunt incompresibile;
b) densitătile ρ_1 şi ρ_2 ale celor două fluxuri de intrare sunt constante;
c) amestecătorul are aria secțiunii orizontale constantă;
d) amestecarea este ideală, adică în orice moment de timp, densitatea ρ are aceeaşi valoare în toate punctele amestecului.

Aplicând legea conservării masei sub forma (1) şi apoi, în mod similar, legea conservării volumului, avem

$$\rho_1 Q_1+\rho_2 Q_2-\rho Q=A\frac{\mathrm{d}(h\rho)}{\mathrm{d}t}, \tag{2}$$

$$Q_1+Q_2-Q=A\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}, \tag{3}$$

unde A este aria secțiunii orizontale a vasului. Din (2) şi (3) rezultă următorul model al sistemului:

$$\begin{cases} A\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=Q_1+Q_2-Q \\ Ah\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+(Q_1+Q_2)\rho=\rho_1 Q_1+\rho_2 Q_2 \end{cases} \tag{4}$$

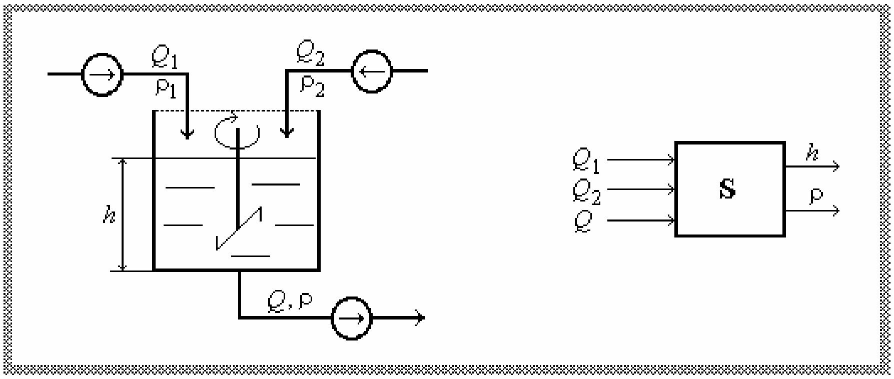


Fig. 2.1. *Amestecător cu debite comandabile* (*cu ajutorul pompelor*).

Din forma modelului reiese că sistemul este determinist, cu memorie, staționar, neliniar (cu prima ecuație liniară, iar a doua neliniară), cu parametri concentrați şi fără timp mort.

Modelul (4) sugerează posibilitatea descompunerii sistemului S în două subsisteme interconectate (fig. 2.2), unul liniar (S_1) şi celălalt neliniar (S_2).

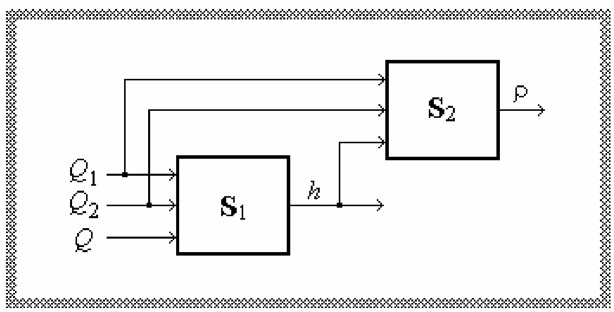


Fig. 2.2. *Descompunerea amestecătorului cu debite comandate.*

Dacă înlăturăm pompa de evacuare şi presupunem că scurgerea amestecului din vas are loc *liber* (fig. 2.3), atunci debitul Q devine dependent de h şi se transformă din variabilă de intrare în variabilă de ieşire. In regim laminar, corelația nivel-debit evacuat are forma liniară

$$Q = \alpha h \ , \tag{5}$$

iar în regim turbulent, are forma neliniară

$$Q = \beta\sqrt{h} \ , \tag{6}$$

unde α şi β sunt coeficienți dependenți de viscozitatea lichidului, de forma şi dimensiunile elementului de obturare.

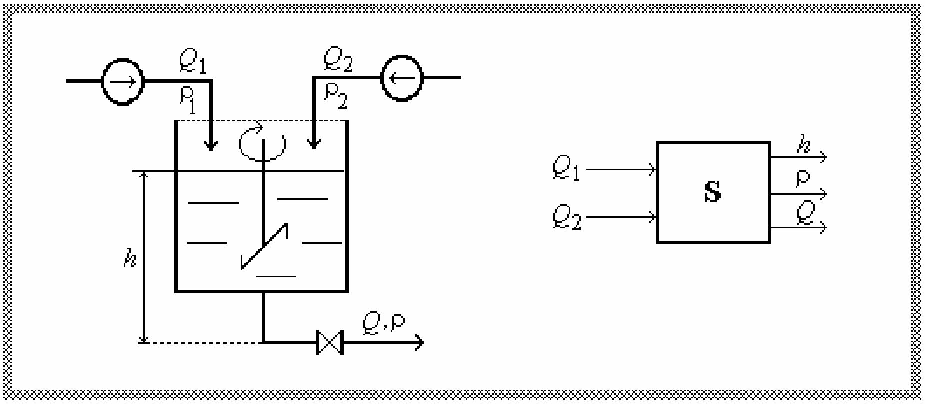


Fig. 2.3. *Amestecător cu scurgere liberă.*

Tinând seama de aceste relații, obținem modelul de regim laminar

$$\begin{cases} A\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}+\alpha h=Q_1+Q_2 \\ Ah\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+(Q_1+Q_2)\rho=\rho_1 Q_1+\rho_2 Q_2 \\ Q=\alpha h \end{cases} \tag{7}$$

respectiv modelul de regim turbulent

$$\begin{cases} A\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}+\beta\sqrt{h}=Q_1+Q_2 \\ Ah\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+(Q_1+Q_2)\rho=\rho_1 Q_1+\rho_2 Q_2 \\ Q=\beta\sqrt{h} \end{cases} . \tag{8}$$

In schema descompusă din figura 2.4, subsistemele S_1 si S_2 sunt cu memorie, iar subsistemul S_3 este fără memorie. In primul caz, subsistemele S_1 si S_3 sunt liniare, iar S_2 este neliniar, în timp ce în al doilea caz, toate cele trei subsisteme sunt neliniare.

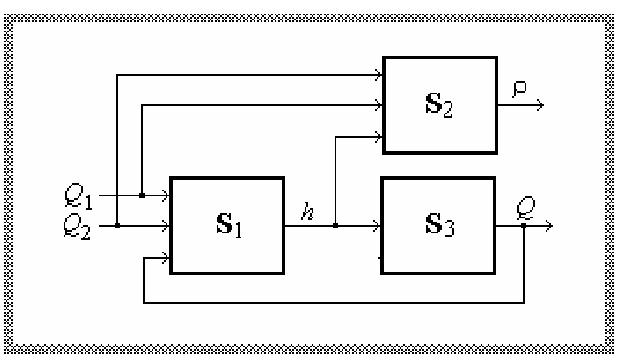


Fig. 2.4. *Descompunerea amestecătorului cu scurgere liberă.*

In cazul în care amestecătorul conține un deversor pentru menținerea constantă a nivelului (h=h_0), sistemul are ca variabile de intrare debitele Q_1 si Q_2, iar ca variabile de iesire debitul Q si densitatea ρ (fig. 2.5). Tinând seama de (4), rezultă modelul

$$\begin{cases} Q = Q_1 + Q_2 \\ Ah_0 \dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + Q\rho = \rho_1 Q_1 + \rho_2 Q_2 \end{cases} . \tag{9}$$

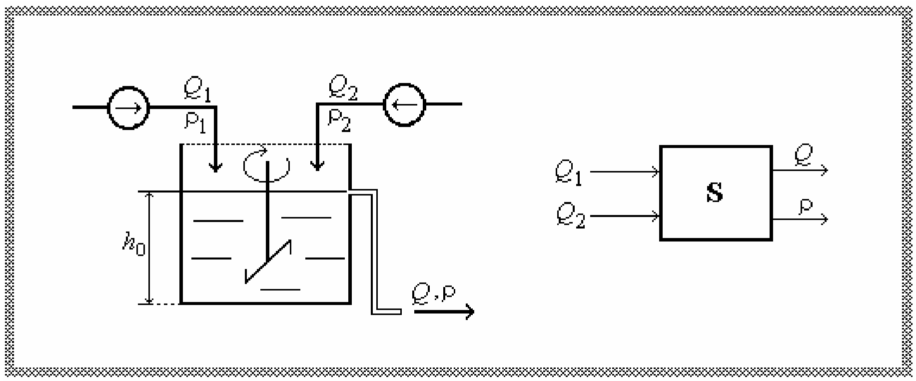


Fig. 2.5. *Amestecător cu deversor*.

Gradul de complexitate al sistemului si implicit al modelului creşte atunci când o parte a debitului de ieşire este recirculată (reintrodusă în vas).

Modelarea experimentală (numită şi *identificare*) se efectuează prin acțiune directă asupra sistemului, permițând fie identificarea globală a modelului (cazul sistemelor de tip „black box”), fie determinarea valorii unor parametri ai acestuia, atunci când se cunoaşte (din modelarea analitică) structura modelului.

Pentru exemplificare, să considerăm un sistem liniar aflat inițial în regim staționar (cu intrarea u şi ieşirea y nule pentru $t<0$) şi să presupunem că în urma modificării treaptă a mărimii de intrare, $u(t)=\alpha \cdot 1(t)$, răspunsul experimental $y(t)$ al sistemului are forma din figura 2.6. Având în vedere forma exponențial concavă a răspunsului, sistemului i se poate asocia modelul

$$T_1 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = Ku \tag{10}$$

în care

$$K = \frac{\beta}{\alpha} \ , \quad T_1 \cong \frac{T_{95}}{3} \ , \tag{11}$$

unde T_{95} este timpul în care mărimea de ieşire devine egală cu 95% din valoarea sa finală. Expresiile factorului de proporționalitate K şi constantei de timp T_1 rezultă din soluția ecuației diferențiale (10) pentru $u=\alpha$ şi $y(0)$=0, anume

$$y(t) = \alpha K(1 - e^{\frac{-t}{T_1}}), \quad t \geq 0 .$$

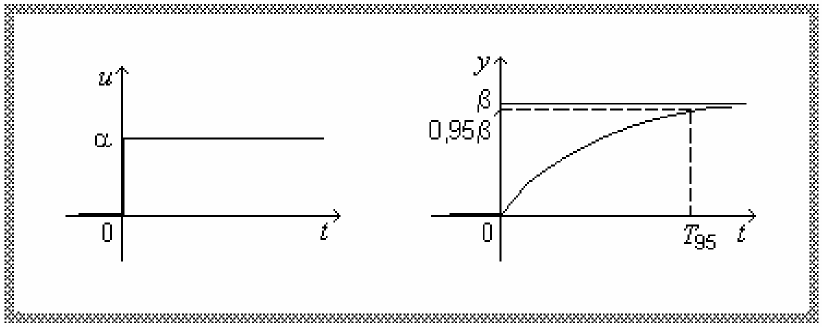


Fig. 2.6. *Răspunsul la intrare treaptă al sistemului de întârziere de ordinul unu.*

Modelarea mixtă îmbină metodele şi procedeele de tip analitic cu cele de tip experimental. O variantă de modelare mixtă este aceea în care forma modelului şi o parte dintre parametrii acestuia sunt obţinuţi pe cale analitică, iar parametrii necunoscuţi sau cu un grad mare de incertitudine sunt determinaţi pe cale experimentală.

2.2. SISTEME DE TIP INTRARE-IESIRE

Modelul general I-E al unui *sistem continuu monovariabil de ordinul n* are forma generală

$$f(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \cdots, y, u^{(r)}, u^{(r-1)}, \cdots, u, t) = 0 . \tag{12}$$

Pentru $r \leq n$ sistemul este *propriu* (*strict propriu* pentru $r < n$ şi *semipropriu* pentru $r = n$), iar pentru $r > n$ sistemul este *impropriu.* Sistemele reale (fizice) sunt sisteme proprii, dar uneori, pentru simplificarea formalismului matematic, se utilizează şi modele improprii. Cazul $r = n = 0$ caracterizează un sistem static, de ordinul zero (fără memorie).

Dacă sistemul este *liniar* şi *staţionar*, modelul are *forma primară* (*standard*)

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_r u^{(r)} + b_{r-1} u^{(r-1)} + \cdots + b_1 \dot{u} + b_0 u , \quad a_n \neq 0 . \tag{13}$$

Prin convenţie, variabila de intrare u şi cea de de ieşire y nu reprezintă valorile absolute ale mărimilor fizice corespunzătoare ale sistemului real, ci *variaţiile* acestora faţă de valorile lor iniţiale. Prin urmare, dacă înainte de momentul iniţial $t_0 = 0$, sistemul se află în regim staţionar, atunci toate variabilele sistemului sunt nule pe intervalul $(-\infty, 0)$.

In cazul $a_0 \neq 0$ şi $b_0 \neq 0$, sistemul este de tip *proporţional*. Modelul staţionar (corespunzător regimului staţionar - caracterizat prin constanţa în timp a intrării şi a ieşirii), are forma

$$a_0 y = b_0 u\,. \tag{14}$$

In cazul $a_0 = 0$ şi $b_0 \neq 0$, sistemul este de tip *integral*. Un asemenea sistem are un singur regim staţionar, corespunzător intrării u=0. Sistemul *pur integral* are modelul $a_1 \dot{y} = b_0 u$, echivalent cu

$$y = \frac{b_0}{a_1} \int_0^t u \mathrm{d}t\,. \tag{15}$$

Răspunsul unui sistem pur integral la intrare tip treaptă este de tip rampă (cu panta constantă).

In cazul $a_0 \neq 0$ şi $b_0 = 0$, sistemul este de tip *derivativ*. In regim staţionar, variabila de ieşire y are valoarea nulă. Modelul

$$y = \frac{b_1}{a_0} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \tag{16}$$

caracterizează un sistem impropriu de tip *pur derivativ*.

♦ Circuitul format dintr-un *condensator* este un sistem *pur integral* - dacă se consideră ca intrare curentul şi ca ieşire tensiunea, sau un sistem *pur derivativ* - dacă se consideră ca intrare tensiunea şi ca ieşire curentul.

Modelul I-E al unui sistem liniar staţionar de ordinul n, cu o singură ieşire şi m intrări, are forma primară

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 \dot{y} + a_0 y = \sum_{i=1}^{m} [b_{ri} u_i^{(r_i)} + b_{r-1,\,i}\, u_i^{(r_i - 1)} + \cdots + b_{1i} \dot{u}_i + b_{0i} u_i]. \tag{17}$$

Dacă sistemul are m intrări şi p ieşiri, atunci modelul I-E conţine $m \cdot p$ ecuaţii de forma (13) - câte una asociată fiecărui canal ce uneşte o intrare cu o ieşire, sau p ecuaţii de forma (17) - câte una asociată fiecărei ieşiri.

Pe baza *principiului superpoziţiei*, modelul primar (13) poate fi utilizat pentru *intrări nederivabile* şi chiar *discontinue*, sub forma *secundară*:

$$\begin{cases} a_n z^{(n)} + a_{n-1} z^{(n-1)} + \ldots + a_1 \dot{z} + a_0 z = u \\ y = b_r z^{(r)} + \ldots + b_1 \dot{z} + b_0 z \end{cases}. \tag{18}$$

Din ecuaţia (13) rezultă că ieşirea y este efectul sumei a $r+1$ cauze ($b_r u^{(r)}, b_{r-1} u^{(r-1)}, \cdots, b_0 u$), iar din prima ecuaţie a modelului secundar (18) rezultă că z este efectul cauzei primare u. Cea de-a doua ecuație a modelului (18) este expresia principiului superpoziției, reflectând proprietatea că ieşirea y este suma efectelor celor $r+1$ cauze şi faptul că unei cauze multiplicate şi derivate îi corespunde un efect multiplicat şi derivat. Matematic, se poate constata că ecuația (13) devine identitate prin înlocuirea variabilelor u şi y din (18) în funcție de derivatele variabilei z.

In mod similar, modelul (13) poate fi extins şi pentru *intrări de tip impuls Dirac*, astfel:

$$\begin{cases} a_n w^{(n)} + a_{n-1} w^{(n-1)} + ... + a_1 \dot{w} + a_0 w = \int_0^t u(\tau)\mathrm{d}\tau \\ y = b_r w^{(r+1)} + b_{r-1} w^{(r)} + ... + b_1 \ddot{w} + b_0 \dot{w} \end{cases} . \tag{19}$$

Modelul I-E al unui sistem *discret liniar monovariabil şi staționar* are *forma primară*

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \cdots + a_n y(t-n) = b_0 u(t) + b_1 u(t-1) + \cdots + b_r u(t-r)\,, \tag{20}$$

echivalentă cu

$$y_k + a_1 y_{k-1} + \cdots + a_n y_{k-n} = b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + \cdots + b_r u_{k-r} \;. \tag{20'}$$

Ordinul sistemului este egal cu $\max\{n, r\}$. Dacă b_0=0, sistemul este *strict propriu*.

Sistemul este de *tip proporțional* atunci când $1 + a_1 + ... + a_n \neq 0$ şi $b_0 + b_1 + \cdots + b_r \neq 0$, de *tip integral* când $1 + a_1 + ... + a_n = 0$ şi $b_0 + b_1 + \cdots + b_r \neq 0$, de tip *derivativ* când $1 + a_1 + ... + a_n \neq 0$ şi $b_0 + b_1 + \cdots + b_r = 0$.

In conformitate cu principiul superpoziției, modelul (20) poate fi scris sub *forma secundară*

$$\begin{cases} z(t) + a_1 z(t-1) + ... + a_n z(t-n) = u(t) \\ y(t) = b_0 z(t) + b_1 z(t-1) + ... + b_r z(t-r) \end{cases} . \tag{21}$$

2.3. SISTEME DE TIP INTRARE-STARE-IESIRE

Modelul general I-S-E al unui *sistem cu timp continuu*, cu parametri concentrați, are următoarea formă:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = f(t, X(t), U(t)) \\ Y(t) = g(t, X(t), U(t)) \end{cases} \tag{22}$$

în care $U(t): \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m$ este funcția de intrare, $X(t): \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ este funcția de stare şi $U(t): \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m$ este funcția de ieşire.

La sistemele *netede*, funcțiile f si g sunt continue în raport cu X si U, iar la sistemele *seminetede*, cel puțin una dintre funcțiile f şi g este discontinuă în raport cu X sau U.

Prima ecuație a modelului (22) este *ecuația stării*, iar cea de-a doua - *ecuația ieşirii*. Deoarece ecuația stării este de tip diferențial, starea X urmăreşte variațiile intrării U cu întârziere.

La sistemele *staționare* (invariante), funcțiile f şi g nu depind explicit de t, adică au forma $f(X(t),U(t))$, respectiv $g(X(t),U(t))$.

Sistemele descrise prin modele I-S-E sunt *sisteme proprii*. Dacă ieşirea Y nu depinde direct de intrarea U, adică funcția g este de forma $g(t,X(t))$, atunci sistemul se numeşte *strict propriu*. La sistemele strict proprii, transferul intrare-ieşire este realizat în totalitate prin intermediul stării; în consecință, ieşirea este *strict întârziată* în raport cu intrarea, în sensul că nu conține nici o componentă care să urmărească instantaneu variațiile intrării. Dacă în ecuația ieşirii apare şi funcția de intrare $U(t)$, atunci sistemul este *semipropriu*.

Un sistem *continuu liniar staționar* are modelul

$$\begin{cases} \dot{X}(t)=AX(t)+BU(t) \\ Y(t)=CX(t)+DU(t) \end{cases}, \tag{23}$$

unde $A(n\times n)$ este *matricea pătrată de stare*, $B(n\times m)$ - *matricea de intrare*, $C(p\times n)$ - *matricea de ieşire* şi $D(p\times m)$ - *matricea de transmisie directă*. In cazul D=0, sistemul este strict propriu.

Ecuațiile (23) pot fi scrise explicit (pe componente), astfel :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & & b_{1m} \\ & \ddots & \\ b_{n1} & & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & & c_{1n} \\ & \ddots & \\ c_{p1} & & c_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & & d_{1m} \\ & \ddots & \\ d_{p1} & & d_{pm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}.$$

Prin convenție, variabilele de intrare, de stare şi de ieşire ale sistemelor liniare nu reprezintă valorile absolute ale mărimilor fizice corespunzătoare ale sistemului real, ci *variațiile* acestora față de valorile lor inițiale.

La sistemele cu o singură intrare şi o singură ieşire (monovariabile), B este matrice coloană, C este matrice linie, iar D este scalar :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u , \tag{24}$$

$$y = [c_1 \ \cdots \ c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + du \ . \tag{25}$$

In cazul sistemelor nestaționare, matricele A, B, C, D sunt funcții de t.

Modelul I-S-E al unui *sistem discret* are forma

$$\begin{cases} X(t+1) = f(t, X(t), U(t)) \\ Y(t) = g(t, X(t), U(t)) \end{cases} , \tag{26}$$

unde $U(t)\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{R}^m$, $X(t)\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{R}^n$, $Y(t)\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{R}^p$, iar f şi g au aceeaşi semnificație ca la (22).

Sistemele *discrete*, *liniare şi staționare* au modelul I-S-E de forma

$$\begin{cases} X(t+1) = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) + DU(t) \end{cases} , \tag{27}$$

unde A, B, C, D sunt matrice constante cu aceleaşi dimensiuni ca la sistemele continue. Modelul (27) poate fi scris şi sub forma

$$\begin{cases} X_{k+1} = AX_k + BU_k \\ Y_k = CX_k + DU_k \end{cases} , \quad k \in \mathbf{Z} . \tag{27'}$$

♦ **Aplicația 2.1.** Fie circuitul electric din figura 1.2. Să se afle:

a) modelul I-E pentru u_1 intrare şi u_C ieşire;

b) modelul I-E pentru u_1 intrare şi u_L ieşire;

c) modelul I-S-E pentru u_1 intrare, u_C ieşire şi $x_1 = u_C$ şi $x_2 = u_R$;

d) modelul I-S-E pentru u_1 intrare, u_L şi u_C ieşiri, $x_1 = u_C$ şi $x_2 = u_R$.

Să se arate că:

e) tensiunile u_L şi u_C nu pot fi variabile de stare;

f) tensiunile u_R şi u_L nu pot fi variabile de stare.

Soluție. Avem :

$$u_R = Ri , \quad u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} , \quad i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} , \quad u_1 = u_R + u_C + u_L . \tag{28}$$

a) Din primele trei relații (27), rezultă

$$u_R = RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\ ,\quad u_L = LC\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2}\ .$$

Tinând seama de ultima relație (28), obținem modelul intrare-ieşire

$$T_1 T_2 \frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + T_1\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = u_1\ , \tag{29}$$

unde constantele de timp T_1 şi T_2 au expresiile $T_1 = RC$, $T_2 = \frac{L}{R}$. Sistemul este liniar, continuu, de ordinul doi, staționar.

b) Din primele trei relații (27), rezultă

$$\dot{u}_R = \frac{R}{L}u_L\ ,\quad \ddot{u}_C = \frac{1}{LC}u_L\ .$$

Derivând de două ori ultima relație (28), obținem modelul intrare-ieşire

$$\ddot{u}_L + \frac{R}{L}\dot{u}_L + \frac{1}{LC}u_L = \ddot{u}_1\ ,$$

care poate fi scris sub forma

$$T_1 T_2\ \ddot{u}_L + T_1\ \dot{u}_L + u_L = T_1 T_2\ \ddot{u}_1\ . \tag{30}$$

c) Din relațiile (28) rezultă

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{RC}x_2\ ,\quad \dot{x}_2 = \frac{R}{L}(-x_1 - x_2 + u_1)\ ,\quad u_C = x_1$$

Cu notațiile $p = 1/(RC)$ şi $q = R/L$, modelul I-S-E devine astfel :

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & p\\ -q & -q\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ q\end{bmatrix}u_1\ ,\quad u_C = x_1\ , \tag{31}$$

având matricele

$$A = \begin{bmatrix}0 & p\\ -q & -q\end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix}0\\ q\end{bmatrix}\ ,\quad C = [1\quad 0]\ ,\quad D = 0\ . \tag{32}$$

d) Deoarece

$$u_L = -x_1 - x_2 + u_1\ ,$$

modelul I-S-E are forma

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & p\\ -q & -q\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ q\end{bmatrix}u_1\ ,\qquad \begin{bmatrix}u_C\\ u_L\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u_1\ , \tag{33}$$

deci

$$A = \begin{bmatrix}0 & p\\ -q & -q\end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix}0\\ q\end{bmatrix},\quad C = \begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix},\quad D = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\ .$$

e) Pentru $x_1 = u_C$ şi $x_2 = u_L$, din relațiile (28) rezultă

$$x_2 = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\ ,\quad i = C\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\ ,\quad u_1 = Ri + x_1 + x_2\ .$$

Prin eliminarea variabilei i, obținem

$$T_1 T_2 \ddot{x}_1 = x_2\,, \quad u_1 = T_1 \dot{x}_1 + x_1 + x_2\,.$$

Din aceste relații obținem ecuațiile de stare

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{T_1}(-x_1 - x_2 + u_1)\,, \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{T_1}x_1 + (\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2})x_2 + \dot{u}_1 - \frac{1}{T_1}u_1\,.$$

A doua ecuație de stare nu se încadrează în forma generală admisă, datorită prezenței derivatei mărimii de intrare $\dot{u}_1$.

f) Pentru $x_1 = u_R$ şi $x_2 = u_L$, din relațiile (28) rezultă

$$x_1 = Ri\,, \quad x_2 = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\,, \quad \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{C} + \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}\,.$$

Prin eliminarea variabilei i, obținem ecuațiile de stare

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{T_1}x_2\,, \quad \dot{x}_2 = -\frac{1}{T_1}x_1 - \frac{1}{T_2}x_2 + \dot{u}_1\,.$$

Ca şi în cazul anterior, cea de-a doua ecuație de stare nu se încadrează în forma generală admisă, datorită prezenței derivatei mărimii de intrare $\dot{u}_1$.

♦ **Aplicația 2.2.** Fie circuitul electric din figura 2.7, având ca intrări tensiunile u_1 şi u_2, iar ca ieşire tensiunea v_1. Să se afle:

a) modelul I-E;

b) modelul I-S-E pentru cazul în care tensiunea v_1 este variabilă de stare.

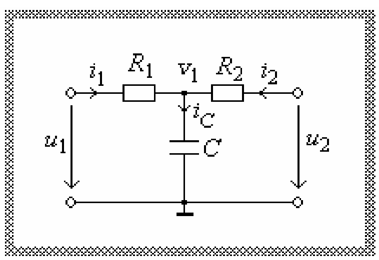


Fig. 2.7. *Circuit tip RC.*

Soluție. a) Avem

$$i_1 + i_2 = i_C\,, \quad \frac{u_1 - v_1}{R_1} + \frac{u_2 - v_1}{R_2} = C\frac{dv_1}{dt}\,.$$

Modelul I-E poate fi scris sub forma

$$T_1\frac{dv_1}{dt} + v_1 = k_1 u_1 + k_2 u_2\,, \tag{34}$$

unde

$$T_1 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}C\,, \quad k_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\,, \; k_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}\,.$$

Sistemul este liniar, continuu, de ordinul unu, staționar.

b) Pentru $x_1 = v_1$, obținem modelul I-S-E

$$\begin{cases} T_1\dot{x}_1 = -x_1 + k_1u_1 + k_2u_2 \\ v_1 = x_1 \end{cases}, \tag{35}$$

cu

$$A = \frac{-1}{T_1}, \quad B = [k_1 \quad k_2], \quad C = 1, \quad D = [0 \quad 0].$$

♦ **Aplicația 2.3**. Fie circuitul electric din figura 2.8, având ca intrări tensiunile u_1 şi u_2, iar ca ieşiri tensiunile v_1 şi v_2. Să se afle modelul I-E.

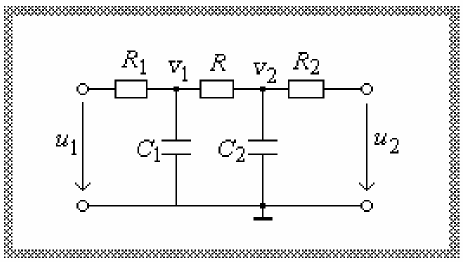


Fig. 2.8. *Circuit multivariabil tip RC.*

Soluție. Sistemul poate fi descompus în două subsisteme interconectate S_1 şi S_2 (fig. 2.9), având fiecare aceeaşi structură ca sistemul din figura 2.7

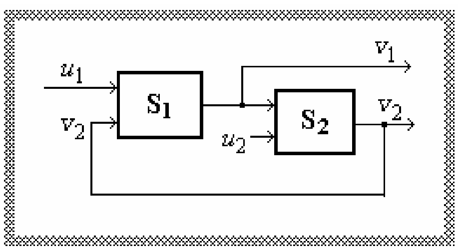


Fig. 2.9. *Sistem multivariabil descompus.*

In conformitate cu (34), avem

$$\begin{cases} C_1\dot{v}_1 = -(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R})v_1 + \frac{u_1}{R_1} + \frac{v_2}{R} \\ C_2\dot{v}_2 = -(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_2})v_2 + \frac{v_1}{R} + \frac{u_2}{R_2} \end{cases}. \tag{36}$$

Prin eliminarea variabilei v_2, apoi a variabilei v_1, între ecuațiile (36), obținem modelul I-E sub forma

$$\begin{cases} T_1T_2\ddot{v}_1 + (k_1T_2 + k_2T_1)\dot{v}_1 + (k_1 + k_2 - 1)v_1 = T_2\dot{u}_1 + k_2u_1 + (k_1 - 1)u_2 \\ T_1T_2\ddot{v}_2 + (k_1T_2 + k_2T_1)\dot{v}_2 + (k_1 + k_2 - 1)v_2 = (k_2 - 1)u_1 + T_1\dot{u}_2 + k_1u_2 \end{cases}, \tag{37}$$

în care

$$k_1 = 1 + R_1/R, \quad k_2 = 1 + R_2/R, \quad T_1 = R_1C_1, \quad T_2 = R_2C_2.$$

Sistemul este continuu, liniar, multivariabil, de ordinul doi, staționar.

4

ELEMENTE DE ANALIZA I-E A SISTEMELOR LINIARE

In cadrul analizei de tip intrare-ieşire, considerăm că până la momentul inițial $t_0 = 0$, sistemul liniar s-a aflat într-un *regim staționar*, în care toate variabilele de intrare şi de ieşire sunt nule. In consecință, răspunsul $y(t)$ al sistemului la o intrare $u(t)$ dată reprezintă *răspunsul forțat* al sistemului.

Pentru ca această metodă de analiză să poată fi aplicată la un sistem fizic, trebuie să considerăm că variabilele de intrare şi de ieşire ale sistemului sunt *variațiilor* mărimilor fizice respective față de valorile lor inițiale. De exemplu, în cazul unui cuptor tubular în care produsul este încălzit la temperatura T prin arderea unui combustibil cu debitul Q, variabila de intrare este variația debitului de combustibil

$$u = \Delta Q = Q - Q_0 ,$$

iar variabila de ieşire este variația temperaturii produsului la ieşirea din cuptor

$$y = \Delta T = T - T_0 .$$

In plus, considerăm că pentru $t < 0$, cuptorul s-a aflat într-un regim staționar, caracterizat prin debitul de combustibil Q_0 şi temperatura produsului la ieşirea din cuptor T_0.

In cele ce urmează sunt prezentate principale aspecte privind analiza de tip intrare-ieşire, în domeniul timpului, a sistemelor liniare, continue şi discrete.

4.1. RASPUNSUL IN TIMP AL SISTEMELOR CONTINUE

In faza de stabilire a modelului sistemelor compuse (tip serie, paralel, cu reacție etc.) se utilizează forma de reprezentare *primară* (standard) a sistemelor :

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_r u^{(r)} + b_{r-1} u^{(r-1)} + \cdots + b_1 \dot{u} + b_0 u , \quad a_n \neq 0 . \qquad (1)$$

In faza de calcul al răspunsului sistemului se utilizează de regulă *forma secundară*

$$\begin{cases} a_n z^{(n)} + a_{n-1} z^{(n-1)} + \cdots + a_1 \dot{z} + a_0 z = u \\ y = b_r z^{(r)} + \cdots + b_1 \dot{z} + b_0 z \end{cases} . \tag{2}$$

Răspunsul $h(t)$ al sistemului la intrarea tip treaptă unitară $u_0 = 1(t)$ se numeşte *răspuns indicial* sau *funcţie indicială*, iar răspunsul $g(t)$ al sistemului la intrarea tip impuls Dirac $u = \delta_0(t)$ se numeşte *răspuns pondere* sau *funcţie pondere*.

In conformitate cu (2), răspunsul indicial al sistemului este dat de relaţia

$$h(t) = b_r z^{(r)} + \cdots + b_1 \dot{z} + b_0 z \,, \quad t \geq 0 \,, \tag{3}$$

unde $z(t)$ este soluţia ecuaţiei diferenţiale

$$a_n z^{(n)} + a_{n-1} z^{(n-1)} + \cdots + a_1 \dot{z} + a_0 z = 1 \,, \tag{4}$$

corespunzătoare condiţiilor iniţiale nule

$$z(0_+) = \dot{z}(0_+) = \cdots = z^{(n-1)}(0_+) = 0 \ . \tag{5}$$

Condiţiile iniţiale (5) rezultă din condiţia ca toate derivatele $z^{(i)}(t)$, $i = \overline{0, n-1}$ să fie funcţii continue pe **R**. Intr-adevăr, ţinând seama că derivata $z^{(i+1)}$ este viteza de variaţie a derivatei $z^{(i)}$, o variaţe bruscă (discontinuă) a derivatei $z^{(i)}$ ar implica o variaţie de valoare infinită a derivatei $z^{(i+1)}$, ceea ce este în contradicţie cu ecuaţia

$$a_n z^{(n)} + a_{n-1} z^{(n-1)} + \cdots + a_1 \dot{z} + a_0 z = 1(t) \,.$$

Din condiţia de continuitate în origine a derivatelor lui $z(t)$, de la ordinul 0 până la ordinul $n-1$, obţinem relaţiile (5). In plus, din condiţia ca ecuaţia (4) să fie verificată la momentul $t = 0_+$, rezultă

$$z^{(n)}(0_+) = 1/a_n \,.$$

Din (3) şi (5) rezultă că *răspunsul indicial* al sistemului, notat cu $h(t)$, se caracterizează prin $n-r$ condiţii iniţiale nule, adică

$$h(0_+) = \dot{h}(0_+) = \cdots = h^{(n-r+1)}(0_+) = 0 \,, \quad h^{(n-r)}(0_+) = b_r / a_n \neq 0 \,. \tag{6}$$

Aşadar, *numărul condiţiilor iniţiale nule* ale răspunsului indicial al unui sistem cu modelul intrare-ieşire de forma primară (1) este egal cu diferenţa dintre ordinul maxim de derivare a ieşirii y şi ordinul maxim de derivare a intrării u. Acelaşi număr de condiţii iniţiale nule, adică $n-r$, îl are răspunsul forţat al sistemului la orice intrare finită, discontinuă în origine. In particular,

a) pentru $r=n$ (cazul sistemelor semiproprii), avem $h(0_+)=b_n/a_n$ (răspunsul indicial este discontinuu în origine);

b) pentru $r=n-1$ avem $h(0_+)=0$ şi $\dot{h}(0_+)=b_{n-1}/a_n \neq 0$ (răspunsul indicial este continuu în origine, dar nederivabil);

c) pentru $r=n-2$ avem $h(0_+)=\dot{h}(0_+)=0$ şi $\ddot{h}(0_+)=b_{n-2}/a_n \neq 0$ (răspunsul indicial este continuu şi simplu derivabil în origine) etc.

Pentru funcții de intrare $u(t)$ continue în origine, răspunsul $y(t)$ se caracterizează prin cel puțin $n-r+1$ condiții inițiale nule, iar pentru funcții de intrare $u(t)$ continue şi derivabile în origine - prin cel puțin $n-r+2$ condiții inițiale nule.

In general, calculul răspunsului forțat $y(t)$ la o intrare arbitrară finită $u=f(t)\cdot 1(t)$ se face cu relația (3), în care $z(t)$ este soluția ecuației diferențiale

$$a_n z^{(n)} + a_{n-1} z^{(n-1)} + \cdots + a_1 \dot{z} + a_0 z = f(t)\,, \tag{7}$$

pentru condiții inițiale nule.

Intre funcția treaptă unitară $u_0 = 1(t)$ şi *funcția rampă unitară* $u_1 = t\cdot 1(t)$ există relația $u_1(t) = \int_0^t u_0(\tau)\mathrm{d}\tau$. Tinând seama de *principiul superpoziției*, între răspunsul $s(t)$ la intrare rampă unitară şi răspunsul indicial $h(t)$, există relațiile:

$$s(t) = \int_0^t h(\tau)\mathrm{d}\tau \quad , \qquad h(t) = \dot{s}(t)\,. \tag{8}$$

De asemenea, din relația

$$1(t) = \int_{0-}^{t} \delta_0(\tau)\mathrm{d}\tau\,, \tag{9}$$

rezultă că între *funcția indicială* $h(t)$ şi *funcția pondere* $g(t)$ există relațiile:

$$h(t) = \int_{0-}^{t} g(\tau)\mathrm{d}\tau\,, \tag{10}$$

$$g(t) = \frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}\,. \tag{11}$$

Ultima relație exprimă faptul că funcția pondere este egală cu derivata în sens generalizat a funcției indiciale. In convenția uzuală, relația are forma

$$g(t) = \dot{h}(t) + h(0_+)\delta_0(t)\,. \tag{12}$$

Dacă se cunoaşte funcția pondere $g(t)$, atunci se poate determina răspunsul forțat $y(t)$ al sistemului la o intrare arbitrar dată $u(t)$, cu *relația de convoluție*:

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau\,. \tag{13}$$

Relația de convoluție (11) este o consecință directă a *principiului superpoziției*. Intr-adevăr, dacă pentru intrarea impuls Dirac $\delta_0(t)$ avem răspunsul $g(t)$, atunci pentru intrarea $u(t)$, echivalentă cu $\int_0^t \delta_0(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau$, vom avea răspunsul $\int_0^t g(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau$. O demonstrație explicită a formulei de convoluție poate fi dată pe baza conceptului de funcție indicială.

■ In cadrul pachetului de programe de reglare “Control System Toolbox” din MATLAB, modelul obiect de tip transfer intrare-ieşire ("input-output transfer") al unui sistem continuu şi liniar se construieşte cu ajutorul funcției ***tf***, astfel

- stf = tf (b,a) .

unde argumentele de intrare b şi a sunt vectori linie formați cu coeficienții derivatelor intrării şi, respectiv, ale ieşirii din ecuația primară (1):

$$b=[b_n\ b_{n-1} \cdots b_1\ b_0]\,, \qquad a=[a_n\ a_{n-1} \cdots a_1\ a_0]\,.$$

In cazul $r<n$, argumentul de intrare b poate fi scris şi sub forma $b=[b_r\ b_{r-1} \cdots b_1\ b_0]$.

Invers, din modelul *stf* se pot extrage matricele b şi a, fie cu ajutorul funcției ***tfdata***,

- [num,den]=tfdata(stf); b=num{1}; den=d{1};

fie prin referire directă la proprietățile obiectului model

- b=stf.num{1}; a=stf.den{1};

Ultima cale permite, de asemenea, modificarea proprietăților modelului *stf*, astfel:

- stf.num{1}=b; stf.den{1}=a;

sau

- stf.num{1}(i)=b_{n-i+1}; stf.num{1}(i)=a_{n-i+1};

Pachetului de programe “Control“ conține funcțiile ***step***, ***impulse*** şi ***lsim*** (fişiere cu extensia m) pentru calculul şi reprezentarea grafică a răspunsului indicial, a răspunsului pondere şi a răspunsului forțat la o intrare arbitrară U dată (de tip scară):

- [Y,t] = step (stf,t) ;
- [Y,t] = impulse (stf,t) ;
- [Y,t] = lsim (stf,U,t) ;

Argumentul de intrare t reprezintă vectorul *timp* şi se defineşte printr-o comandă de forma *t*=*t*0*:dt:t*1, unde *t*0 este valoarea inițială (de regulă egală cu 0), *dt* este pasul de calcul, iar *t*1 - valoarea finală. Argumentul de intrare t se poate omite, caz în care acesta este generat automat de functia respectivă. Argumentul de intrare U şi argumentul de ieşire Y sunt vectori cu aceeaşi dimensiune ca vectorul t.

Dacă funcțiile sunt apelate cu unul sau ambele argumente de ieşire, atunci se efectuează evaluarea acestor argumente, fără reprezentarea grafică a răspunsului. In cazul contrar, se efectuează numai reprezentarea grafică a răspunsului.

Modelul de tip intrare-stare-ieşire ("state space") se construieşte cu ajutorul funcției ***ss***, pe baza matricelor A, B, C, D, astfel:

- sis = ss (A,B,C,D) .

Dacă D este matricea zero, argumentul D poate fi înlocuit cu scalarul 0. Sistemul construit prin comanda sis=ss(D) este de ordinul zero (fără dinamică), cu modelul $Y=DU$.

Un model de tipul I-E poate fi transformat întrunul de tipul I-S-E, cu ajutorul funcției ***ss***:

- sis=ss(stf);

Argumentul de intrare *stf* specifică obiectul (sistemul, modelul) asupra căruia operează funcția *ss*.

Invers, un model de tipul I-S-E poate fi transformat întrunul de tipul I-E, cu ajutorul funcției ***tf***:

- stf=tf(sis);

Din modelul *sis* se pot extrage parametrii matriceali A, B, C, D, cu ajutorul funcției ***ssdata***

- [A,B,C,D]=ssdata(sis) ;

sau prin referire directă la proprietățile obiectului model:

- A=sis.a; B =sis.b; C=sis.c; D=sis.d;

Ultima cale permite, de asemenea, modificarea proprietăților modelului *sis*, în varianta

- sis.a=A; sis.b=B; sis.c=C; sis.d=D;

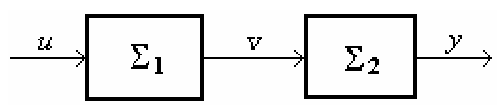
sau în varianta

- sis.a(i,j)=a1; sis.b(i,j)=b1; sis.c(i,j)=c1; sis.d(i,j)=d1;

♦ **Aplicația 4.1.** Fie conexiunea serie de mai jos, formată din subsistemele:

(Σ_1) $2\dot{v}+v=\dot{u}+u$,

(Σ_2) $4\dot{y}+y=2v$.



Să se afle răspunsul indicial, răspunsul pondere şi răspunsul la intrare rampă unitară ale subsistemului Σ_1 şi ale conexiunii serie.

Soluție. Pentru determinarea *răspunsului indicial* $h_1(t)$ al subsistemului Σ_1, formăm ecuațiile:

$$2\dot{z}+z=1\,,\quad z(0)=0\,,\qquad h_1=\dot{z}+z\,.$$

Prin rezolvare, obținem:

$$z(t)=1-\mathrm{e}^{-t/2}\,,\qquad h_1(t)=1-0{,}5\mathrm{e}^{-t/2}\,.$$

Subsistemul Σ_1 are *răspunsul pondere*

$$g_1(t)=\dot{h}_1(t)+h_1(0_+)\delta_0(t)=0{,}25\mathrm{e}^{-t/2}+0{,}5\delta_0(t)$$

şi *răspunsul la intrare rampă unitară*

$$s_1(t) = \int_0^t h_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau = t - 1 + \mathrm{e}^{-t/2} \ .$$

Pentru determinarea *răspunsului indicial* $h(t)$ al conexiunii serie, formăm ecuația diferențială

$$4\dot{y} + y = 2h_1(t) = 2 - \mathrm{e}^{-t/2} \ , \qquad y(0) = 0 \ .$$

Prin rezolvare, obținem:

$$h(t) = 2 + \mathrm{e}^{-t/2} - 3\mathrm{e}^{-t/4} \ .$$

De obicei, răspunsul indicial al sistemelor compuse se determină pe baza modelului conexiunii serie. Astfel, prin eliminarea variabilei v între ecuațiile celor două subsisteme, obținem modelul conexiunii serie

$$8\ddot{y} + 6\dot{y} + y = 2\dot{u} + 2u \ .$$

In vederea determinării *răspunsului indicial* al conexiunii, formăm ecuațiile:

$$8\ddot{z} + 6\dot{z} + z = 1 \ , \qquad z(0) = \dot{z}(0) = 0 \ , \qquad g = 2\dot{z} + 2z \ .$$

Prin rezolvare, obținem:

$$z(t) = 1 + \mathrm{e}^{-t/2} - 2\mathrm{e}^{-t/4} \ , \quad h(t) = 2 + \mathrm{e}^{-t/2} - 3\mathrm{e}^{-t/4} \ .$$

Conexiunea serie are răspunsul pondere

$$g(t) = \dot{h}(t) + h(0_+)\delta_0(t) = -0{,}5\mathrm{e}^{-t/2} + 0{,}75\mathrm{e}^{-t/4}$$

şi *răspunsul la intrare rampă unitară*

$$s(t) = \int_0^t h(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 2t - 10 - 2\mathrm{e}^{-t/2} + 12\mathrm{e}^{-t/4} \ .$$

Tinând seama de (7), răspunsul $s(t)$ poate fi obținut şi cu ecuațiile:

$$8\ddot{z} + 6\dot{z} + z = t \ , \qquad z(0) = \dot{z}(0) = 0 \ , \qquad s = 2\dot{z} + 2z \ .$$

Rezultă:

$$z(t) = t - 6 - 2\mathrm{e}^{-t/2} + 8\mathrm{e}^{-t/4} \ , \qquad s(t) = 2t - 10 - 2\mathrm{e}^{-t/2} + 12\mathrm{e}^{-t/4} \ .$$

Graficele de mai jos ale celor trei răspunsuri ale conexiunii serie au fost obținute în Matlab, cu programul:

```
sis1=tf([1 1],[2 1]);
sis2=tf(2,[4 1]);
sis=sis1*sis2;
t=0:0.1:16;
h=step(sis,t);
g=impulse(sis,t);
u=t;
s=lsim(sis,t);
plot(t,h,t,g,t,0.1*s);
grid on;
```

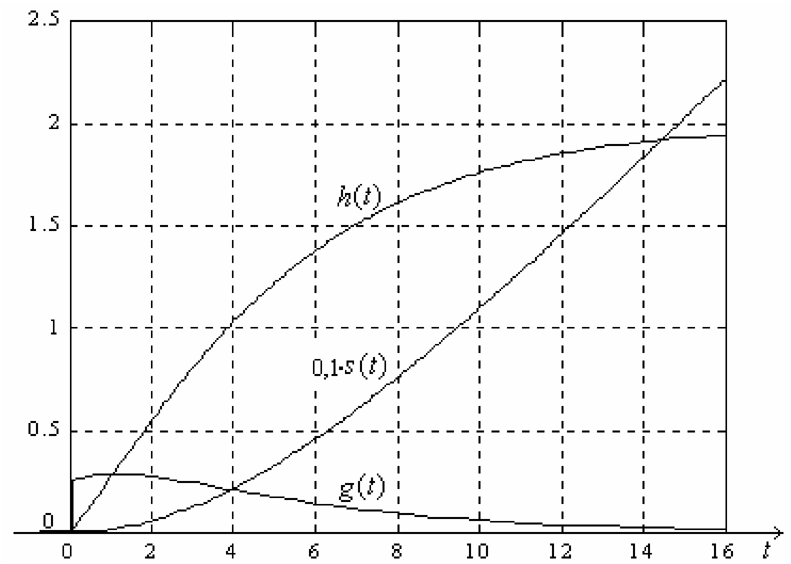


Fig. 4.1. *Răspunsul indicial* $h(t)$, *răspunsul pondere* $g(t)$ *şi răspunsul* $s(t)$ *la intrare rampă unitară.*

♦ **Aplicația 4.2.** Să se arate că sistemul de ordinul doi cu ecuația

$$\ddot{y}+2\xi\omega_n\dot{y}+\omega_n^2 y=\omega_n^2 u\,, \quad 0<\xi<1\,,\ \omega_n>0$$

are răspunsul indicial

$$g(t)=1-\mathrm{e}^{-\omega_2 t}\cdot\frac{\sin(\omega_1 t+\alpha)}{\sin\alpha}\,,$$

unde $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$, $\cos\alpha=\xi$, $\omega_1=\omega_n\sin\alpha$, $\omega_2=\omega_n\cos\alpha$.

Soluție. Funcția indicială este soluția ecuației diferențiale

$$\ddot{y}+2\xi\omega_n\dot{y}+\omega_n^2 y=\omega_n^2\,,$$

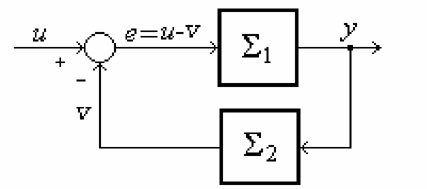
pentru condițiile inițiale $y(0)=0$, $\dot{y}(0)=0$. Deoarece ecuația caracteristică are rădăcinile $r_{1,2}=-\omega_2\pm j\omega_1$, rezultă că funcția indicială este de forma

$$h(t)=1+C_1\mathrm{e}^{-\omega_2 t}\sin(\omega_1 t+C_2)\,.$$

Din condiția inițială $\dot{h}(0)=0$, obținem $\mathrm{tg}\,C_2=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\mathrm{tg}\,\alpha$, deci $C_2=\alpha$, iar din condiția inițială $h(0)=0$, obținem $C_1=\frac{-1}{\sin C_2}=\frac{-1}{\sin\alpha}$.

♦ **Aplicația 4.3** Considerăm conexiunea cu reacție de mai jos, în care:

$$e = u - v \,,$$
$$(\Sigma_1) \quad 5\,\dot{y} + y = ke \,, \quad k>0$$
$$(\Sigma_2) \quad \dot{v} + v = y \,.$$



Pentru $u = 1(t)$, să se afle $y(t)$ şi $e(t)$ în cazurile:

a) k=0,6; b) k=0,8; c) k=4 .

Soluţie. Prin eliminarea variabilelor e şi v, obţinem ecuaţia conexiunii cu intrarea u şi ieşirea y:

$$5\ddot{y} + 6\dot{y} + (k+1)y = k(\dot{u} + u) \,.$$

Similar, prin eliminarea variabilelor y şi v, obţinem ecuaţia conexiunii cu intrarea u şi ieşirea e:

$$5\ddot{e} + 6\dot{e} + (k+1)e = 5\ddot{u} + 6\dot{u} + u \,.$$

Pentru $u = 1(t)$, avem:

$$\begin{cases} 5\ddot{z} + 6\dot{z} + (k+1)z = 1 \,, \quad z(0) = \dot{z}(0) = 0 \\ y = k(\dot{z} + z) \end{cases}$$

şi

$$\begin{cases} 5\ddot{z} + 6\dot{z} + (k+1)z = 1 \,, \quad z(0) = \dot{z}(0) = 0 \\ e = 5\ddot{z} + 6\dot{z} + z \end{cases} .$$

Prin rezolvare se obţin rezultatele de mai jos.

a) pentru $k = 0{,}6$:

$$z(t) = 0{,}625 - 1{,}250\,\mathrm{e}^{-0{,}4t} + 0{,}625\,\mathrm{e}^{-0{,}8t} \,,$$

$$y(t) = 0{,}375 - 0{,}450\,\mathrm{e}^{-0{,}4t} + 0{,}075\,\mathrm{e}^{-0{,}8t} \,,$$

$$e(t) = 0{,}625 + 0{,}750\,\mathrm{e}^{-0{,}4t} - 0{,}375\,\mathrm{e}^{-0{,}8t} \,;$$

b) pentru $k = 0{,}8$:

$$z(t) = \frac{1}{9}[5 - (3t + 5)\mathrm{e}^{-0{,}6t}] \,,$$

$$y(t) = \frac{1}{9}[4 - (0{,}96t + 4)\mathrm{e}^{-0{,}6t}] \,,$$

$$e(t) = \frac{1}{9}[5 + (2{,}4t + 4)\mathrm{e}^{-0{,}6t}] \,.$$

c) pentru $k = 4$:

$$z(t) = 0{,}2 - \mathrm{e}^{-0{,}6t}(0{,}2\cos 0{,}8t + 0{,}15\sin 0{,}8t) \,,$$

$$y(t) = 0{,}8 + \mathrm{e}^{-0{,}6t}(-0{,}8\cos 0{,}8t + 0{,}4\sin 0{,}8t) \,,$$

$$e(t) = 0{,}2 + \mathrm{e}^{-0{,}6t}(0{,}8\cos 0{,}8t + 0{,}9\sin 0{,}8t) \,.$$

Observaţie. Conexiunea cu reacţie, cu intrarea u şi ieşirea e, are modelul staţionar

$$(k+1)e = u \,.$$

Rezultă că pentru u=1(t), variabila de eroare e se va stabiliza la valoarea staţionară

$$e_{\mathrm{st}} = \frac{1}{k+1} \,.$$

Prin urmare, eroarea staționară este cu atât mai mică cu cât factorul de proporționalitate k al subsistemului de pe calea directă este mai mare.

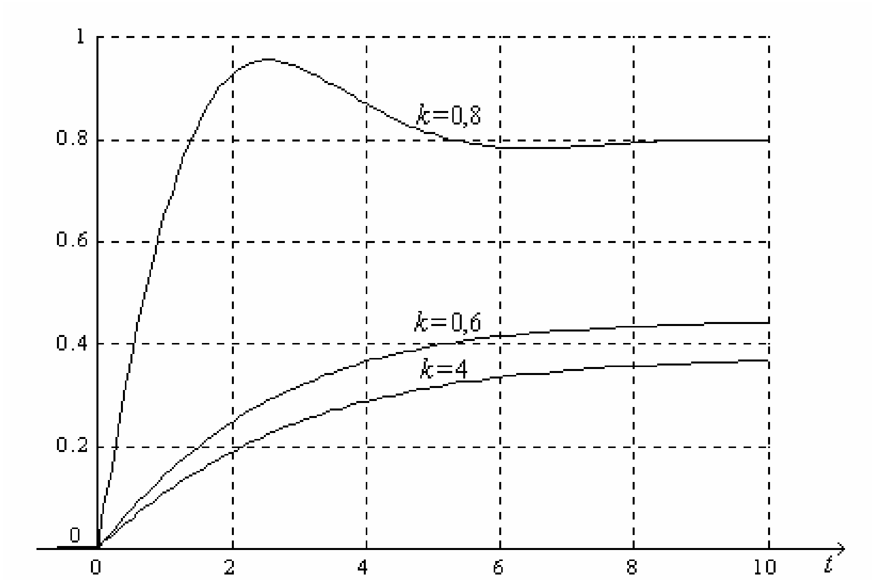


Fig. 4.3. *Răspunsul indicial y(t) al conexiunii cu reacție pentru diferite valori ale parametrului k.*

♦ **Aplicația 4.4.** Subsistemele conexiunii cu reacție din problema precedentă au ecuațiile:

$$(\Sigma_1) \quad \dot{y}=e,\ e=u-v\,,$$

$$(\Sigma_2) \quad 5\dot{v}+6v=y\,.$$

Să se afle: a) $e(t)$ pentru $u=1(t)$; b) $y(t)$ pentru $u=\sin t$.

Soluție. a) Sistemul cu intrarea u şi ieşirea e are ecuația

$$5\ddot{e}+6\dot{e}+e=5\ddot{u}+6\dot{u}\,.$$

Pentru $u=1(t)$, avem:

$$\begin{cases} 5\ddot{z}+6\dot{z}+2z=1\,,\ z(0)=\dot{z}(0)=0 \\ e=5\ddot{z}+6\dot{z} \end{cases}$$

Prin rezolvare se obține:

$$e(t)=1{,}25\mathrm{e}^{-0{,}2t}-0{,}25\mathrm{e}^{-t}\,.$$

Deoarece $\lim\limits_{t\to\infty} e(t)=0$, sistemul reuşeşte să elimine eroarea produsă prin modificarea treaptă a intrării u (fapt ce se datorează acțiunii de tip integral a subsistemului Σ_1). Mai mult chiar, sistemul elimină eroarea pentru orice funcție de intrare cu valoarea finală finită. Intr-adevăr, din ecuația dinamică a sistemului cu reacție rezultă că în regim staționar (caracterizat prin $\ddot{u}=\dot{u}=0$ şi $\ddot{e}=\dot{e}=0$), avem $e_{st}=0$.

b) Sistemul cu intrarea u şi ieşirea y are ecuația

$$5\ddot{y}+6\dot{y}+y=5\dot{u}+6u\,.$$

Răspunsul sistemului la intrarea $u=\sin t$ se obține prin rezolvarea ecuației diferențiale

$$5\ddot{y}+6\dot{y}+y=5\cos t+6\sin t\,,$$

în condițiile inițiale $y(t)=\dot{y}(0)=0$. Ambele condiții inițiale sunt nule deoarece funcția $u(t)=\sin t\cdot 1(t)$ este continuă în origine şi $n-r+1=2$. Rezultă

$$y(t)=\frac{125}{104}e^{-0,2t}-\frac{1}{8}e^{-t}+\frac{3}{26}\sin t-\frac{14}{13}\cos t\,.$$

Componenta sinusoidală a răspunsului are amplitudinea $A=\sqrt{(\frac{3}{26})^2+(\frac{14}{13})^2}=\sqrt{\frac{61}{52}}$.

4.2. RASPUNSUL IN TIMP AL SISTEMELOR DISCRETE

In faza de stabilire a modelului unui sistem compus din modelele subsistemelor componente se utilizează forma de reprezentare *primară* (standard)

$$y(t)+a_1y(t-1)+\cdots+a_ny(t-n)=b_0u(t)+b_1u(t-1)+\cdots+b_ru(t-r)\,. \tag{14}$$

In faza de determinare analitică a răspunsului forțat este însă preferată forma *secundară*

$$\begin{cases} z(t)+a_1z(t-1)+...+a_nz(t-n)=u(t) \\ y(t)=b_0z(t)+b_1z(t-1)+...+b_rz(t-r) \end{cases}. \tag{15}$$

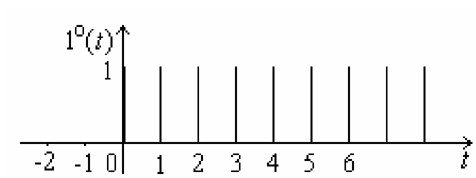


Fig. 4.5. *Funcția discretă tip treaptă unitară.*

Calculul analitic al răspunsului forțat $y(t)$ al sistemului la o intrare analitică dată $u=u_0(t)$, se poate face fie pe baza modelului primar fie, mai simplu, pe baza modelului secundar. In cele ce urmează vom prezenta cea de-a doua metodă.

Metoda modelului secundar. Răspunsul $z(t)$ la o funcție de intrare analitică dată $u=f(t)\cdot 1^o(t)$ poate fi scris sub forma

$$z(t)=z_{om}(t)+z_p(t)\,, \tag{19}$$

unde $z_{om}(t)$ este soluția ecuației omogene cu diferențe finite

$$z(t)+a_1z(t-1)+...+a_nz(t-n)=0$$

iar $z_p(t)$ este o soluție particulară a ecuației neomogene cu diferențe finite

$$z(t)+a_1 z(t-1)+...+a_n z(t-n)=f(t)\ . \tag{20}$$

Ambele soluții $z_{\text{om}}(t)$ şi $z_{\text{p}}(t)$ sunt valabile pentru $t\geq n$. Soluția ecuației omogene are forma

$$z_{\text{om}}(t)=C_1 s_1^t+C_2 s_2^t+\cdots+C_n s_n^t\ , \tag{21}$$

unde $s_1,s_2,\cdots,s_n$ sunt rădăcinile (distincte) ale ecuației caracteristice

$$s^n+a_1 s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n=0\ , \tag{22}$$

iar $C_1,C_2,\cdots,C_n$ sunt constante reale sau complex-conjugate.

Dacă rădăcinile s_1 şi s_2 sunt reale şi egale, atunci suma $C_1 s_1^t+C_2 s_2^t$ trebuie înlocuită cu $(C_1+C_2 t)s_1^t$. Dacă s_1 şi s_2 sunt complex-conjugate, adică $s_{1,2}=\rho(\cos\alpha\pm j\sin\alpha)$, atunci în locul sumei $C_1 s_1^t+C_2 s_2^t$, cu constantele C_1 şi C_2 complex-conjugate, se recomandă a se utiliza expresia $\rho^t(C_1\cos\alpha t+C_2\sin\alpha t)$, în care constantele C_1 şi C_2 sunt reale.

Constantele $C_1, C_2, \cdots, C_n$ se determină astfel încât soluția $z(t)=z_{\text{o}}(t)+z_p(t)$, inițial valabilă pentru $t\geq n$, să verifice condițiile inițiale la momentele de timp $n-1$, $n-2$, ... , 0. In acest fel, soluția finală $z(t)$ devine valabilă pentru orice $t\geq 0$. In conformitate cu (17'), condițiile inițiale sunt date de relațiile

$$\begin{cases} z_0=u_0 \\ z_1=u_1-a_1 z_0 \\ z_2=u_2-a_1 z_1-a_2 z_0 \\ \vdots \\ z_{n-1}=u_{n-1}-a_1 z_{n-2}-\cdots-a_{n-1}z_0 \end{cases}\ . \tag{23}$$

Soluția particulară $z_p(t)$ are, de regulă, o formă similară cu cea a funcției de intrare $f(t)$. Astfel,

- pentru intrare impuls unitar (fig. 4.6), avem

$$z_p(t)=0\ ,\quad t\geq n\ ; \tag{24}$$

- pentru intrare tip treaptă unitară, avem

$$z_p(t)=\frac{1}{1+a_1+a_2+\ ...\ +a_n}\ ,\quad t\geq n\ ; \tag{25}$$

- pentru intrare tip rampă unitară, adică $u(t)=t\cdot 1^0(t)$, avem

$$z_p(t)=\frac{a_1+2a_2+...+na_n}{(1+a_1+a_2+...+a_n)^2}+\frac{t}{1+a_1+a_2+...+a_n}\ ,\quad t\geq n\ ; \tag{26}$$

- pentru intrare tip putere, adică $u(t)=a^t \cdot 1^0(t)$, avem

$$z_p(t)=\frac{a^t}{1+a_1a^{-1}+a_2a^{-2}+\ldots+a_na^{-n}}, \quad t\geq n . \tag{27}$$

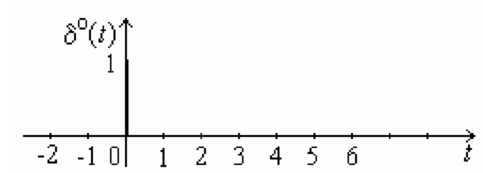


Fig. 4.6. *Funcția discretă tip impuls unitar.*

Răspunsul sistemului la intrarea impuls unitar $u=\delta^o(t)$ reprezintă *funcția pondere* a sistemului şi se notează cu $g(t)$, iar răspunsul la intrarea treaptă unitară $u=1^o(t)$ reprezintă *funcția indicială* şi se notează cu $h(t)$. In conformitate cu principiul superpoziției, din relațiile

$$\delta^o(t)=1^o(t)-1^o(t-1), \quad 1^o(t)=\delta^o(t)+\delta^o(t-1)+\cdots+\delta^o(0), \tag{28}$$

rezultă că între funcția pondere $h(t)$ şi funcția indicială $g(t)$ există corelațiile

$$g(t)=h(t)-h(t-1), \quad h(t)=g(t)+g(t-1)+\cdots+g(0). \tag{29}$$

Dacă se cunoaşte funcția pondere $g(t)$, atunci răspunsul forțat al sistemului la o intrare arbitrară dată $u(t)$ se poate determina cu ajutorul *relației de convoluție*:

$$y(t)=g(t)u(0)+g(t-1)u(1)+\cdots+g(0)u(t)=\sum_{i=0}^{t} g(t-i)u(i) . \tag{30}$$

■ In **MATLAB**, modelul obiect de tip transfer intrare-ieşire ("input-output transfer") al unui sistem discret liniar se construieşte tot cu ajutorul funcției ***tf***, astfel:

- stfd= tf (b,a,T);

unde b şi a sunt vectori linie, formați cu coeficienții termenilor intrării, respectiv cu coeficienții termenilor ieşirii din ecuația primară (1), iar T este perioada de eşantionare. Vectorii a şi b trebuie să aibă aceeaşi dimensiune, anume max(n+1, r+1), astfel că:

$b=[b_0\ b_1\ ...\ b_n]$, $a=[a_0\ a_1\ ...\ a_n]$ – în cazul $r\leq n$;
$b=[b_0\ b_1\ ...\ b_r]$, $a=[a_0\ a_1\ ...\ a_r]$ – în cazul $r>n$.

Prin urmare, în cazul $n\neq r$, ultimele elemente (din dreapta) ale unuia din cei doi vectori se aleg 0. Dacă însă $b_0=b_1=\ldots=b_j=0$, atunci argumentul de intrare b poate fi introdus şi sub forma $b=[b_{j+1}\ b_{j+2}\ ...\ b_n]$ sau $b=[b_{j+1}\ b_{j+2}\ ...\ b_r]$, după cum $r\leq n$ sau $r>n$.

Invers, din modelul *stfd* se pot extrage matricele b şi a ca la sistemele continue, cu ajutorul funcției *tfdata* sau prin referire directă la proprietățile obiectului model.

Pentru calculul şi reprezentarea grafică a *răspunsului* se utilizeaza aceleaşi funcţii ca la sistemele continue de tip I-E (*step*, *impulse*, *lsim*). Conversia unui sistem discret de tip I-E întrunul de tip I-S-E se face cu funcţia *ss*, iar conversia inversă cu funcţia *tf*.

♦ **Aplicaţia 4.5.** Se consideră sistemul discret cu modelul

$$y(t)-ay(t-1)=bu(t)\ .$$

Să se calculeze:

a) funcţia indicială;

b) funcţia pondere;

c) răspunsul la intrarea $u(t)=\sin\frac{\pi t}{6}\cdot 1^{o}(t)$.

Soluţie. a) *Metoda directă*. Soluţia ecuaţiei omogene are forma $y_{om}=C_1 a^t$, $t\geq n=1$. Pentru $u=1^{o}(t)$ şi $t\geq 0$, ecuaţia sistemului devine

$$y(t)-ay(t-1)=b\ .$$

In cazul $a\neq 1$, soluţia particulară este $y_p(t)=\frac{b}{1-a}$, $t\geq 1$. Rezultă

$$y(t)=C_1 a^t+\frac{b}{1-a}\ ,\quad t\geq 1\ ,$$

iar din condiţia iniţială $y(0)=b$, obţinem:

$$y(t)=b\cdot\frac{1-a^{t+1}}{1-a}\ ,\quad t\geq 0\ .$$

In cazul $a=1$, avem $y_p(t)=bt$, $t\geq 1$. Rezultă $y(t)=C_1+bt$, $t\geq 1$, iar din $y(0)=b$, obţinem:

$$y(t)=b(t+1)\ ,\quad t\geq 0\ .$$

La acelaşi rezultat se ajunge scriind soluţia obţintă în cazul $a\neq 1$ sub forma $y(t)=b(1+a+a^2+\cdots+a^t)$ şi înlocuind apoi pe a cu 1.

Metoda inducţiei. In ecuaţia sistemului se înlocuieşte t succesiv cu valorile 0, 1, 2 etc. Avem:

$$y(0)=ay(-1)+b=b\ ,\quad y(1)=ay(0)+b=b(a+1)\ ,\quad y(2)=ay(1)+b=b(a^2+a+1)\ ,$$

care sugerează faptul că $y(t)=b(a^t+a^{t-1}+\cdots+a+1)$ pentru orice t număr natural. In conformitate cu principiul inducţiei, considerăm relaţia adevărată pentru t şi arătăm că rămâne adevărată şi pentru $t+1$, adică $y(t+1)=b(a^{t+1}+a^t+\cdots+a+1)$. Intr-adevăr, avem:

$$y(t+1)=ay(t)+b=ab(a^t+a^{t-1}+\cdots+a+1)+b=b(a^{t+1}+a^t+\cdots+a+1)\ .$$

b) *Metoda directă*. Pentru $u=\delta^{o}(t)$ şi $t\geq 1$, ecuaţia sistemului are forma omogenă $y(t)-ay(t-1)=0$ şi soluţia $y(t)=C_1 a^t$, $t\geq 1$. Din condiţia iniţială $y(0)=b$ se obţine $C_1=b$. Prin urmare, funcţia pondere a sistemului are expresia

$$y(t)=ba^t\ ,\quad t\geq 0\ .$$

Metoda inducției. Avem:

$$y(0)=ay(-1)+bu(0)=b\,,\quad y(1)=ay(0)+bu(1)=ab\,,$$

$$y(2)=ay(1)+bu(2)=a^2b\,,\quad y(3)=ay(2)+bu(3)=a^3b\,,$$

deci $y(t)=a^tb$, $t\geq 0$.

Metoda indirectă. Cu relația $g(t)=h(t)-h(t-1)$, obținem

$$h(t)=b\cdot\frac{1-a^{t+1}}{1-a}-b\cdot\frac{1-a^t}{1-a}=a^tb\,.$$

c) Pentru $u=\sin\frac{\pi t}{6}$ și $t\geq 0$, ecuația sistemului devine

$$y(t)-ay(t-1)=b\sin\frac{\pi t}{6}\,.$$

Soluția particulară a ecuației este de forma $y_p(t)=A\sin\frac{\pi t}{6}-B\cos\frac{\pi t}{6}$, $t\geq 1$. Această soluție verifică ecuația dată pentru

$$A=\frac{(4-2\sqrt{3}a)b}{(2-\sqrt{3}a)^2+a^2}\quad,\qquad B=\frac{2ab}{(2-\sqrt{3}a)^2+a^2}\,.$$

Soluția generală este de forma

$$y(t)=C_1a^t+A\sin\frac{\pi t}{6}-B\cos\frac{\pi t}{6}\,,\ t\geq 1\,,$$

iar din condiția inițială $y(0)=0$ rezultă:

$$y(t)=A\sin\frac{\pi t}{6}+B(a^t-\cos\frac{\pi t}{6})\,,\ t\geq 0\,.$$

Componenta sinusoidală a răspunsului sistemului are amplitudinea

$$A_1=\sqrt{A^2+B^2}=\frac{2b}{\sqrt{(2-\sqrt{3}a)^2+a^2}}\,.$$

♦ **Aplicația 4.6.** Pentru sistemul

$$y(t)-ay(t-1)=b_1u(t-1)+b_2u(t-2)\,,$$

să se calculeze: a) funcția indicială; b) funcția pondere.

Soluție. Forma secundară a modelului sistemului este

$$\begin{cases} z(t)-az(t-1)=u(t) \\ y(t)=b_1z(t-1)+b_2z(t-2) \end{cases}.$$

a) In conformitate cu aplicația 4.6, în cazul $a\neq 1$, pentru $u=1^{\mathrm{o}}(t)$ avem

$$z(t)=\frac{1-a^{t+1}}{1-a}\,,\ t\geq 0\,,$$

deci

$$y(t)=b_1\frac{1-a^t}{1-a}\cdot 1^0(t-1)+b_2\frac{1-a^{t-1}}{1-a}\cdot 1^0(t-2)\,.$$

Rezultă de aici

$$y(0)=0\ ;$$
$$y(t)=b_1\frac{1-a^t}{1-a}+b_2\frac{1-a^{t-1}}{1-a}\ ,\quad t\geq 1 .$$

In cazul $a=1$, avem $z(t)=t+1$, $t\geq 0$, deci $y(0)=0$ şi $y(t)=(b_1+b_2)t-b_2$, $t\geq 1$.

b) *Metoda directă*. In conformitate cu aplicaţia 4.6, pentru $u=\delta^{o}(t)$ avem $z(t)=a^t$, $t\geq 0$. Prin urmare

$$y(t)=b_1a^{t-1}\cdot 1^0(t-1)+b_2a^{t-2}\cdot 1^0(t-2),$$

deci

$$y(0)=0;\ y(1)=b_1\ ;$$
$$y(t)=(b_1a+b_2)a^{t-2}\ ,\quad t\geq 2 .$$

Metoda indirectă. Cu relaţia $g(t)=h(t)-h(t-1)$, pentru $t\geq 2$ obţinem

$$g(t)=b_1\frac{1-a^t}{1-a}+b_2\frac{1-a^{t-1}}{1-a}-b_1\frac{1-a^{t-1}}{1-a}-b_2\frac{1-a^{t-2}}{1-a}=(b_1a+b_2)a^{t-2} .$$

♦ **Aplicaţia 4.7.** Fie sistemul discret

$$10y(t)-ay(t-1)+y(t-2)=4u(t-1)\ .$$

Să se calculeze funcţia indicială şi funcţia pondere în cazurile: a) $a=7$; b) $a=2$.

Soluţie. Scriem forma secundară a modelului

$$\begin{cases}10z(t)-az(t-1)+z(t-2)=u(t)\\ y(t)=4z(t-1)\end{cases} .$$

a) In cazul $a=7$, soluţia ecuaţiei omogene în z este

$$z_{\text{om}}=C_1\cdot 0{,}5^t+C_2\cdot 0{,}2^t\ ,\ t\geq 2 .$$

Pentru $u=1^{o}(t)$ şi $t\geq 2$, ecuaţia neomogenă

$$10z(t)-7z(t-1)+z(t-2)=1$$

are soluţia particulară $y_p(t)=\frac{1}{4}$ şi soluţia generală

$$z(t)=\frac{1}{4}+C_1\cdot 0{,}5^t+C_2\cdot 0{,}2^t\ .$$

Din condiţiile iniţiale $z(0)=0$ şi $z(1)=\frac{1}{10}$, rezultă

$$z(t)=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\cdot 0{,}5^t+\frac{1}{12}\cdot 0{,}2^t\ ,\quad t\geq 0 .$$

Prin urmare, răspunsul indicial este

$$h(t)=4z(t-1)=1-\frac{4}{3}\cdot 0{,}5^t+\frac{1}{3}\cdot 0{,}2^t\ ,\quad t\geq 0 .$$

Pentru $u=\delta^{o}(t)$, răspunsul pondere este

$$g(t)=h(t)-h(t-1)=\frac{4}{3}(0{,}5^t-0{,}2^t)\ , \quad t\geq 0\ .$$

b) In cazul $a=2$, ecuația caracteristică $10s^2-2s+1=0$ are rădăcinile

$$s_{1,2}=\frac{1\pm 3j}{10}=\rho(\cos\alpha\pm j\sin\alpha)\,,$$

unde $\rho=\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$. Soluția ecuației omogene în z este

$$z_{\rm om}=10^{-\frac{t}{2}}(C_1\cos\alpha t+C_2\sin\alpha t)\,, \quad t\geq 2\,.$$

Pentru $u=1^{\rm o}(t)$ şi $t\geq 2$, ecuația neomogenă

$$10z(t)-2z(t-1)+z(t-2)=1$$

are soluția particulară $y_p(t)=\frac{1}{9}$ şi soluția generală

$$z(t)=\frac{1}{9}+10^{-\frac{t}{2}}(C_1\cos\alpha t+C_2\sin\alpha t)\,.$$

Din condițiile inițiale $z(0)=0$ şi $z(1)=\frac{1}{10}$, rezultă

$$z(t)=\frac{1}{9}(1-10^{-\frac{t}{2}}\cos\alpha t)\,, \quad t\geq 0\,.$$

Răspunsul indicial este

$$h(t)=4z(t-1)=\frac{4}{9}(1-10^{-\frac{t}{2}}\cos\alpha t)\,, \quad t\geq 0\,.$$

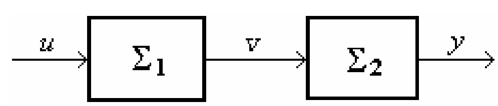
Răspunsul pondere se obține astfel

$$g(t)=h(t)-h(t-1)=\frac{4}{3}\cdot 10^{-\frac{t}{2}}\sin\alpha t\,, \quad t\geq 0\,.$$

♦ **Aplicația 4.8.** Fie conexiunea serie de mai jos, formată din subsistemele:

(Σ_1) $v_k-0{,}2v_{k-1}=0{,}1u_k+0{,}7u_{k-1}$,

(Σ_2) $y_k+0{,}5y_{k-1}=2{,}1v_{k-2}$.



Să se afle răspunsul indicial şi răspunsul pondere ale conexiunii serie.

Soluție. *Metoda* 1. Pentru $u_k=1^0(k)$ şi $k\geq 1$, ecuația (secundară) a subsistemului Σ_1 devine

$$\begin{cases} z_k-0{,}2z_{k-1}=1 \\ v_k=0{,}1z_k+0{,}7z_{k-1} \end{cases}.$$

Rezultă $z_k=\frac{5}{4}+C_1\cdot 0{,}2^k$, $k\geq 1$, iar din condiția inițială $z_0=1$, obținem

$$z_k=\frac{1}{4}(5-0{,}2^k)\,, \quad k\geq 0\,,$$

şi

$$v_k = 1 - 0{,}9 \cdot 0{,}2^k, \quad k \geq 0 .$$

Din ecuația subsistemului Σ_2 rezultă

$$y_0 = y_1 = 0$$

şi

$$y_k + 0{,}5 y_{k-1} = 2{,}1 - 1{,}89 \cdot 0{,}2^{k-2}, \ k \geq 2 .$$

Ecuația are soluția

$$y_k = 1{,}4 - 2{,}7 \cdot 0{,}2^{k-1} + C_1 \cdot (-0{,}5)^k, \ k \geq 2 ,$$

iar din condiția inițială $y_1 = 0$, obținem răspunsul indicial

$$h_k = 1{,}4 - 2{,}7 \cdot 0{,}2^{k-1} + 1{,}3 \cdot (-0{,}5)^{k-1}, \quad k \geq 1$$

şi răspunsul pondere

$$g_k = h_k - h_{k-1} = 10{,}8 \cdot 0{,}2^{k-1} + 3{,}9(-0{,}5)^{k-1}, \ k \geq 2 .$$

In plus, avem $h_0 = 0$ şi $g_0 = g_1 = 0$.

Metoda 2. Prin eliminarea variabilelor v_k, v_{k-1} şi v_{k-2} între ecuațiile celor două subsisteme, obținem ecuația primară a conexiunii serie

$$y_k + 0{,}3 y_{k-1} - 0{,}1 y_{k-2} = 0{,}21 u_{k-2} + 1{,}47 u_{k-3} .$$

Formăm modelul secundar

$$\begin{cases} z_k + 0{,}3 z_{k-1} - 0{,}1 z_{k-2} = u(t) \\ y_k = 0{,}21 z_{k-2} + 1{,}47 z_{k-3} \end{cases} .$$

Pentru intrarea u de tip treaptă unitară, ecuația în z are soluția

$$z_k = \frac{5}{6} + C_1 \cdot 0{,}2^k + C_2 \cdot (-0{,}5)^k, \quad k \geq 2$$

iar din condițiile inițiale $z_0 = 1$ şi $z_1 = \frac{7}{10}$, rezultă

$$z_k = \frac{5}{6} - \frac{1}{14} \cdot 0{,}2^k + \frac{5}{21} \cdot (-0{,}5)^k, \quad k \geq 0 .$$

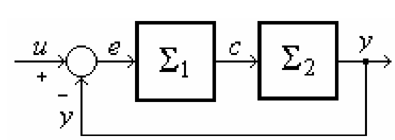
Mai departe, din $y_k = 0{,}21 z_{k-2} + 1{,}47 z_{k-3}$ obținem $y_0 = y_1 = 0$ şi

$$y_k = 1{,}4 - 2{,}7 \cdot 0{,}2^{k-1} + 1{,}3 \cdot (-0{,}5)^{k-1}, \ k \geq 2 .$$

♦ **Aplicația 4.9.** Considerăm conexiunea cu reacție de mai jos, în care:

$(\Sigma_1) \quad z_k - z_{k-1} = a e_k , \quad a > 0$

$(\Sigma_2) \quad y_k - 0{,}8 y_{k-1} = c_{k-1} .$



Să se afle răspunsul indicial al sistemului pentru $a = 0{,}01$.

Soluție. Prin eliminarea variabilei z între ecuațiile $c_k - c_{k-1} = a(u_k - y_k)$ şi $y_k - 0{,}8 y_{k-1} = z_{k-1}$, obținem modelul conexiunii:

$$y_k + (a-1{,}8)y_{k-1} + 0{,}8y_{k-2} = au_{k-1}\,.$$

In cazul $a=0{,}01$, ecuația sistemeului pentru intrare treaptă unitară are forma

$$y_k - 1{,}79y_{k-1} + 0{,}8y_{k-2} = 0{,}01\ , \qquad k \ge 1\,.$$

Pentru $k \ge 2$, ecuația are soluția $y_k = 1 - C_1 \cdot a^k + C_2 \cdot b^k$, unde $a \cong 0{,}927$ şi $b \cong 0{,}863$ sunt rădăcinile ecuației caracteristice $s^2 - 1{,}79s + 0{,}8 = 0$. Din condițiile inițiale $y_0 = 0$ şi $y_1 = 0{,}01$, rezultă răspunsul indicial

$$h_k = 1 - C_1 \cdot a^k + C_2 \cdot b^k\ , \qquad k \ge k_2 = 0\,,$$

unde $C_1 = \dfrac{0{,}99-b}{a-b} \cong 1{,}98$, $C_1 = \dfrac{0{,}99-a}{a-b} \cong 0{,}98$.

Graficele din figura 4.9, cu răspunsurile indiciale ale sistemului pentru trei valori diferite ale parametrului a, au fost obținute în Matlab.

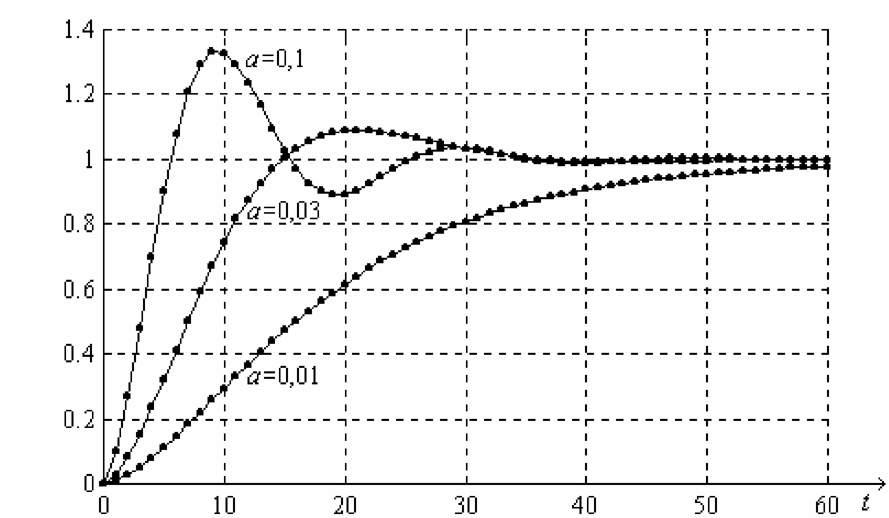


Fig. 4.9. *Funcțiile indiciale ale sistemului închis pentru* $a=0{,}01$; $a=0{,}03$; $a=0{,}1$.

4.3. SISTEME ECHIVALENTE INTRARE-IESIRE

Prin definiție, două sisteme sunt *echivalente intrare-ieşire* dacă pentru orice funcții de intrare de tip original comune, răspunsurile (forțate) ale celor două sisteme sunt egale.

Dacă două sisteme sunt echivalente, atunci răspunsurile (funcțiile) pondere ale acestora sunt egale. Reciproc, dacă două sisteme au aceeaşi funcție pondere $g(t)$, atunci din relația de convoluție $y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau$ - la sistemele continue, respectiv $y(t) = \sum_{i=0}^{t} g(t-i)u(i)$ - la sistemele discrete, rezultă că sistemele au răspunsuri egale pentru orice intrare de tip original comună $u(t)$, deci sunt sisteme echivalente I-E. Prin urmare, două sisteme sunt echivalente intrare-ieşire dacă şi numai dacă au aceeaşi *funcţie pondere*.

Din relaţia $h(t)=\int_0^t g(\tau)\mathrm{d}\tau$ - la sistemele continue, respectiv $h(t)=\sum_{i=0}^{t} g(i)$ - la sistemel discrete, rezultă că două sisteme sunt echivalente intrare-ieşire dacă şi numai dacă au aceeaşi *funcţie indicială*.

Sistemele liniare continue, invariante şi monovariabile, cu modelul primar de forma

$$a_n y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1\dot{y}+a_0 y=b_r u^{(r)}+b_{r-1}u^{(r-1)}+\cdots+b_1\dot{u}+b_0 u\,,\quad a_n\neq 0\ ,$$

sunt complet determinate de vectorul a al coeficienţilor derivatelor mărimii de ieşire şi de vectorul b al coeficienţilor derivatelor mărimii de intrare:

$$a=[a_n\ a_{n-1}\ \cdots\ a_1\ a_0],\quad b=[b_r\ b_{r-1}\ \cdots\ b_1\ b_0]\,.$$

Cu ajutorul celor doi vectori se poate construi următoarea funcţie raţională:

$$G(s)=\frac{b_r s^r+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+\cdots+a_1 s+a_0}\,, \tag{31}$$

unde s este o variabilă reală sau complexă. Această funcţie raţională, numită *funcţie de transfer*, permite caracterizarea completă a sistemului sub aspectul corelaţiei dinamice intrare-ieşire. Din modelul intrare-ieşire se obţine direct funcţia de transfer şi invers, din funcţia de transfer se poate scrie uşor modelul intrare-ieşire. Numitorul funcţiei de transfer este chiar polinomul caracteristic al ecuaţiei diferenţiale a sistemului.

O funcţie de transfer $G(s)$ se numeşte *minimală* dacă polinoamele de la numărătorul şi numitorul funcţiei de transfer sunt coprime, adică nu au nici o rădăcină comună. Prin simplificare, o funcţie de transfer neminimală poate fi adusă la forma minimală.

Două funcţii de transfer sunt considerate egale dacă au aceleaşi valori pentru orice $s\in\mathbf{C}$, cu excepţia unui număr finit de puncte. In consecinţă, două funcţii de transfer sunt egale dacă ambele au aceeaşi formă minimală.

In mod similar, sistemului liniar discret, invariant şi monovariabil, cu modelul primar de forma

$$y(t)+a_1 y(t-1)+\cdots+a_n y(t-n)=b_0 u(t)+b_1 u(t-1)+\cdots+b_r u(t-r)\,,$$

i se poate asocia funcţia de transfer raţională

$$G(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_rz^{-r}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}}, \tag{32}$$

unde z este o variabilă reală sau complexă.

Două sisteme de ordinul n, continue sau discrete, care au aceeaşi funcţie de transfer sunt, în mod evident, echivalente intrare-ieşire. Există însă şi sisteme de ordin diferit care pot fi echivalente intrare-ieşire.

Teorema de echivalenţă intrare-ieşire. *Două sisteme liniare şi monovariabile sunt echivalente intrare-ieşire dacă şi numai dacă au funcţiile de transfer egale*.

Observaţii. **1°.** Din teorema de echivalenţă intrare-ieşire rezultă că un sistem monovariabil Σ de tip I-S-E este echivalent intrare-ieşire cu un sistem S de tip I-E dacă şi numai dacă sistemul Σ poate fi transformat într-un sistem de tip I-E care să aibă funcţia de transfer egală cu funcţia de transfer a sistemului S.

2°. Un sistem de ordinul n se numeşte *minimal* dacă nu există un sistem echivalent intrare-ieşire cu ordinul mai mic decât n. *Ordinul* unei funcţii de transfer este egal cu numărul tuturor polilor simpli şi multipli ai funcţiei de transfer, adică cu gradul polinomului de la numitorul formei minimale a funcţiei de transfer. Din teorema de echivalenţă intrare-ieşire rezultă

Teorema de minimalitate. *Un sistem monovariabil propriu de ordinu n este minimal dacă şi numai dacă funcţia de transfer este ireductibilă*, *adică are ordinul* n.

Prin urmare, un sistem monovariabil este minimal dacă şi numai dacă toate rădăcinile polinomului caracteristic sunt poli ai funcţiei de transfer, caz în care polinomul caracteristic coincide cu polinomul polilor funcţiei de transfer.

♦ **Aplicaţia 4.10.** Să se afle parametrul m astfel încât sistemul

$$6\ddot{y}+m\dot{y}+2y=2\dot{u}+u$$

să fie echivalent intrare-ieşire cu un sistem de ordinul unu.

Soluţie. Sistemul are funcţia de transfer

$$G(s)=\frac{2s+1}{6s^2+ms+2}.$$

Aceasta se simplifică atunci când rădăcina $s_1=-1/2$ a polinomului de la numărător este şi rădăcină a polinomului de la numitor. Punând această condiţie, rezultă $m=7$ şi

$$G(s)=\frac{2s+1}{(2s+1)(3s+2)}=\frac{1}{3s+2}.$$

In consecinţă, pentru $m=7$, sistemul dat este neminimal, fiind echivalent intrare-ieşire cu sistemul minimal de ordinul unu

$$3\dot{y}+2y=u\,.$$

♦ **Aplicația 4.11.** Să se arate că sistemele

$$\mathrm{S}_1:\quad 6\ddot{y}+5\dot{y}+y=2\dot{u}+u$$
$$\mathrm{S}_2:\quad 3\ddot{y}+4\dot{y}+y=\dot{u}+u$$

sunt echivalente intrare-ieşire.

Soluție. Sistemule au funcțiile de transfer

$$G_1(s)=\frac{2s+1}{6s^2+5s+2}=\frac{2s+1}{(2s+1)(3s+1)}=\frac{1}{3s+1}\,,$$

respectiv

$$G_2(s)=\frac{s+1}{3s^2+4s+1}=\frac{s+1}{(s+1)(3s+1)}=\frac{1}{3s+1}\,.$$

Cele două sisteme sunt echivalente intrare-ieşire deoarece funcțiile lor de transfer sunt egale (au forme minimale identice).

♦ **Aplicația 4.12.** Să se arate că pentru $m=-2$ şi $m=\frac{-1}{2}$, sistemul de ordinul doi de tip I-S-E

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1+mx_2-u\\ \dot{x}_2=-2x_1-x_2+2u\end{cases}$$
$$y=x_1-x_2$$

este echivalent intrare-ieşire cu un sistem de ordinul unu.

Soluție. Pentru $m=-2$, din $y=x_1-x_2$ şi $\dot{y}=\dot{x}_1-\dot{x}_2=x_1-x_2-3u$, rezultă $-\dot{y}+y=3u$. Prin urmare, sistemul dat este echivalent intrare-ieşire cu sistemul de tip I-E

$$-\dot{y}+y=3u\,,$$

respectiv cu sistemul de tip I-S-E

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_1-3u\\ y=x_1\end{cases}.$$

Pentru $m=\frac{-1}{2}$, avem

$$\dot{y}=\dot{x}_1-\dot{x}_2=x_1+0{,}5x_2-3u\,,$$

$$\ddot{y}=\dot{x}_1+0{,}5\dot{x}_2-3\dot{u}=-2x_1-x_2-3\dot{u}\,,$$

de unde rezultă

$$2\ddot{y}+\dot{y}=-6\dot{u}-3u\,.$$

Sistemul obținut are funcția de transfer

$$G(s)=\frac{-6s-3}{2s^2+s}=\frac{-3}{s}\,.$$

Prin urmare, sistemul dat este echivalent intrare-ieşire cu sistemul de tip I-E pur integral

$$\dot{y}=-3u\ ,$$

respectiv cu sistemul de tip I-S-E

$$\begin{cases} \dot{x}_1=u \\ y=-3x_1 \end{cases} .$$

♦ **Aplicația 4.13.** Să se afle parametrul m astfel încât sistemul discret

$$y(t)+(m+1)y(t-1)+y(t-2)=u(t)+u(t-1)$$

să fie echivalent intrare-ieşire cu un sistem de ordinul unu.

Soluție. Sistemul are funcția de transfer

$$G(z)=\frac{1+z^{-1}}{1+(m+1)z^{-1}+z^{-2}}=\frac{z(z+1)}{z^2+(m+1)z+1}\ .$$

Funcția de transfer se simplifică prin $z+1$ pentru $m=1$:

$$G(z)=\frac{z}{z+1}=\frac{1}{1+z^{-1}}\ .$$

In acest caz, sistemul dat este echivalent I-E cu sistemul de ordinul unu

$$y(t)+y(t-1)=u(t)\ .$$

♦ **Aplicația 4.14.** Pentru ce valori ale parametrului real m, sistemul discret

$$4y(t)+y(t-1)+my(t-2)=2u(t)+u(t-1)$$

este neminimal.

Soluție. Sistemul are funcția de transfer

$$G(z)=\frac{2+z^{-1}}{4+z^{-1}+mz^{-2}}=\frac{z(2z+1)}{4z^2+z+m}\ .$$

Aceasta se simplifică atunci când una dintre rădăcinile $z_1=0$ şi $z_2=-1/2$ ale polinomului de la numărător este şi rădăcină a polinomului de la numitor. Rezultă imediat că sistemul nu este minimal pentru $m=0$ şi $m=-1/2$. Pentru $m=0$, avem

$$G(z)=\frac{2z+1}{4z+1}=\frac{2+z^{-1}}{4+z^{-1}}\ ,$$

iar pentru $m=-1/2$, avem

$$G(z)=\frac{2z(2z+1)}{8z^2+2z-1}=\frac{2z(2z+1)}{(2z+1)(4z-1)}=\frac{2z}{4z-1}=\frac{2}{4-z^{-1}}\ .$$

In primul caz, sistemul dat este echivalent I-E cu sistemul de ordinul unu

$$4y(t)+y(t-1)=2u(t)+u(t-1)\ ,$$

iar în al doilea caz, cu sistemul de ordinul unu

$$4y(t)-y(t-1)=2u(t) .$$

4.4. DISCRETIZAREA SISTEMELOR CONTINUE DE TIP I-E

Sistemele discrete, atât cele fizice cât şi cele abstracte, sunt sisteme concepute şi construite de om. Sistemele discrete abstracte apar fie ca sisteme de sine stătătoare, fie ca rezultat al discretizării unor sisteme (procese) continue, în vederea simulării sau conducerii lor numerice.

Două variabile, una de timp continuu ($t \in \mathbf{R}$) şi cealaltă de timp discret ($t=kT$, $k \in \mathbf{Z}$), se numesc *T-echivalente* dacă au aceleaşi valori la toate momentele de timp $t_k = kT$. Atunci când variabila de timp continuu $u(t)$ este de tip „*T-scară*”, adică este constantă pe fiecare interval de timp $[t_k , t_{k+1}]$,

$$u(t)=u(t_k) , \quad t \in [t_k , t_{k+1}]$$

echivalenţa este de *ordinul zero*. Dacă $u(t)$ este de tip „*T-rampă*” (continuă pe $\mathbf{R}$ şi liniară pe fiecare interval T), atunci echivalenţa este de ordinul unu ş.a.m.d.

Prin definiţie, un sistem discret Σ^0 reprezintă *discretizatul intrare-ieşire de ordinul zero* şi cu perioada T al unui sistem continuu Σ dacă pentru orice intrări T-echivalente de ordinul zero, ieşirile forţate ale celor două sisteme sunt T-echivalente.

Discretizatul I-E se mai numeşte *echivalentul discret intrare-ieşire*. Deoarece funcţiile treaptă unitară $1(t)$ şi $1^0(t)$ sunt T-echivalente de ordinul zero (cu $T=1$), rezultă că răspunsul indicial al unui sistem continuu şi răspunsul indicial al discretizatului acestuia de ordinul zero sunt funcţii T-echivalente.

Discretizatul Σ^0 se obţine fizic prin conectarea unui convertor discret-analogic $C_{D\text{-}A}$ la intrarea sistemului continuu Σ şi a unui convertor analog-discret $C_{A\text{-}D}$ la ieşirea lui Σ (fig.4.10). Primul convertor transformă, prin extrapolare de ordinul zero, semnalul de timp discret U^0 în semnalul de timp continuu de tip T-scară U , iar al doilea convertor transformă semnalul de timp continuu Y în semnalul de timp discret Y^0, cu perioada T .

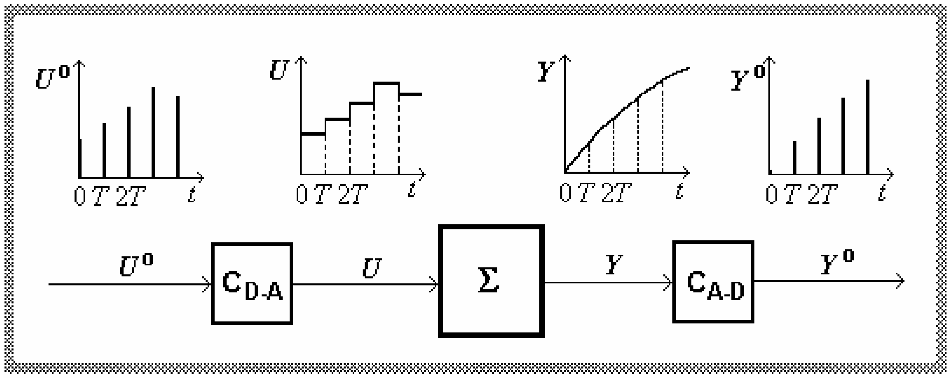


Fig. 4.10. *Schema discretizatului* Σ^0 *al sistemului continuu* Σ.

Pentru obținerea discretizatului intrare-ieşire de ordinul zero al sistemului continuu

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_r u^{(r)} + b_{r-1} u^{(r-1)} + \cdots + b_1 \dot{u} + b_0 u\,, \quad a_n \neq 0$$

se procedează astfel:

a) se determină *funcție de transfer* a sistemului continuu

$$G_c(s) = \frac{b_r s^r + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0}\,;$$

b) se calculează funcția de transfer a discretizatului, cu relația

$$G_d(z) = (1 - z^{-1}) \sum_{s_i} rez \frac{G(s)}{s(1 - \mathrm{e}^{Ts} z^{-1})}\,, \tag{36}$$

unde s_i sunt polii funcției $G(s)/s$, iar T este perioada de discretizare (eşantionare) [1];

c) se aduce $G_d(z)$ la forma

$$G_d(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_r z^{-r}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}} \tag{37}$$

şi se scrie apoi ecuația discretizatului I-E, sub forma primară standard:

$$y_k + a_1 y_{k-1} + \cdots + a_n y_{k-n} = b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + \cdots + b_r u_{k-r}\,. \tag{38}$$

---

[1] Reziduul funcției $F(s)$ relativ la polul simplu p este dat de relația

$$rez\, F(s)\Big|_{s=p} = [(s-p)F(s)]\Big|_{s=p}\,.$$

Dacă polul p are ordinul de multiplicitate m, atunci

$$rez\, F(s)\Big|_{s=p} = \frac{1}{(m-1)!}[(s-p)^m F(s)]^{(m-1)}\Big|_{s=p}\,.$$

Observații. **1°.** Pentru obținerea unui discretizat aproximativ al sistemului continuu, funcția de ieşire $y(t)$ se înlocuieşte cu y_{k-1}, funcția de intrare $u(t)$ cu u_{k-1}, derivata $\dot{y}(t)$ cu diferența $(y_k - y_{k-1})/T$, derivata $\dot{u}(t)$ cu diferența $(u_k - u_{k-1})/T$, derivata $\ddot{y}(t)$ cu diferența

$$(\dot{y}_k - \dot{y}_{k-1})/T = [(y_k - y_{k-1})/T - (y_{k-1} - y_{k-2})/T]/T = (y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2})/T^2,$$

etc.

2°. Datorită formei recursive a ecuației intrare-ieşire, discretizatul Σ^0 poate fi utilizat în calculul numeric al răspunsului sistemului continuu Σ. In acest scop, perioada de discretizare T se alege suficient de mică, iar intrarea de timp discret u_k a discretizatului se alege T-echivalentă cu intrarea $u(t)$ a sistemului continuu, adică $u_k = u(kT)$. Dacă $u(t)$ este de tip T-scară, atunci răspunsurile celor două sisteme vor fi T-echivalente.

■ In Matlab, modelul I-E al discretizatului de ordinul zero se obține din modelul I-E al sistemului continuu, cu funcția

- stfd = **c2d**(stf,T);

unde T reprezintă perioada de discretizare.

♦ **Aplicația 4.15.** Să se afle discretizatul sistemului continuu de avans-întârziere

$$T_1\dot{y} + y = K(\tau_1\dot{u} + u),$$

unde K este factorul de proportionalitate, T_1 - constanta de timp de întârziere, iar τ_1 - constanta de timp de avans.

Soluție. Sistemul continuu are funcția de transfer

$$G(s) = \frac{K(\tau_1 s + 1)}{T_1 s + 1}.$$

Calculăm funcția de transfer a sistemului discret, astfel:

$$G_d(z) = (1 - z^{-1})[\underset{s=0}{rez}\frac{G(s)}{s(1-\mathrm{e}^{Ts}z^{-1})} + \underset{s=-1/T_1}{rez}\frac{G(s)}{s(1-\mathrm{e}^{Ts}z^{-1})}] =$$

$$= K(1 - z^{-1})[\frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{\tau_1/T_1 - 1}{1 - \mathrm{e}^{-T/T_1}z^{-1}}],$$

adică

$$G_d(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}},$$

unde

$$a_1 = -\mathrm{e}^{-T/T_1}, \quad b_0 = K\frac{\tau_1}{T_1}, \quad b_1 = K(1 - \tau_1/T_1 - e^{-T/T_1}).$$

In consecință, discretizatul are modelul intrare-ieşire

$$y_k + a_1 y_{k-1} = b_0 u_k + b_1 u_{k-1} .$$

In cazul particular $\tau_1 = 0$, obținem discretizatul sistemului continuu de întârziere de ordinul unu

$$T_1 \frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d} t} + y = Ku ,$$

sub forma

$$y_k + a_1 y_{k-1} = K(1+a_1) u_{k-1} .$$

Prin înlocuirea mărimilor $\dot{y}$, y, $\dot{u}$ şi u din ecuația sistemului continuu respectiv cu

$$(y_k - y_{k-1})/T \ , \quad y_{k-1} \ , \quad (u_k - u_{k-1})/T \ , \quad u_{k-1} ,$$

obținem discretizatul aproximativ, tot sub forma $y_k + a_1 y_{k-1} = b_0 u_k + b_1 u_{k-1}$, unde

$$a_1 = \frac{T}{T_1} - 1 \ , \quad b_0 = K \frac{\tau_1}{T_1} \ , \quad b_1 = K \frac{T - \tau_1}{T_1} \ .$$

♦ **Aplicația 4.16.** Să se discretizeze sistemul de ordinul unu cu timp mort

$$T_1 \dot{y}(t) + y(t) = Ku(t - \tau) .$$

Soluție. In cazul $\tau = 0$, discretizatul are ecuația

$$y_k + a_1 y_{k-1} = K(1+a_1) u_{k-1} ,$$

unde $a_1 = -\mathrm{e}^{-T/T_1}$ (v. aplicația precedentă). In cazul $\tau = mT$, $m \in \mathbf{N}$, discretizatul are ecuația

$$y_k + a_1 y_{k-1} = K(1+a_1) u_{k-m-1} .$$

5

METODA OPERATIONALA LAPLACE

Acest capitol este axat în principal pe analiza de tip *intrare-ieşire* (I-E) a sistemelor liniare continue (netede) cu ajutorul formalismului operațional Laplace. In plus, sunt abordate şi analizate unele caracteristici structurale ale sistemelor din perspectiva teoriei moderne, care are la bază formalismul de tip intrare-stare-ieşire (I-S-E).

Caracteristica principală a metodei operaționale Laplace este *forma simplă* de descriere matematică a corelației dinamice între intrarea şi ieşirea unui sistem liniar. Anticipând, modelul operațional dinamic al sistemului va avea o formă similară celei a modelului staționar, la care ieşirea y se obține prin multiplicarea intrării u cu un factor constant de proporționalitate K:

$$y=Ku$$

O asemenea formă simplă a modelului operațional dinamic are consecințe pozitive în analiza şi sinteza sistemelor compuse (de tip serie, paralel, cu reacție, mixte). Simplificarea formalismului matematic se realizează însă cu prețul *creşterii gradului de abstractizare*. Aceasta presupune, în primul rând, trecerea de la studiul sistemelor în domeniul timpului la studiul în domeniul complex şi, în particular, în domeniul frecvenței.

Metoda operațională Laplace are ca punct de plecare forma relativ simplă a relației (modelului) de convoluție, care exprimă răspunsul unui sistem liniar continuu la o intrare dată $u(t)$ de tip original (nulă pentru $t<0$), atunci când se cunoaşte funcția pondere a sistemului (răspunsul la impuls Dirac) $g(t)$:

$$y(t)=\int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau=g(t)*u(t).$$

Rezultatul $y(t)$ al operației de convoluție $g(t)*u(t)$ depinde de întreaga evoluție a semnalului de intrare u şi a răspunsului pondere g pe intervalul $[0,t]$. In acest mod, valoarea curentă a ieşirii $y(t)$ cumulează toate efectele produse de semnalul de intrare u la momentele de timp din intervalul $[0,t]$. Relația de convoluție evidențiază faptul că funcția pondere $g(t)$ conține toate caracteristicile dinamice ale sistemului din perspectiva corelației intrare-ieşire.

In cadrul metodei operaționale Laplace, relația de convoluție $y=g*u$ va căpăta forma algebrică

$$Y(s)=G(s)\cdot U(s),$$

unde s este variabila complexă Laplace, iar $Y(s)$, $G(s)$ şi $U(s)$ sunt transformatele Laplace ale funcțiilor $y(t)$, $g(t)$ şi $u(t)$. Modelul operațional este deci un model abstract (în domeniul complex), dar care exprimă, într-o formă algebrică simplă, faptul că ieşirea complexă $Y(s)$ este produsul dintre funcția complexă $G(s)$ asociată caracteristicilor dinamice ale sistemului şi intrarea complexă $U(s)$.

5.1. TRANSFORMAREA LAPLACE

Variabilele de intrare, de stare şi de ieşire ale sistemelor liniare continue, aflate în regim staționar pentru $t<0$, sunt funcții de timp de tip *original*, care admit transformate Laplace. O funcție original $f(t)$ este nulă pentru $t<0$, este continuă şi derivabilă pe porțiuni şi are rata de creştere cel mult exponențială, adică există $A>0$ şi $B>0$ astfel încât

$$|f(t)|\le A\mathrm{e}^{Bt}.$$

Pentru a fi satisfăcută prima proprietate, considerăm că variabilele sistemului fizic reprezintă variațiile mărimilor fizice respective față de valorile lor inițiale (la momentul $t_0=0_-$, sau chiar la toate momentele din intervalul $(-\infty,0)$ - dacă sistemul este în regim staționar pentru $t<0$). In cazul sistemelor fizice liniare, răspunsul stare $X(t)$ şi răspunsul ieşire $Y(t)$ la orice funcție original de intrare sunt răspunsuri forțate de tip original.

Transformata Laplace sau *imaginea Laplace* a funcției original $f(t)$ este dată de relația

$$F(s)\overset{\Delta}{=}\mathcal{L}[f(t)]=\int_{0-}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\,dt,\qquad s\in\mathbf{C}.$$

Pentru ca integrala să fie convergentă, partea reală $\alpha = Re\, s$ a variabilei complexe $s = \alpha + j\omega$ este considerată ca fiind suficient de mare. In mod natural, s-a ales limita inferioară a integralei ca fiind 0_-, pentru a include în rezultatul transformării şi efectul funcţiilor original generalizate (de tip distribuţii), aşa cum este funcţia impuls Dirac $\delta_0(t)$.

In continuare, prezentăm câteva *proprietăţi uzuale* ale transformării Laplace:

- proprietatea de liniaritate

$$\mathcal{L}[k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)] = k_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + k_2 \mathcal{L}[f_2(t)], \tag{1}$$

valabilă oricare ar fi funcţiile original f_1, f_2 şi constantele reale k_1, k_2;

- proprietatea de derivare (integrare) în domeniul real[1]

$$\mathcal{L}[f^{(k)}(t)] = s^k F(s), \quad k \in \mathbf{Z}; \tag{2}$$

- proprietatea de derivare în domeniul complex

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -F'(s); \tag{3}$$

- proprietatea de translaţie în complex

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s+a), \quad a \in \mathbf{C}; \tag{4}$$

- proprietatea de translaţie în real

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-\tau s} F(s); \tag{5}$$

- proprietatea de scalare în real

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0; \tag{6}$$

- proprietatea valorii finale

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s) \tag{7}$$

(valabilă numai în condiţiile în care toţi polii funcţiei $sF(s)$ au partea reală negativă, deci sunt situaţi în stânga axei imaginare);

- proprietatea valorii iniţiale

[1] In relaţia (2), derivata $f^{(k)}(t)$ este considerată funcţie tip *distribuţie*, fiind definită inclusiv în punctele de discontinuitate ale functiei *f*(*t*). Astfel, prima derivată a funcţiei $f(t) = \mathrm{e}^{-at} \cdot 1(t)$ este distribuţia $f'(t) = \delta_0(t) - a\mathrm{e}^{-at} \cdot 1(t)$, unde $\delta_0(t)$ este funcţia impuls unitar Dirac.

$$\lim_{t \to 0+} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s) \tag{8}$$

(valabilă atunci când limita din dreapta există şi este finită);

- proprietatea produsului de convoluție

$$\mathcal{L}[\int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau] = G(s)U(s)\,. \tag{9}$$

Transformarea Laplace inversă este operația de obținere a funcției original $f(t)$ din imaginea Laplace $F(s)$. Transformata Laplace inversă a imaginii $F(s)$ este dată de relația

$$f(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty} F(s)\mathrm{e}^{ts}\, ds\,, \tag{10}$$

în care integrala se calculează de-a lungul dreptei cu abcisa constantă σ suficient de mică pentru a asigura convergența integralei. In majoritatea aplicațiilor, pentru determinarea transformatei Laplace inverse se utilizează metoda descompunerii imaginii $F(s)$ în fracții simple, pentru care se cunosc transformatele Laplace inverse (funcțiile original).

Dintre transformatele Laplace mai frecvent utilizate, menționăm următoarele:

$$\mathcal{L}[\delta_0(t)] = 1\,, \quad \mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}\,, \quad \mathcal{L}[t \cdot 1(t)] = \frac{1}{s^2}\,, \quad \mathcal{L}[t^k \cdot 1(t)] = \frac{k!}{s^{k+1}}\,,$$

$$\mathcal{L}[\mathrm{e}^{-at} \cdot 1(t)] = \frac{1}{s+a}\,, \quad \mathcal{L}[t\,\mathrm{e}^{-at} \cdot 1(t)] = \frac{1}{(s+a)^2}\,,$$

$$\mathcal{L}[\mathrm{e}^{-at} \cos bt \cdot 1(t)] = \frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}\,, \quad \mathcal{L}[\mathrm{e}^{-at} \sin bt \cdot 1(t)] = \frac{b}{(s+a)^2 + b^2}\,,$$

$$\mathcal{L}[\cos bt \cdot 1(t)] = \frac{s}{s^2 + b^2}\,, \quad \mathcal{L}[\sin bt \cdot 1(t)] = \frac{b}{s^2 + b^2}\,.$$

5.2. FUNCTIA DE TRANSFER

Prin definiție, *funcția de transfer a unui sistem liniar continuu şi monovariabil este transformata Laplace* $G(s)$ *a funcției pondere* $g(t)$ *a sistemului*. Din relația de convoluție

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

care exprimă răspunsul forţat $y(t)$ al sistemului la o intrare arbitrară de tip original $u(t)$, ţinând seama de proprietatea produsului de convoluţie (9), se obţine relaţia operaţională intrare-ieşire

$$Y(s)=G(s)U(s), \tag{11}$$

unde $U(s)$ este transformata Laplace a funcţiei de intrare $u(t)$, iar $Y(s)$ este transformata Laplace a funcţiei de ieşire $y(t)$.

Teorema funcţiei de transfer. *Funcţia de transfer a unui sistem liniar continuu este egală cu raportul dintre transformata Laplace a răspunsului sistemului la o funcţie de intrare de tip original dată şi transformata Laplace a funcţiei de intrare*, adică

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}.$$

Relaţia (11) reprezintă *modelul operaţional dinamic* al sistemului. Acest model are forma similară modelului staţionar

$$y=Ku,$$

unde K reprezintă factorul static de proporţionalitate al sistemului (factorul static de amplificare). Modelul operaţional dinamic are o formă simplă, dar abstractă, deoarece nu operează direct cu mărimile fizice ale sistemului, ci cu transformatele Laplace ale acestora, care sunt funcţii de tip complex.

Să considerăm acum forma primară a modelului de tip I-E al unui sistem liniar continuu monovariabil:

$$a_n y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1 y'+a_0 y=b_r u^{(r)}+b_{r-1}u^{(r-1)}+\cdots+b_1 u'+b_0 u\,,\quad a_n\neq 0\,.$$

Aplicând transformarea Laplace ambilor membri ai ecuaţiei diferenţiale a sistemului şi ţinând seama de proprietatea de liniaritate şi de proprietatea derivării în domeniul real, obţinem forma primară a funcţiei de transfer

$$G(s)=\frac{b_r s^r+b_{r-1}s^{r-1}+\ldots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0}. \tag{12}$$

care are la numitor chiar *polinomul caracteristic* al sistemului.

La sistemele proprii (fizic realizabile), polinomul de la numărătorul funcţiei de transfer are gradul mai mic sau cel mult egal cu gradul polinomului de la numitorul funcţiei de transfer $(r\leq n)$.

In ecuația diferențială de tip I-E a sistemului, dacă a_0 şi b_0 sunt coeficienți adimensionali, atunci toți coeficienții a_i şi b_i sunt, din punct de vedere dimensional, constante de timp la puterea i. Prin urmare, putem considera că variabila s din expresia funcției de transfer $G(s)$ are, formal, dimensiunea inversului timpului.

Prin definiție, *ordinul funcției de transfer* este egal cu gradul numitorului funcției de transfer simplificate (aduse la forma ireductibilă), adică este egal cu numărul total de poli sau cu gradul *polinomului polilor funcției de transfer*. In consecință, dacă polinoamele de la numărător şi numitor sunt coprime (nu au rădăcini comune), atunci $G(s)$ are ordinul n. Diferența $n-r$ dintre gradul polinoamelor de la numitorul şi numărătorul funcției de transfer reprezintă *ordinul relativ al funcției de transfer* sau *excesul poli-zerouri*.

Un sistem se numeşte de *fază minimă* atunci cînd funcția de transfer este proprie ($r \le n$) şi nu are zerouri (rădăcini ale numărătorului funcției de transfer simplificate) cu partea reală pozitivă, adică situate în semiplanul din dreapta axei imaginare.

La sistemele de tip *proporțional*, caracterizate prin $a_0 \ne 0$ şi $b_0 \ne 0$, avem

$$G(0)=\frac{b_0}{a_0}=K\,.$$

Prin urmare, $G(0)$ este factorul static de proporționalitate al sistemului.

La sistemele de tip *integral*, caracterizate prin $a_0=0$ şi $b_0 \ne 0$, funcția de transfer $G(s)$ are pe s factor comun la numitor, deci are cel puțin un pol în origine. La sistemele de tip *derivativ*, caracterizate prin $a_0 \ne 0$ şi $b_0=0$, funcția de transfer $G(s)$ are pe s factor comun la numărător, deci are cel puțin un zerou în origine.

Regulatoarele continue de tip PID, cu ecuația idealizată

$$c=K_R(\varepsilon+\frac{1}{T_i}\int_0^t \varepsilon \mathrm{d}t+T_d\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t})+c_0\,,$$

au funcția de transfer

$$G_R(s)=K_R(1+\frac{1}{T_i s}+T_d s)\,. \tag{13}$$

Această funcție de transfer este improprie (are gradul numărătorului mai mare decât cel al numitorului) datorită componentei derivative. In realitate, funcția de transfer a regulatorului are forma semiproprie

$$G_R(s)=K_R(1+\frac{1}{T_i s}+\frac{T_d s}{\tau_d s+1}), \tag{14}$$

unde τ_d este constanta de timp de întârziere a componentei derivative (de regulă, cu valoarea mult mai mică decât cea a constantei de timp derivative T_d).

Funcția de transfer $G(s)$ a unui sistem poate fi scrisă şi sub forma

$$G(s)=\frac{K}{s^q}\cdot\frac{b(s)}{p(s)}, \quad q\in\mathbf{Z} \tag{15}$$

unde K este *factorul de proporționalitate* al sistemului, q reprezintă ordinul integral, iar $b(s)$ şi $p(s)$ sunt polinoame cu termenul liber unitar, deci cu proprietatea $b(0)=p(0)=1$. După cum $q=0$, $q>0$ sau $q<0$, sistemul este respectiv de tip *proporțional*, de tip *integral* sau de tip *derivativ*.

Observații. 1°. Relația $Y(s)=G(s)U(s)$ permite confirmarea imediată a *teoremei de echivalență intrare-ieşire*: Două sisteme liniare continue sunt echivalente I-E (au acelaşi răspuns la orice intrare de tip original comună) dacă şi numai dacă funcțiile de transfer ale sistemelor sunt egale (sunt reductibile la aceeaşi formă, deci au aceleaşi valori pentru orice $s\in\mathbf{C}$ din domeniul comun de definiție).

2°. Din relația operațională intrare-ieşire $Y(s)=G(s)U(s)$, rezultă că transformata Laplace $H(s)$ a *răspunsului indicial* $h(t)$ al sistemului (la intrare treaptă unitară) are expresia

$$H(s)=\frac{G(s)}{s}.$$

Din $G(s)=sH(s)$, regăsim relația de legătură între funcția indicială $h(t)$ şi funcția pondere $g(t)$, anume $g(t)=\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}=h'(t)+h(0_+)\delta_0(t)$.

Din *proprietatea valorii inițiale* rezultă

$$h(0_+)=\lim_{s\to\infty} sH(s)=\lim_{s\to\infty} G(s)=\frac{b_n}{a_n}, \tag{16}$$

iar dacă $b_n=0$ (sistemul este strict propriu), atunci

$$h'(0_+)=\lim_{s\to\infty} s^2H(s)=\lim_{s\to\infty} sG(s)=\frac{b_{n-1}}{a_n}. \tag{17}$$

Prin urmare, un sistem semipropriu ($b_n\neq 0$) are răspunsul indicial $h(t)$ discontinuu în origine, un sistem strict propriu cu excesul poli-zerouri egal cu unu ($b_n=0$ şi

$b_{n-1} \neq 0$) are răspunsul indicial $h(t)$ continuu şi nederivabil în origine, iar un sistem strict propriu cu excesul poli-zerouri egal cu doi ($b_n = 0$ şi $b_{n-1} = 0$) are răspunsul indicial $h(t)$ continuu şi derivabil în origine (tangent la axa timpului).

In cazul unui sistem semipropriu, avem

$$h'(0+) = \frac{b_{n-1}}{a_n} - \frac{a_{n-1}b_n}{a_n^2} .$$

Această relație poate fi dedusă din proprietatea valorii inițiale, pe baza observației că sistemul strict propriu cu funcția de transfer $G_1(s)=G(s)-\frac{b_n}{a_n}$ are funcția indicială $h_1(t)=h(t)-\frac{b_n}{a_n}\cdot 1(t)$, cu proprietatea $h_1'(0+) = h'(0+)$. Prin urmare,

$$h'(0+) = h_1'(0+) = \lim_{s\to\infty} s^2 H_1(s) = \lim_{s\to\infty} sG_1(s) = \frac{b_{n-1}}{a_n} - \frac{a_{n-1}b_n}{a_n^2} .$$

3°. Dacă răspunsul indicial $h(t)$ al unui sistem tinde la o valoare finită, aceasta este egală cu factorul static de proporționalitate al sistemului, conform relației

$$\lim_{t\to\infty} h(t)=G(0)=\frac{b_0}{a_0}=K . \qquad (18)$$

Relația (18) rezultă imediat din *proprietatea valorii finale*, astfel:

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{s\to 0} sH(s) = \lim_{s\to 0} G(s) = G(0) .$$

Mai putem obține relația (18) pe baza observației că la un sistem caracterizat printr-un răspuns indicial $h(t)$ care tinde spre o valoare finită, deosebim două regimuri staționare: unul trivial, pe intervalul $(-\infty, 0)$, şi unul final, la încheierea regimului tranzitoriu (teoretic, pentru $t \to \infty$). In cazul celui de-al doilea regim staționar, din ecuația modelului staționar, $y = Ku$, rezultă

$$y(\infty)=Ku(\infty)=K .$$

Prin urmare, la sistemele de tip proporțional (cu factorul static de proporționalitate finit şi nenul), răspunsul indicial $h(t)$ tinde la o valoare finită şi nenulă, în timp ce la sistemele de tip derivativ (cu factorul static de proporționalitate egal cu zero), răspunsul indicial $h(t)$ tinde la valoarea zero.

4°. La sistemele caracterizate printr-un răspuns indicial $h(t)$ care tinde la o valoare finită, definim *factorul* (*raportul*) *de magnitudine* f_m ca fiind raportul dintre valoarea inițială şi valoarea finală a răspunsului indicial, adică

$$f_m = \frac{h(0+)}{h(\infty)}.$$

Din (16) şi (18) rezultă

$$f_m = \frac{G(\infty)}{G(0)} = \frac{a_0 b_n}{b_0 a_n}. \tag{19}$$

Regulatorul pur proporțional, cu funcția de transfer $G_R(s)=K_R$, are factorul de magnitudine egal cu 1, iar regulatorul de tip proporțional-derivativ, cu funcția de transfer

$$G_R(s)=K_R(1+\frac{T_d s}{\tau_d s+1}),$$

are factorul de magnitudine $f_m=1+\dfrac{T_d}{\tau_d}$. In general, un factor de magnitudine mai mic (care, uzual, nu trebuie să depăşească valoarea 20) asigură un semnal de comandă mai neted (mai puțin agresiv), o amplificare mai mică a zgomotului, o uzură mai redusă a instalației comandate, un consum mai mic de energie şi combustibil. In cazul regulatorului cu componentă derivativă improprie (cu $\tau_d=0$), factorul de magnitudine are valoarea ∞.

5.3. MATRICEA DE TRANSFER

In conformitate cu principiul superpoziției, pentru un *sistem liniar multivariabil* cu m intrări şi p ieşiri, dependența ieşirii $Y_i(s)$ în raport cu intrările $U_1(s)$, $U_2(s)$, … , $U_m(s)$, este dată de relația

$$Y_i(s)=G_{i1}(s)U_1(s)+G_{i2}(s)U_2(s)+\cdots+G_{im}(s)U_m(s),$$

unde $G_{ij}(s)$ este funcția de transfer a canalului cu intrarea U_j şi ieşirea Y_i. Relațiile pot fi scrise pentru toate ieşirile sub forma matriceală

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1m} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{p1} & G_{p2} & \cdots & G_{pm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_m \end{bmatrix},$$

echivalentă cu

$$Y(s) = \boldsymbol{G}(s)U(s),$$

unde

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1m} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{p1} & G_{p2} & \cdots & G_{pm} \end{bmatrix}$$

reprezintă *matricea de transfer* a sistemului (de tipul $p \times m$). Relația $Y(s) = \boldsymbol{G}(s)U(s)$ exprimă faptul că în complex, vectorul Y al mărimilor de ieşire este egal cu produsul dintre matricea de transfer $\boldsymbol{G}$ a sistemului şi vectorul U al mărimilor de intrare. Intre intrarea $U_j(s)$ şi ieşirea $Y_i(s)$ există relația operațională

$$Y_i(s) = G_{ij}(s)U_j(s).$$

In cazul sistemelor proprii, matricea de transfer $\boldsymbol{G}(s)$ poate fi reprezentată şi sub forma

$$\boldsymbol{G}(s) = \frac{\boldsymbol{K}_n s^n + \boldsymbol{K}_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \boldsymbol{K}_1 s + \boldsymbol{K}_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}, \tag{20}$$

unde $\boldsymbol{K}_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$ sunt matrice constante de tipul $p \times m$, iar polinomul de la numitorul matricei de transfer este cel mai mic multiplu comun al polinoamelor de la numitorul tuturor funcțiilor de transfer $G_{ij}(s)$. Dacă toate funcțiilor de transfer $G_{ij}(s)$ sunt ireductibile (minimale), atunci polinomul de la numitor este chiar *polinomul polilor matricei de transfer*. Gradul polinomului polilor este egal cu numărul total al polilor matricei de transfer, şi reprezintă *ordinul matricei de transfer*.

Fie $\Sigma(A,B,C,D)$ un sistem liniar, continuu şi cu parametri constanţi, monovariabil sau multivariabil. Aplicând transformarea Laplace ecuaţiilor de stare şi de ieşire

$$\begin{cases} \dot{X}(t)=AX(t)+BU(t) \\ Y(t)=CX(t)+DU(t) \end{cases},$$

obţinem

$$\begin{cases} X(s)=(s\mathrm{I}-A)^{-1}BU(s) \\ Y(s)=CX(s)+DU(s) \end{cases}.$$

Mai departe, înlocuind vectorul de stare $X(s)$ din ecuaţia stării în ecuaţia ieşirii, rezultă matricea de transfer a sistemului (de tipul $p\times m$), sub forma

$$\boldsymbol{G}(s)=C(s\mathrm{I}-A)^{-1}B+D\ . \tag{21}$$

Funcţia matriceală

$$\boldsymbol{\Phi}(s)=(s\mathrm{I}-A)^{-1}, \tag{22}$$

de tipul $n\times n$, reprezintă transformata Laplace a matricei fundamentale (de tranziţie a stării) $\Phi(t)=\mathrm{e}^{At}\cdot 1(t)$. Intr-adevăr, aplicând transformarea Laplace relaţiei

$$\Phi'(t)=A\Phi(t)+\Phi(0+)\delta_0(t),$$

unde $\Phi(0+)=\mathrm{I}$, obţinem

$$s\boldsymbol{\Phi}(s)=A\boldsymbol{\Phi}(s)+\mathrm{I},\quad (s\mathrm{I}-A)\boldsymbol{\Phi}(s)=\mathrm{I},\quad \boldsymbol{\Phi}(s)=(s\mathrm{I}-A)^{-1}.$$

Aşadar, în afara metodelor în domeniul timpului (metoda diagonalizării şi metoda Sylvester), exponenţiala matriceală e^{At} poate fi calculată şi cu relaţia

$$\mathrm{e}^{At}=\mathcal{L}^{-1}[(s\mathrm{I}-A)^{-1}]. \tag{23}$$

Matricea fundamentală $\boldsymbol{\Phi}(s)$ este o funcţie matriceală pătrată, raţională, strict proprie. Ea poate fi scrisă sub forma

$$\boldsymbol{\Phi}(s)=\frac{\boldsymbol{E}(s)}{\mathcal{P}(s)}\ , \tag{24}$$

unde $\mathcal{P}(s)=\det(s\mathrm{I}-A)$ este *polinomul caracteristic*, iar $\boldsymbol{E}(s)$ - matricea de inversare asociată matricei $s\mathrm{I}-A$. Elementele $E_{ij}(s)$ ale matricei pătrate $E(s)$ sunt polinoame cu gradul mai mic sau egal cu $n-1$. Matricea fundamentală $\boldsymbol{\Phi}(s)$ poate fi adusă la forma ireductibilã

$$\boldsymbol{\Phi}(s) = \frac{\boldsymbol{F}(s)}{\mu(s)} \ , \tag{25}$$

unde $\mu(s)$ reprezintă *polinomul polilor matricei fundamentale* (cu gradul mai mic sau egal cu n). Dacă toate cele n^2 polinoame $E_{ij}(s)$ şi polinomul caracteristic $\mathcal{P}(s)$ au cel puțin o rădăcină comună, atunci gradul polinomului polilor matricei fundamentale $\mu(s)$ este mai mic decât gradul n al polinomului caracteristic.

Din *forma primară* a matricei de transfer a sistemului

$$\boldsymbol{G}(s) = C(s\mathrm{I} - A)^{-1}B + D = \frac{C\boldsymbol{E}(s)B}{\mathcal{P}(s)} + D \,,$$

rezultă că aceasta este o funcție matriceală rațională *proprie* (strict proprie în cazul $D=0$). Matricea de transfer poate fi adusă la forma ireductibilă

$$\boldsymbol{G}(s) = \frac{\boldsymbol{K}(s)}{P(s)} \ , \tag{26}$$

unde $\boldsymbol{K}(s)$ este o funcție polinomială matriceală de tipul $p \times m$, iar $P(s)$ este *polinomul polilor matricei de transfer* (cu gradul mai mic sau egal cu n). Gradul polinomului polilor $P(s)$ reprezintă *ordinul matricei de transfer*. Dacă toate cele $m \cdot p$ polinoame ale matricei $C\boldsymbol{E}(s)B$ şi polinomul caracteristic $\mathcal{P}(s)$ au cel puțin o rădăcină comună, atunci gradul polinomului polilor matricei de transfer $P(s)$ este mai mic decât gradul n al polinomului caracteristic $\mathcal{P}(s)$. In cazul contrar, polinomul polilor coincide cu polinomul caracteristic, deci polii sistemului sunt chiar valorile proprii ale matricei A.

Observații. **1°.** Gradele polinomului caracteristic $\mathcal{P}(s)$, polinomului polilor matricei fundamentale $\mu(s)$ şi polinomului polilor matricei de transfer $P(s)$ sunt ordonate astfel:

$$gr\,\mathcal{P}(s) \geq gr\,\mu(s) \geq gr\,P(s) \ . \tag{27}$$

Aşadar, ordinul matricei de transfer a sistemului $\Sigma(A,B,C,D)$ este mai mic sau egal cu dimensiunea n a sistemului .

2°. Din relația $Y(s)=\boldsymbol{G}(s)U(s)$, rezultă că două sisteme cu funcțiile sau matricele de transfer egale au acelaşi răspuns forțat la orice intrare comună de tip original, deci sunt echivalente intrare-ieşire. Acest rezultat constituie o extindere a *teoremei de echivalență intrare-ieşire* la sistemele multivariabile:

Două sisteme liniare continue sunt echivalente intrare-ieşire dacă şi numai dacă au matricele de transfer egale.

Deoarece sistemele echivalente I-S-E sunt şi echivalente I-E, rezultă că *două sisteme echivalente* I-S-E *au aceeaşi matrice de transfer*. Acest rezultat poate fi obţinut şi direct, pe baza teoremei de echivalenţă I-S-E. Astfel, dacă sistemele $\Sigma(A,B,C,D)$ şi $\overline{\Sigma}(\overline{A},\overline{B},\overline{C},\overline{D})$ sunt echivalente I-S-E, atunci:

$$\overline{G}(s)=\overline{C}(s\mathrm{I}-\overline{A})^{-1}\overline{B}+\overline{D}=CS(s\mathrm{I}-S^{-1}AS)^{-1}S^{-1}B+D=$$

$$=C[S(s\mathrm{I}-S^{-1}AS)S^{-1}]^{-1}B+D=C(s\mathrm{I}-A)^{-1}B+D=G(s)\,.$$

Două sisteme cu aceeaşi matrice (funcţie) de transfer nu sunt însă, în mod necesar, echivalente I-S-E (de exemplu, în cazul sistemelor de ordin diferit).

■ In **MATLAB**, sistemul cu funcţia de transfer (12) se construieşte cu funcţia *tf*, care are ca argumente de intrare vectorii linie

$$num=[b_n\ b_{n-1}\cdots b_1\ b_0]\ \text{şi}\ \ den=[a_n\ a_{n-1}\cdots a_1\ a_0]\,,$$

formaţi cu coeficienţii de la numărătorul şi respectiv numitorul funcţiei de transfer :

$$\mathrm{stf}=\mathbf{tf}(\mathrm{num,den})\,.$$

In cazul $r<n$, vectorul *num* poate fi scris şi sub forma $num=[b_r\ b_{r-1}\cdots b_1\ b_0]$.

Alt mod de a introduce o funcţie de transfer este acela de a defini variabila Laplace astfel

s=**tf**('s');

şi de a scrie apoi funcţia de transfer ca o expresie raţională de variabila s. De exemplu, sistemul *stf* cu funcţia de transfer $G(s)=\dfrac{3s+1}{5s^2+4s+2}$ se construieşte astfel:

```
s=tf('s'); stf=(3*s+1)/(5*s^2+4*s+2);
```

In cazul sistemelor multivariabile, construcţia se face prin concatenarea subsistemelor monovariabile. De exemplu, sistemul *stf* cu matricea de transfer

$$G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{s+1}{s^2+s+2} & \dfrac{2s+1}{s^2+3s}\\ \dfrac{5s+1}{s+2} & \dfrac{1}{s^2+2}\end{bmatrix},$$

se construieşte astfel:

```
s11=tf([1 1], [1 1 2]);
s12=tf([2 1], [1 3 0]);
s21=tf([5 1], [1 2]);
```

```
s22=tf(1, [1 0 2]);
stf=[s11 s12;s21 s22];
```

sau

```
s=tf('s ');
s11=(s+1)/(s^2+s+2);
s12=(2s+1)/(s^2+3*s);
s21=(5s+1)/(s+2);
s22=1/(s^2+2);
stf=[s11 s12;s21 s22];
```

De asemenea, sistemul multivariabil poate fi construit prin crearea a două mulțimi de vectori linie asociați numărătorilor şi numitorilor funcțiilor de transfer din componența matricei de transfer:

```
Num={[1 1] [2 1];[5 1] 1};
Den={[1 1 2] [1 3 0];[1 2] [1 0 2}};
stf=tf(Num,Den);
```

Sistemul de ordinul zero *stf*0 cu matricea de transfer $G(s)=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ poate fi construit astfel:

```
stf0=tf([1 2;3 4]);
```

Cu comanda

```
s1=stf(i,j);
```

din sistemul multivariabil stf se extrage subsistemul $s1$ cu funcția de transfer $G_{ij}(s)$.

Sistemul cu reacție negativă *srn* având pe calea directă subsistemul *stf* şi pe calea de reacție subsistemul *stf*1 se construieşte astfel:

srn=**feedback**(stf,stf1);

Sistemul *stf* de tip I-E poate fi transformat în sistemul *sis* de tip I-S-E, astfel:

sis=**ss**(stf);

Invers, sistemul *sis* de tip I-S-E poate fi transformat în sistemul *stf* de tip I-E, astfel:

stf=**tf**(sis);

5.4. FUNCTIA DE TRANSFER A SISTEMELOR COMPUSE

Cele mai întâlnite sisteme compuse elementare sunt conexiunile *serie*, *paralel* şi *cu reacție*.

In cazul *conexiunii serie* din figura 4.1, notăm cu G_1, G_2 şi G respectiv funcțiile de transfer ale subsistemelor Σ_1, Σ_2 şi sistemului compus Σ. Din

$$Y(s) = G_2(s)V(s)$$

şi

$$V(s) = G_1(s)U(s),$$

rezultă $Y(s) = G_2(s)G_1(s)U(s)$, deci $G(s) = G_2(s)G_1(s)$.

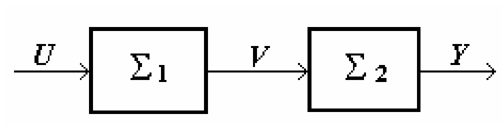


Fig. 4.1. *Conexiune serie.*

In general, *funcţia de transfer a unei conexiuni serie de* n *subsisteme este egală cu produsul funcţiilor de transfer ale subsistemelor componente*, adică:

$$G = G_1 G_2 \cdots G_n \tag{57}$$

Toţi polii conexiunii serie sunt poli ai subsistemelor componente. In plus, dacă toate funcţiile de transfer G_i şi produsul acestora $G_1 G_2 \cdots G_n$ sunt funcţii raţionale ireductibile, atunci ordinul funcţiei de transfer a conexiunii serie este egal cu suma ordinelor funcţiilor de transfer ale subsistemelor componente. De asemenea,

La conectarea în serie a sistemelor *multivariabile* trebuie îndeplinită condiţia ca numărul de ieşiri ale unui subsistem să fie egal cu numărul de intrări ale subsistemului următor. Matricea de transfer a conexiunii este egală cu produsul matricelor de transfer ale subsistemelor componente, *în ordinea inversă*, adică

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}_n \boldsymbol{G}_{n-1} \cdots \boldsymbol{G}_1 . \tag{58}$$

In cazul *conexiunii paralel* din figura 4.2, avem

$$Y(s) = V_1(s) + V_2(s) = G_1 U(s) + G_2 U(s) = (G_1 + G_2)U(s)$$

deci $G = G_1 + G_2$. In general, *funcţia de transfer a unei conexiuni paralel de* n *subsisteme este egală cu suma algebrică a funcţiilor de transfer ale subsistemelor componente*, adică

$$G = G_1 + G_2 + \cdots + G_n . \tag{59}$$

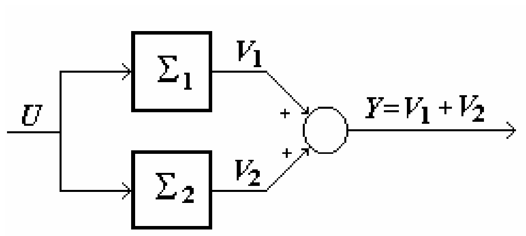


Fig. 4.2. *Conexiune paralel*.

Ca şi în cazul conexiunii serie, toți polii conexiunii serie sunt poli ai subsistemelor componente. In plus, dacă funcțiile de transfer $G_1, G_2, \cdots, G_n$ n-au niciun pol comun, atunci ordinul funcției de transfer a conexiunii este egal cu suma ordinelor funcțiilor de transfer ale subsistemelor componente.

Sistemele *multivariabile* pot fi conectate în paralel numai dacă au acelaşi număr de intrări m şi acelaşi număr de ieşiri p. Matricea de transfer a conexiunii este egală cu suma algebrică a matricelor de transfer ale elementelor componente – relația (59).

In cazul *conexiunii cu reacție negativă* din figura 4.3, notând cu G_1 şi G_2 funcțiile de transfer ale subsistemelor Σ_1 şi Σ_2, avem

$$Y = G_1 E = G_1(U - V) = G_1(U - G_2 Y),$$

deci $Y = G_1 U/(1 + G_1 G_2)$. Prin urmare, funcția de transfer a sistemului cu intrarea U şi ieşirea Y este

$$G = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2}. \tag{60}$$

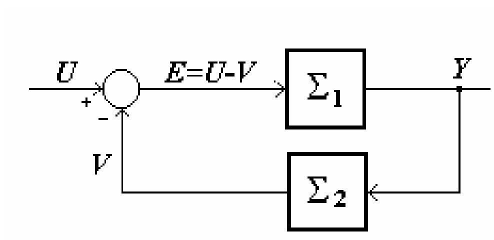


Fig. 4.3. *Conexiune cu reacție.*

Dacă produsul $G_1(s)G_2(s)$ este o funcție rațională ireductibilă, atunci toți polii conexiunii închise (cu reacție) sunt diferiți de polii subsistemelor componente, iar ordinul funcției de transfer a conexiunii este egal cu suma ordinelor funcțiilor de transfer ale subsistemelor componente.

Să considerăm acum sistemul de reglare automată după eroare (abatere) din figura 4.4, având ca mărimi de intrare referința R şi perturbația V (aditivă la ieşirea procesului).

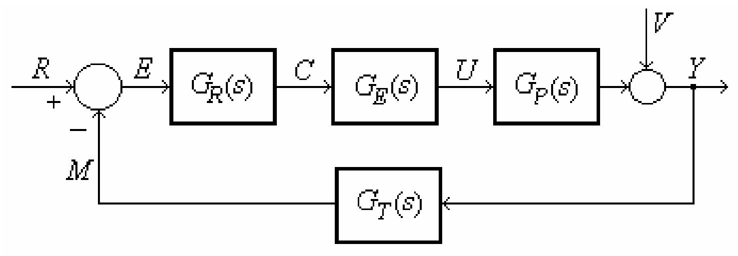


Fig. 4.4. *Sistem de reglare automată*.

Din relațiile

$$Y(s) = G_P U(s) + V(s)\,, \quad U(s) = G_E C(s)\,,$$

$$C(s) = G_R E(s) = G_R[R(s) - M(s)], \quad M(s) = G_T Y(s)\,,$$

rezultă

$$Y(s) = G_{YR} R(s) + G_{YV} V(s)\ , \quad E(s) = G_{ER} R(s) + G_{EV} V(s)\,, \tag{61}$$

unde

$$G_{YR} = \frac{G_R G_E G_P}{1 + G_d}, \quad G_{YV} = \frac{1}{1 + G_d}\,, \tag{62}$$

$$G_{ER} = \frac{1}{1 + G_d}, \quad G_{EV} = \frac{-G_T}{1 + G_d}, \tag{63}$$

cu

$$G_d = G_R G_E G_P G_T\,. \tag{64}$$

Formula funcției de transfer a unui canal intrare-ieşire al sistemului de reglare poate fi stabilită după următoarea *regulă*:

- *numărătorul* este produsul funcțiilor de transfer ale elementelor (canalelor) de pe traseul direct intrare-ieşire;
- *numitorul* este suma $1 + G_d(s)$, unde $G_d(s)$ reprezintă funcția de transfer a sistemului *deschis* (a conexiunii serie cu intrarea R şi ieşirea M, obținută prin întreruperea buclei închise, după traductor).

Sistemul de reglare are *ecuația polilor*

$$1 + G_R G_E G_P G_T = 0\,. \tag{65}$$

Observații. 1°. Perturbația V şi referința R sunt mărimi de intrare aditive la mărimea de intrare a traductorului, respectiv la mărimea de intrare a regulatorului. Similar, putem considera câte un semnal aditiv la intrarea fiecăruia din cele patru elemente ale sistemului de reglare. In consecință, putem asocia sistemului de reglare un număr de 16 funcții de transfer care pot fi calculate pe baza regulei stabilite anterior. Sistemul de reglare poate fi atunci considerat un sistem multivariabil, cu 4 intrări (reprezentate de semnalele aditive aplicate la intrările celor patru subsisteme) şi 4 ieşiri (reprezentate de ieşirile însumate ale celor patru subsisteme). Aceste considerații sunt utile în analiza stabilității stării sistemului de reglare.

2°. La sistemele de reglare automată *multivariabile*, vectorul referință R, vectorul ieşire Y, vectorul perturbație V, vectorul măsură M şi vectorul eroare E au, de regulă, aceeaşi dimensiune. Sistemul de reglare are matricele de transfer:

$$\boldsymbol{G}_{YR} = (\mathrm{I} + \boldsymbol{G}_P\boldsymbol{G}_E\boldsymbol{G}_R\boldsymbol{G}_T)^{-1}\boldsymbol{G}_P\boldsymbol{G}_E\boldsymbol{G}_R\,, \qquad \boldsymbol{G}_{YV} = (\mathrm{I} + \boldsymbol{G}_P\boldsymbol{G}_E\boldsymbol{G}_R\boldsymbol{G}_T)^{-1}\,, \tag{66}$$

$$\boldsymbol{G}_{ER} = (\mathrm{I} + \boldsymbol{G}_T\boldsymbol{G}_P\boldsymbol{G}_E\boldsymbol{G}_R)^{-1}\,, \qquad \boldsymbol{G}_{EV} = -(\mathrm{I} + \boldsymbol{G}_T\boldsymbol{G}_P\boldsymbol{G}_E\boldsymbol{G}_R)^{-1}\boldsymbol{G}_T\,. \tag{67}$$

■ In **MATLAB**, pentru realizarea conexiunilor *serie*, *paralel* şi *cu reacție* se utilizează funcțiile:

s = **series**(sis1,sis2) ;
p = **parallel**(sis1,sis2) ;
f = **feedback**(sis1,sis2,sign);

sau operatorii "+", "*" şi "/":

```
s=sis1*sis2*sis3;
p=sis1+sis2+sis3;
f=sis1/(1+sis1*sis2);
```

5.5. CALCULUL RASPUNSULUI SISTEMELOR COMPUSE

Metoda operațională Laplace permite determinarea pe cale algebrică a *răspunsului forțat* al unui sistem liniar continuu, simplu sau compus, la funcții de intrare analitice de tip original, atunci când se cunosc ecuațiile fiecărui subsistem.

Calculul analitic al răspunsului unui sistem compus la o funcție de intrare dată (tip impuls, treaptă, rampă, sinusoidal etc.) se face după următoarea metodologie:

- se determină transformata Laplace $U(s)$ a funcției de intrare $u(t)$;
- se determină funcțiile de transfer ale subsistemelor componente;

• se calculează funcţia de transfer $G(s)$ a sistemului compus, corespunză-toare intrării U şi ieşirii Y;

• se calculează transformata Laplace $Y(s)$ a răspunsului sistemului, cu relaţia

$$Y(s)=G(s)U(s);$$

• se calculează răspunsul sistemului $y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$, prin metoda dezvoltării funcţiei $Y(s)$ în fracţii simple.

Calculul funcţiei pondere $g(t)$, al funcţiei indiciale $h(t)$ şi al răspunsului $h_1(t)$ la intrare rampă unitară, se face cu relaţiile

$$g(t)=\mathcal{L}^{-1}[G(s)], \quad h(t)=\mathcal{L}^{-1}[\frac{G(s)}{s}], \quad h_1(t)=\mathcal{L}^{-1}[\frac{G(s)}{s^2}]. \tag{68}$$

Valoarea iniţială a răspunsului indicial este dată de realaţia

$$h(0+)=G(\infty).$$

Dacă $G(s)$ are toţi polii situaţi în stânga axei imaginare, atunci răspunsul indicial are valoarea finală

$$h(\infty)=G(0).$$

Pe baza acestor relaţii putem construi calitativ graficul răspunsului indicial al sistemelor de ordinul unu direct din funcţia de transfer, fără a mai efectua calcului analitic al acestuia. In general, răspunsul indicial $h(t)$ satisface un număr de condiţii iniţiale nule egal cu excesul poli-zerouri al funcţiei de transfer $G(s)$. Prima condiţie iniţială nenulă a răspunsului indicial este egală cu raportul dintre coeficienţii termenilor de grad maxim de la numărătorul şi numitorul funcţiei de transfer $G(s)$. Astfel, dacă $G(s)$ este strict proprie ($b_n=0$), atunci $h(0+)=0$, $h'(0+)=\frac{b_{n-1}}{a_n}$ şi $h(\infty)=G(0)$.

La sistemelor *multivariabile*, pentru aflarea răspunsului $y_i(t)$ la intrarea $u_j(t)$ dată, se calculează funcţia de transfer $G_{ij}(s)$, se determină $Y_i(s)$ cu relaţia $Y_i(s)=G_{ij}(s)U_j(t)$, iar în final se efectuează transformarea inversă Laplace, $y_i(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y_i(s)]$.

5.6. CALCULUL RASPUNSULUI SISTEMELOR ELEMENTARE

In cele ce urmează vor fi calculate, interpretate şi analizate răspunsurile sistemelor elementare de tip pur integral, de întârziere de ordinul unu, de avans-întârzere de ordinul unu, derivativ de ordinul unu, de întârziere de ordinul doi, derivativ de ordinul doi şi de avans-întârziere de ordinul doi.

5.6.1. Răspunsul în timp al sistemului pur integral

Sistemul pur integral (integrator) de ordinul unu, cu factorul de amplificare K şi constanta de timp integrală T_i, are modelul I-E de forma

$$T_i \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Ku \tag{69}$$

şi funcţia de transfer

$$G(s) = \frac{K}{T_i s}\,. \tag{70}$$

Sistemul are *funcţia pondere*

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[\frac{K}{T_i s}] = \frac{K}{T_i}\,,$$

funcţia indicială

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[\frac{K}{T_i s^2}] = \frac{Kt}{T_i}$$

şi răspunsul la intrare rampă unitară, $u = t \cdot 1(t)$,

$$h_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[\frac{K}{T_i s^3}] = \frac{Kt^2}{2T_i}\,.$$

Se observă că sistemul pur integral de ordinul unu are funcţia pondere sub formă de treaptă, funcţia indicială sub formă de rampă şi răspunsul la intrare rampă unitară sub formă parabolică (fig. 4.5).

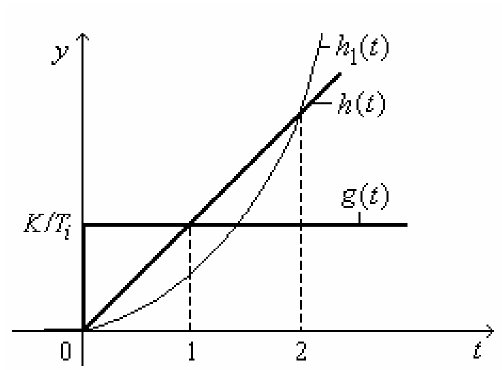


Fig. 4.5. *Răspunsul sistemului pur integral de ordinul unu.*

Sistemul pur integral de ordinul q ($q \geq 1$), cu factorul de amplificare K şi constanta de timp integrală T_i, are modelul I-E de forma

$$T_i^q y^{(q)} = Ku$$

şi funcţia de transfer

$$G(s) = \frac{K}{(T_i s)^q} .$$

5.6.2. Răspunsul în timp al sistemului de întârziere de ordinul unu

Sistemele liniare de întârziere de ordinul unu au ecuaţia

$$T_1 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = Ku , \quad T_1 > 0 \tag{71}$$

şi funcţia de transfer

$$G(s) = \frac{K}{T_1 s + 1} , \tag{72}$$

unde K este factorul static de proporţionalitate, iar T_1 - constanta de timp.

Funcţia indicială $h(t)$ are urm[toarele proprietăţi: $h(0+) = G(\infty) = 0$, $h'(0+) = \lim\limits_{s\to\infty} sG(s) = \frac{K}{T_1}$ şi $h(\infty) = G(0) = K$ (fig. 4.6). Funcţia pondere, funcţia indicială şi răspunsul la intrare rampă unitară se calculează astfel:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[\frac{K}{T_1 s + 1}] = \frac{K}{T_1} \cdot \mathrm{e}^{-t/T_1} ,$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[\frac{K}{s(T_1 s + 1)}] = K\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s} - \frac{T_1}{T_1 s + 1}] = K(1 - \mathrm{e}^{-t/T_1}) ,$$

$$h_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[\frac{K}{s^2(T_1 s+1)}] = K\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^2} - \frac{T_1}{s} + \frac{T_1^2}{T_1 s+1}] = KT_1[\frac{t}{T_1} - (1 - \mathrm{e}^{-t/T_1})] .$$

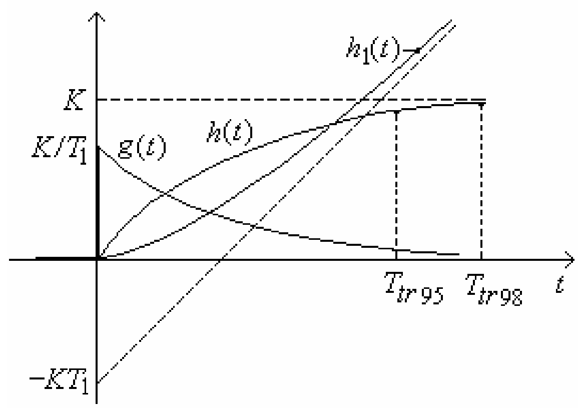


Fig. 4.6. *Răspunsul sistemului de întârziere de ordinul unu*.

Funcția indicială $h(t)$ tinde simplu exponențial şi concav spre valoarea finală K, atingând valorile $0{,}95K$ şi $0{,}98K$ respectiv la momentele de timp $T_{tr95} \cong 3T_1$ şi $T_{tr98} \cong 4T_1$. Mărimile T_{tr95} şi T_{tr98} caracterizează *durata regimului tranzitoriu* (timpul de răspuns) şi permit o *interpretare geometrică* simplă a constantei de timp T_1. Altă interpretare geometrică a constantei de timp T_1 este ilustrată în figura 4.7, în care segmentul AC este tangent la exponențiala $h(t)$ în punctul A, situat arbitrar pe exponențială. In cazul $T_1 < 0$, răspunsul sistemului la orice tip de intrare nenulă este nemărginit (sistemul este instabil).

Pentru intrarea sinusoidală de tip original $u = \sin \omega t$, rezultă

$$Y(s) = \frac{\omega K}{(s^2+\omega^2)(T_1 s+1)} = \frac{K}{1+\omega^2 T_1^2}(\frac{\omega T_1^2}{T_1 s+1} + \frac{\omega - \omega T_1 s}{s^2+\omega^2}),$$

deci

$$y(t) = \frac{K}{1+\omega^2 T_1^2}(\omega T_1 \mathrm{e}^{-t/T_1} + \sin \omega t - \omega T_1 \cos \omega t),$$

sau

$$y(t) = M(\omega)[\mathrm{e}^{-t/T_1} \sin \alpha + \sin(\omega t - \alpha)],$$

unde

$$M(\omega)=\frac{K}{\sqrt{1+\omega^2T_1^2}}\ ,\quad tg\alpha=\omega T_1,\ \alpha\in(0\,,\frac{\pi}{2})\,.$$

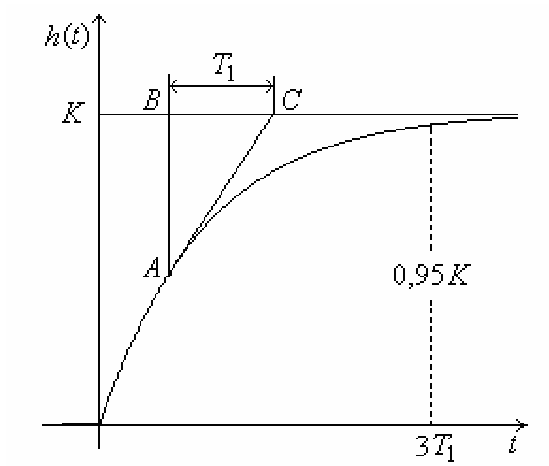


Fig. 4.7. *Interpretări geometrice ale constantei de timp* T_1.

In regim sinusoidal permanent (după eliminarea componentei tranzitorii de tip exponențial), răspunsul sistemului are expresia

$$y_p(t)=M(\omega)\sin(\omega t-\alpha)\,.$$

Sistemul are modelul staționar $y=Ku$.

5.6.3. Răspunsul în timp al sistemului derivativ de ordinul unu

Sistemul derivativ de ordinul unu are ecuația

$$T_1\dot{y}+y=K\tau_1\dot{u}\ ,\quad T_1>0 \tag{73}$$

şi funcția de transfer

$$G(s)=\frac{K\tau_1 s}{T_1 s+1}\,, \tag{74}$$

unde K este factorul de proporționalitate, τ_1 constanta de timp derivativă şi T_1 constanta de timp de întârziere.

Funcția indicială $h(t)$ are următoarele proprietăți: $h(0+)=G(\infty)=K\frac{\tau_1}{T_1}$ şi $h(\infty)=G(0)=0$ (fig. 4.8). Sistemul are *funcția pondere*

$$g(t)=\mathcal{L}^{-1}[\frac{K\tau_1 s)}{T_1 s+1}]=\frac{K\tau_1}{T_1}\mathcal{L}^{-1}[1-\frac{1}{T_1 s+1}]=\frac{K\tau_1}{T_1}[\delta_0(t)-\frac{1}{T_1}\mathrm{e}^{-t/T_1}],$$

şi *funcţia indicială*

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[\frac{K\tau_1}{T_1 s + 1}] = \frac{K\tau_1}{T_1} e^{-t/T_1} \quad .$$

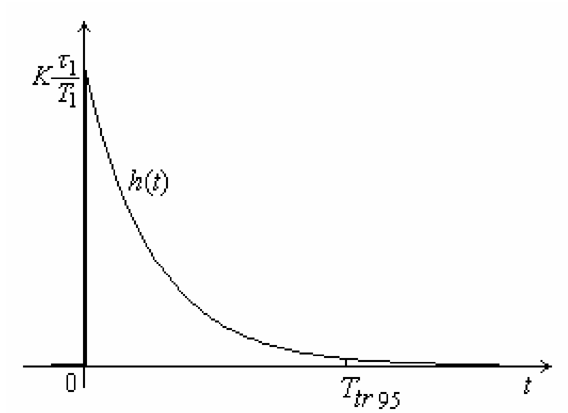


Fig. 4.8. *Răspunsul indicial al sistemului derivativ de ordinul unu.*

Sistemul derivativ de ordinul unu este frecvent utilizat în generarea semnalelor de comandă cu caracter anticipativ, deoarece răspunsul indicial este de tip „impuls”, cu valoarea iniţială $K\frac{\tau_1}{T_1}$ şi valoarea finală zero. Timpul de răspuns, în care $h(t)$ realizează o variaţie de 95 % din valoarea iniţială (exponenţiala e^{-t/T_1} scade de la valoarea iniţială 1 la valoarea $e^{-3} \cong 0{,}05$), este $T_{tr95} \cong 3T_1$.

Scriind funcţia de transfer sub forma

$$G(s) = \frac{K\tau_1}{T_1}(1 - \frac{1}{T_1 s + 1}),$$

rezultă că sistemul derivativ de ordinul unu poate fi obţinut prin conectarea paralel-opusă a unui sistem de tip static şi a unui sistem de întârziere de ordinul unu, ambele având acelaşi factor static de proporţionalitate.

5.6.4. Răspunsul în timp al sistemului de avans-întârziere de ordinul unu

Sistemul de avans-întârziere de ordinul unu are ecuaţia

$$T_1\dot{y} + y = K(\tau_1\dot{u} + u), \quad T_1 > 0 \tag{75}$$

şi funcţia de transfer

$$G(s) = \frac{K(\tau_1 s + 1)}{T_1 s + 1}\,, \tag{76}$$

unde K este factorul static de proporționalitate, T_1 - constanta de timp de întârziere, iar τ_1 - constanta de timp de avans. Efectul de întârziere este dominant în cazul $T_1 > \tau_1 > 0$, iar efectul de avans este dominant în cazul $T_1 < \tau_1$.

Funcția indicială $h(t)$ are următoarele proprietăți (fig. 4.9):

$$h(0+) = G(\infty) = K\frac{\tau_1}{T_1}$$

şi

$$h(\infty) = G(0) = K\,.$$

Funcția pondere, funcția indicială şi răspunsul la intrare rampă unitară se calculează astfel:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[\frac{K(\tau_1 s + 1)}{T_1 s + 1}] = \frac{K}{T_1}\mathcal{L}^{-1}[\tau_1 + \frac{T_1 - \tau_1}{T_1 s + 1}] = \frac{K}{T_1}[T_1\delta_0(t) + (1 - \frac{\tau_1}{T_1})\mathrm{e}^{-t/T_1}]\ ,$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[\frac{K(\tau_1 s + 1)}{s(T_1 s + 1)}] = K\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s} - \frac{T_1 - \tau_1}{T_1 s + 1}] = K[1 - (1 - \frac{\tau_1}{T_1})\mathrm{e}^{-t/T_1}]\ ,$$

$$h_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[\frac{K(\tau_1 s + 1)}{s^2(T_1 s + 1)}] = K\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^2} - \frac{T_1 - \tau_1}{s} + \frac{T_1(T_1 - \tau_1)}{T_1 s + 1}] =$$

$$= KT_1[\frac{t}{T_1} - (1 - \frac{\tau_1}{T_1})(1 - e^{-t/T_1})]\ .$$

Sistemul de avans de ordinul unu (cu $\tau_1 > T_1$) este frecvent utilizat în generarea semnalelor de comandă cu caracter anticipativ, deoarece răspunsul indicial are o valoare inițială de $\frac{\tau_1}{T_1}$ ori mai mare decât valoarea finală. Raportul $m = \frac{\tau_1}{T_1}$ dintre valoarea inițială (maximă) şi cea finală a răspunsului indicial se numeşte *factor de magnitudine*. Timpul de răspuns (în care exponențiala e^{-t/T_1} scade de la valoarea inițială 1 la valoarea $\mathrm{e}^{-3} \cong 0{,}05$) este $T_{tr95} \cong 3T_1$.

In cazul $\tau_1 < 0$ (cu zerou pozitiv), sistemul nu este de fază minimă. Din $h(0+) = K\tau_1 / T_1 < 0$ şi $h(\infty) = K$, rezultă că răspunsul indicial are la început o variație bruscă de sens opus față de valoarea finală.

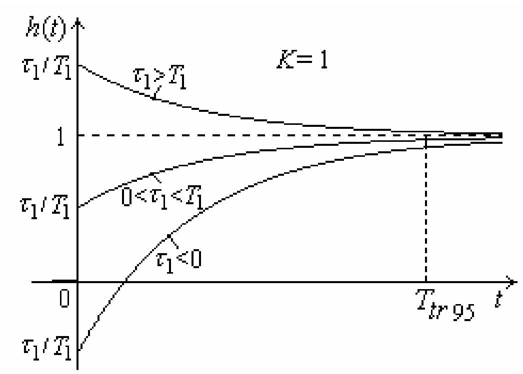


Fig. 4.9. *Răspunsul indicial al sistemului de avans-întârziere de ordinul unu*.

Scriind funcţia de transfer sub forma

$$G(s)=K[\,1+\frac{(\tau_1-T_1)s}{T_1s+1}\,],$$

rezultă că sistemul de avans-întârziere de ordinul unu (cu $\tau_1>T_1$) poate fi obţinut prin conectarea paralel-opusă a două sisteme, unul de tip static şi celălalt de tip derivativ de ordinul unu. Scriind funcţia de transfer sub forma

$$G(s)=K(\frac{\tau_1}{T_1}-\frac{\tau_1/T_1-1}{T_1s+1}),$$

rezultă că sistemul de avans-întârziere de ordinul unu poate fi obţinut prin conectarea paralel-opusă a unui sistem de tip static şi a unui sistem de întârziere de ordinul unu.

5.6.5. Răspunsul în timp al sistemului de întârziere de ordinul doi

Sistemul de întârziere de ordinul doi are ecuaţia diferenţială

$$T_1^2\ddot{y}+2\xi T_1\dot{y}+y=Ku\,,\quad T_1>0 \tag{77}$$

şi funcţia de transfer

$$G(s)=\frac{K}{T_1^2s^2+2\xi T_1s+1}, \tag{78}$$

unde ξ reprezintă *factorul de amortizare*. Considerând factorul static de proporţionalitate $K=1$ şi înlocuind *constanta de timp* T_1 cu $1/\omega_n$, unde $\omega_n>0$ este *pulsaţia naturală*, ecuaţia diferenţială şi funcţia de transfer devin astfel:

$$\ddot{y} + 2\xi\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = u\,, \quad T_1 > 0 \tag{79}$$

respectiv

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}\,. \tag{80}$$

Deoarece excesul poli-zerouri este egal cu doi, funcția indicială $h(t)$ este continuă în origine şi tangentă la axa timpului, adică $h(0+) = h'(0+) = 0$. In plus, dacă $\xi > 0$, atunci $h(\infty) = G(0) = 1$. Ecuația diferențială a sistemului poate fi scrisă şi sub forma

$$T_2^2\ddot{y} + T_1\dot{y} + y = Ku\,, \quad T_1, T_2 > 0\,,$$

unde T_1 şi T_2 sunt constante de timp.

Cazul $0 < \xi < 1$ (*regim oscilant amortizat*). Pentru intrare treaptă unitară, transformata Laplace a răspunsului sistemului este

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\xi\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{s} - \frac{(s + \xi\omega_n) + \xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,)^2}\,.$$

Cu notațiile

$$\omega_1 = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,, \qquad \xi = \cos\alpha\,, \;\; \alpha \in (0\,, \frac{\pi}{2})\,,$$

răspunsul indicial are expresia

$$y(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t}(\cos\omega_1 t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_1 t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\cdot\sin(\omega_1 t + \alpha)\,, \tag{81}$$

fiind de tip *oscilant amortizat* (fig. 4.10), cu pulsația $\omega_1 < \omega_n$.

Prin anularea derivatei răspunsului indicial

$$\dot{y}(t) = \frac{\omega_n^2}{\omega_1}\cdot e^{-\xi\omega_n t}\sin\omega_1 t\,,$$

se obțin momentele de extrem

$$t_k = \frac{k\pi}{\omega_1}\,, \quad k \in \mathbf{N}\,,$$

şi valorile de extrem

$$y(t_k) = 1 - (-1)^k\, e^{-\xi\omega_n t_k} = 1 - (-1)^k\, e^{-k\pi\,\mathrm{ctg}\,\alpha}\,,$$

din care reiese că punctele de extrem sunt situate pe exponențialele $f_{1,2}(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\xi\omega_n t}$.

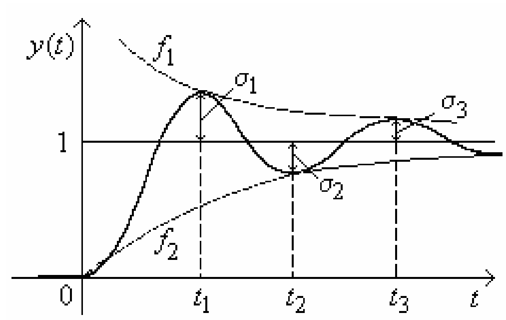


Fig. 4.10. *Răspunsul indicial al sistemului de întârziere de ordinul doi*, *pentru* 0<ξ<1.

Valoarea σ_k a "pulsului *k*" este

$$\sigma_k = y(t_k) - 1 = (-1)^{k+1} \mathrm{e}^{-k\,\pi \mathrm{ctg}\,\alpha} = (-1)^{k+1} \sigma_1^k \ .$$

Pulsul maxim

$$\sigma_1 = \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{ctg}\,\alpha} = \mathrm{e}^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}, \tag{82}$$

se numeşte *suprareglaj* sau *supradepăşire*, iar

$$\delta = 1 - \frac{\sigma_3}{\sigma_1} = 1 - \sigma_1^2 \,.$$

reprezintă *gradul de amortizare* a oscilațiilor (fig. 4.11).

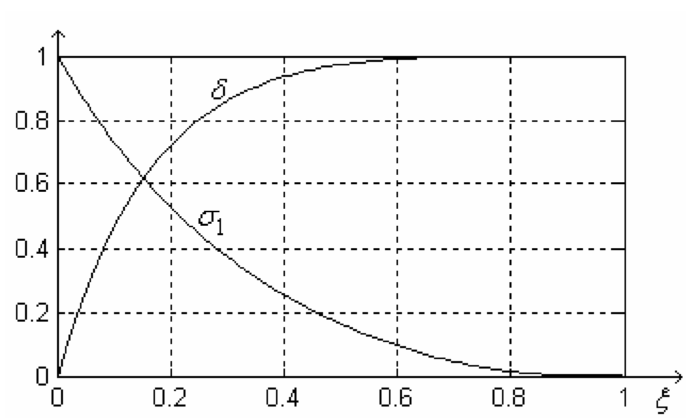


Fig. 4.11. *Dependența de* ξ a *suprareglajului* σ_1 *şi a gradului de amortizare* δ .

Cazul $\xi = 0$ (*regim oscilant întreținut*). Sistemul are răspunsul indicial

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[\frac{\omega_n^2}{s(s^2+\omega_n^2)}] = \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+\omega_n^2}] = 1 - \cos\omega_n t \,.$$

Răspunsul indicial este sinusoidal, cu amplitudinea constantă (egală cu 1) şi cu pulsația egală cu pulsația naturală ω_n (fig. 4.12).

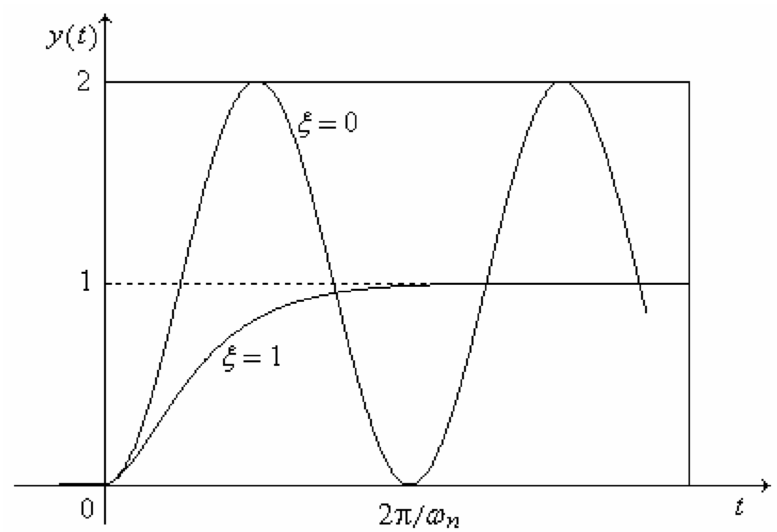


Fig. 4.12. *Răspunsul indicial al sistemului de întârziere de ordinul doi, pentru* $\xi = 0$ *şi* $\xi = 1$.

Aplicând la intrare semnalul armonic $u = \cos\omega_n t$ cu pulsația ω_n, se obține răspunsul

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[\frac{\omega_n^2 s}{(s^2+\omega_n^2)^2}] = \frac{1}{2}\omega_n t \sin\omega_n t \,,$$

caracterizat prin oscilații sinusoidale cu amplitudine liniar crescătoare în timp.

Cazul $\xi = 1$ (*regim critic*). Sistemul are răspunsul indicial

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[\frac{\omega_n^2}{s(s+\omega_n)^2}] = \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\omega_n} - \frac{\omega_n}{(s+\omega_n)^2}] = 1 - \mathrm{e}^{-\omega_n t}(1+\omega_n t) \,.$$

Răspunsul indicial este *strict crescător* pentru $t \geq 0$ (fig. 4.12).

Cazul $\xi > 1$ (*regim supraamortizat*). Funcția de transfer a sistemului poate fi scrisă sub forma

$$G(s)=\frac{1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}\ ,\quad T_1>T_2>0\,, \tag{83}$$

care evidențiază faptul că sistemul de ordinul doi supraamortizat poate fi descompus în două subsisteme de întârziere de ordinul unu conectate în serie. Intre parametrii formelor de reprezentare a funcției de transfer (80) şi (83), există următoarele relații:

$$T_{1,2}=\frac{\xi\pm\sqrt{\xi^2-1}}{\omega_n}\ ,\quad \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}=\xi+\sqrt{\xi^2-1}\ ,\quad \omega_n=\frac{1}{\sqrt{T_1T_2}}\ ,\quad \xi=\frac{T_1+T_2}{2\sqrt{T_1T_2}}\ .$$

Sistemul are răspunsul indicial

$$y(t)=1-\frac{1}{1-x}\mathrm{e}^{-t/T_1}+\frac{x}{1-x}\mathrm{e}^{-t/T_2}\ , \tag{84}$$

unde $x=T_2/T_1<1$. Ca şi în cazul $\xi=1$, răspunsul indicial este *strict crescător* pentru $t\geq 0$ - fig. 4.13.

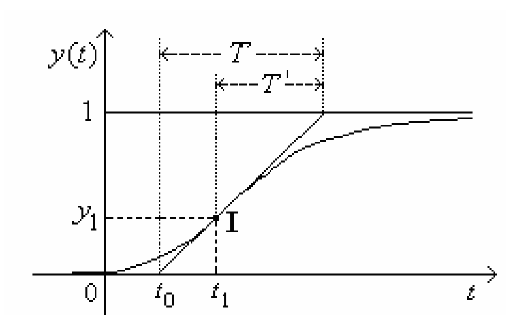


Fig. 4.13. *Răspunsul indicial al sistemului de întârziere de ordinul doi, pentru* $\xi>1$.

Cazul $-1<\xi<0$ (*regim oscilant instabil*). Răspunsul indicial al sistemului este dat de relațiile (81), în care $\alpha\in(\pi/2,\pi)$. Răspunsul indicial se caracterizează prin oscilații exponențial crescătoare (fig. 4.16).

Cazul $\xi<-1$ (*regim supraamortizat instabil*). Funcția de transfer poate fi scrisă sub forma

$$G(s)=\frac{1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}\ ,\quad T_1<T_2<0\,.$$

Răspunsul indicial este dat de relația (84), este strict *crescător* şi *nemărginit* (fig. 4.14).

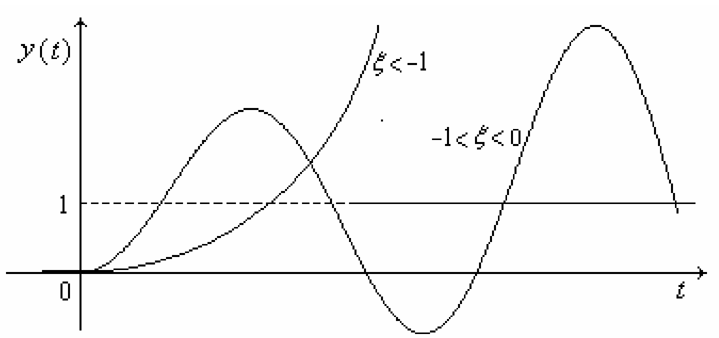


Fig. 4.14. *Răspunsul indicial al sistemului de întârziere de ordinul doi pentru* $\xi < 0$.

5.7. APLICATII

♦ **Aplicația 5.1**. Fie sistemul monovariabil $\Sigma(A,B,C,D)$ cu

$$A=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C=[1 \quad 2], \quad D=0 \ .$$

Să se afle:

a) transformata Laplace a matricei fundamentale şi funcția de transfer;

b) funcția pondere şi funcția indicială.

Soluție. a) Avem

$$\det(s\mathrm{I}-A)=s^2+5s+4,$$

$$\boldsymbol{\Phi}(s)=(s\mathrm{I}-A)^{-1}=\frac{1}{s^2+5s+4}\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ 2 & s+2 \end{bmatrix},$$

$$G(s)=C\boldsymbol{\Phi}(s)B+D=\frac{9}{s^2+5s+4} \ .$$

Se observă că polinomul caracteristic al sistemului, polinomul polilor matricei fundamentale şi polinomul polilor funcției de transfer coincid.

b) Prin descompunerea în fracții simple a funcției de transfer,

$$G(s)=\frac{3}{s+1}-\frac{3}{s+4},$$

obținem funcția pondere

$$g(t)=\mathcal{L}^{-1}[G(s)]=3(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-4t})$$

şi funcția indicială

$$h(t)=\int_0^t g(\tau)d\tau=\frac{3}{4}(3-4\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-4t}) \ .$$

Funcția indicială poate fi calculată direct astfel:

$$h(t)=\mathcal{L}^{-1}[G(s)U(s)]=\mathcal{L}^{-1}(\frac{9}{s^2+5s+4}\cdot\frac{1}{s}]=\frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}(\frac{3}{s}-\frac{4}{s+1}+\frac{1}{s+4})=$$

$$=\frac{3}{4}(3-4\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-4t}).$$

♦ **Aplicația 5.2.** Fie sistemul

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix},\qquad D=1.$$

Să se afle:

a) funcția de transfer $G(s)$;

b) răspunsul sistemului la intrarea $u=t\cdot 1(t)$;

c) răspunsul sistemului la intrarea $u=\sin 3t\cdot 1(t)$;

d) matricea fundamentală $\Phi(t)$;

e) răspunsul liber din starea inițială $X_0=\begin{bmatrix}5\\ 2\end{bmatrix}$; f) răspunsul la intrarea $u=t$ din starea inițială $X_0=\begin{bmatrix}5\\ 2\end{bmatrix}$.

Soluție. a) Avem

$$\boldsymbol{\Phi}(s)=(s\mathrm{I}-A)^{-1}=\frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}$$

şi

$$G(s)=C\boldsymbol{\Phi}(s)B+D=\frac{s+1}{s^2+3s+2}+1=\frac{s+3}{s+2}.$$

Polinomul caracteristic coincide cu polinomul polilor matricei fundamentale, adică $\mathcal{P}(s)=\mu(s)=s^2+3s+2$, în timp ce polinomul polilor funcției de transfer este $P(s)=s+2$. Funcția de transfer este de ordinul 1.

b) Tinând seama că $U(s)=\frac{1}{s^2}$, obținem

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}[G(s)U(s)]=\mathcal{L}^{-1}(\frac{s+3}{s+2}\cdot\frac{1}{s^2})=\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}(\frac{6}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+2})=\frac{1}{4}(6t-1+\mathrm{e}^{-2t}).$$

c) Deoarece $U(s)=\frac{3}{s^2+9}$, rezultă

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}[G(s)U(s)]=\mathcal{L}^{-1}(\frac{s+3}{s+2}\cdot\frac{1}{s^2+9})=\frac{1}{13}\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s+2}-\frac{s-15}{s^2+9})=$$

$$=\frac{1}{13}(\mathrm{e}^{-2t}-\cos 3t+5\sin 3t).$$

In regim sinusoidal permanent, răspunsul sistemului este

$$y_p(t)=\frac{1}{13}(-\cos 3t+5\sin 3t).$$

d) Avem

$$\boldsymbol{\Phi}(s)=\frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2} \\ \frac{-2}{s+1}+\frac{2}{s+2} & \frac{-1}{s+1}+\frac{2}{s+2} \end{bmatrix},$$

deci

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix} 2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} \\ -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} & -\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} \end{bmatrix}.$$

e) Starea evoluează liber astfel:

$$X_l(t)=\Phi(t)X_0=\begin{bmatrix} 2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} \\ -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} & -\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 12\mathrm{e}^{-t}-7\mathrm{e}^{-2t} \\ -12\mathrm{e}^{-t}+14\mathrm{e}^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Răspunsul liber este

$$y_l(t)=x_{1l}(t)+x_{2l}(t)=7\mathrm{e}^{-2t}.$$

f) Avem

$$y(t)=y_l(t)+y_f(t),$$

unde $y_l(t)=7e^{-2t}$ - punctul e), iar $y_f(t)=\frac{1}{4}(6t-1+e^{-2t})$ - punctul b). Rezultă

$$y(t)=\frac{1}{4}(6t-1+29e^{-2t}).$$

♦ **Aplicația 5.3.** Să se afle funcția de transfer a sistemului

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C=[1 \quad 1], \quad D=1.$$

Soluție. Avem

$$\det(s\mathrm{I}-A)=s^2,$$

$$\boldsymbol{\Phi}(s)=(s\mathrm{I}-A)^{-1}=\frac{1}{s}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$G(s)=C\boldsymbol{\Phi}(s)B+D=\frac{1}{s}.$$

Sistemul are polinomul caracteristic $\mathcal{P}(s)=s^2$, polinomul polilor matricei fundamentale $\mu(s)=s$ şi polinomul polilor funcției de transfer $P(s)=s$.

♦ **Aplicația 5.4.** Să se afle matricea de transfer a sistemului multivariabil $\Sigma(A,B,C,D)$ cu

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Soluție. Avem

$$\boldsymbol{\Phi}(s)=(s\mathrm{I}-A)^{-1}=\frac{1}{s^2+4s+1}\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ 2 & s+1\end{bmatrix},$$

$$G(s)=C\boldsymbol{\Phi}(s)B+D=\frac{1}{s^2+4s+1}\begin{bmatrix}-s+1 & s+1\\ s+5 & s+3\end{bmatrix}.$$

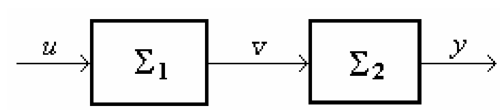
Matricea de transfer $G(s)$ este de ordinul doi. Ea poate fi scrisă şi sub forma:

$$G(s)=\frac{\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}1 & 1\\ 5 & 3\end{bmatrix}}{s^2+4s+1}.$$

♦ **Aplicația 5.5.** Fie conexiunea serie de mai jos, formată din subsistemele:

$(\Sigma_1)\quad 2\dot{v}+v=\dot{u}+u\,,$

$(\Sigma_2)\quad 4\dot{y}+y=2v\,.$



Să se afle răspunsul sistemului pentru: a) $u=\delta_0(t)$; b) $u=1(t)$; c) $u=t\cdot 1(t)$; d) $u=\sin t\cdot 1(t)$.

Soluție. Avem

$$G_1(s)=\frac{s+1}{2s+1}\,,\quad G_2(s)=\frac{2}{4s+1}\,,\quad G(s)=G_1(s)G_2(s)=\frac{2(s+1)}{(2s+1)(4s+1)}.$$

a) $$Y(s)=\frac{2(s+1)}{(2s+1)(4s+1)}=\frac{-1}{2s+1}+\frac{3}{4s+1}\,,\qquad y(t)=-0{,}5\mathrm{e}^{-t/2}+0{,}75\mathrm{e}^{-t/4};$$

b) $$Y(s)=\frac{2(s+1)}{s(2s+1)(4s+1)}=\frac{2}{s}+\frac{2}{2s+1}-\frac{12}{4s+1},\qquad y(t)=2+\mathrm{e}^{-t/2}-3\mathrm{e}^{-t/4};$$

c) $$Y(s)=\frac{2(s+1)}{s^2(2s+1)(4s+1)}=\frac{2}{s^2}-\frac{10}{s}-\frac{4}{2s+1}+\frac{48}{4s+1},$$

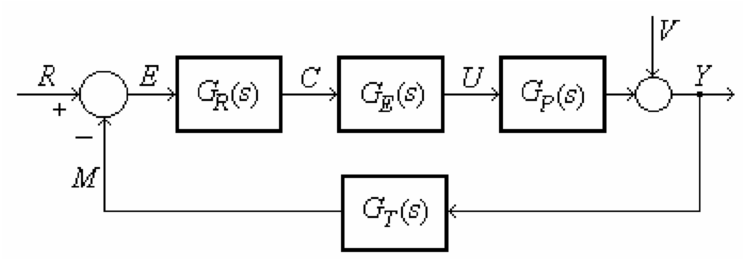
$$y(t)=2t-10-2\mathrm{e}^{-t/2}+12\mathrm{e}^{-t/4};$$

d) $$Y(s)=\frac{2(s+1)}{(2s+1)(4s+1)(s^2+1)}=\frac{-4}{5(2s+1)}+\frac{48}{17(4s+1)}-\frac{26s+2}{85(s^2+1)}\,,$$

$$y(t) = -\frac{2}{5}e^{-t/2} + \frac{12}{17}e^{-t/4} - \frac{26}{85}\cos t - \frac{2}{85}\sin t\,.$$

♦ **Aplicația 5.6.** Considerăm că elementele sistemului de reglare automată de mai jos au următoarele funcții de transfer:

$$G_R = k\,; \quad G_E = 2\,; \quad G_P = \frac{0{,}5}{5s+1}; \quad G_T = \frac{1}{s+1}\;.$$



Pentru $k = 1$, să se afle răspunsul $y(t)$ pentru: a) $r = \delta_0(t)$, b) $r = 1(t)$, c) $r = t \cdot 1(t)$, şi răspunsul $e(t)$ pentru: d) $\mathsf{v} = \delta_0(t)$, e) $\mathsf{v} = 1(t)$, f) $\mathsf{v} = t \cdot 1(t)$.

Soluție. In conformitate cu (62) şi (63), obținem:

$$G_{YR} = \frac{k(s+1)}{5s^2+6s+k+1}\;, \quad G_{YV} = \frac{(s+1)(5s+1)}{5s^2+6s+k+1}\;,$$

$$G_{ER} = \frac{(s+1)(5s+1)}{5s^2+6s+k+1}\;, \quad G_{EV} = \frac{-(5s+1)}{5s^2+6s+k+1}\;.$$

a) Avem

$$Y(s) = G_{YR}(s) = \frac{s+1}{5s^2+6s+2} = \frac{(s+0{,}6)+2\cdot 0{,}2}{5[(s+0{,}6)^2+0{,}2^2]}\;,$$

$$y(t) = 0{,}2e^{-0{,}6t}(\cos 0{,}2t + 2\sin 0{,}2t)\,.$$

b) Avem

$$Y(s) = \frac{1}{s}G_{YR}(s) = \frac{s+1}{s(5s^2+6s+2)} = \frac{1}{2s} - \frac{5s+4}{2(5s^2+6s+2)} =$$

$$= \frac{0{,}5}{s} - \frac{0{,}5(s+0{,}6)+0{,}5\cdot 0{,}2}{(s+0{,}6)^2+0{,}2^2}\,,$$

$$y(t) = 0{,}5 - 0{,}5e^{-0{,}6t}(\cos 0{,}2t + \sin 0{,}2t)\,.$$

c) Avem

$$Y(s) = \frac{1}{s^2}G_{YR}(s) = \frac{s+1}{s^2(5s^2+6s+2)} = \frac{1}{2s^2} - \frac{1}{s} + \frac{10s+7}{2(5s^2+6s+2)} =$$

$$=\frac{0{,}5}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{(s+0{,}6)+0{,}5\cdot 0{,}2}{(s+0{,}6)^2+0{,}2^2}\ ,$$

$$y(t)=0{,}5t-1+\mathrm{e}^{-0{,}6t}(\cos 0{,}2t+0{,}5\sin 0{,}2t)\ .$$

d) Avem

$$E(s)=G_{EV}(s)=\frac{-(5s+1)}{5s^2+6s+2}=-\frac{(s+0{,}6)-2\cdot 0{,}2}{(s+0{,}6)^2+0{,}2^2}\ ,$$

$$e(t)=-\mathrm{e}^{-0{,}6t}(\cos 0{,}2t-2\sin 0{,}2t)\ .$$

e) Avem

$$E(s)=\frac{1}{s}G_{EV}(s)=\frac{-(5s+1)}{s(5s^2+6s+2)}=-\frac{1}{2}(\frac{1}{s}-\frac{5s-4}{5s^2+6s+2})=$$

$$=-\frac{1}{2}[\frac{1}{s}-\frac{(s+0{,}6)-7\cdot 0{,}2}{(s+0{,}6)^2+0{,}2^2}],$$

$$e(t)=-0{,}5+0{,}5\mathrm{e}^{-0{,}6t}(\cos 0{,}2t-7\sin 0{,}2t)\ .$$

f) Avem

$$E(s)=\frac{1}{s^2}G_{EV}(s)=\frac{-(5s+1)}{s^2(5s^2+6s+2)}=-\frac{1}{2}(\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s}-\frac{10s+17}{5s^2+6s+2})=$$

$$=\frac{-0{,}5}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{(s+0{,}6)+5{,}5\cdot 0{,}2}{(s+0{,}6)^2+0{,}2^2},$$

$$e(t)=-0{,}5t-1+\mathrm{e}^{-0{,}6t}(\cos 0{,}2t+5{,}5\sin 0{,}2t)\ .$$

Remarcă. Tinând seama de proprietatea valorii finale, eroarea staționară (finală) pentru $v=1(t)$ și $k>0$ este

$$e_{st}\overset{\Delta}{=}\lim_{t\to\infty}e(t)\overset{\text{pvf}}{=}\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}sG_{EV}(s)V(s)=\lim_{s\to 0}G_{EV}(s)=\frac{-1}{k+1}\ .$$

De asemenea, pentru $r=1(t)$, avem $e_{st}=\lim\limits_{t\to\infty}e(t)=\lim\limits_{s\to 0}G_{ER}(s)=\dfrac{1}{k+1}$. In ambele cazuri, eroarea staționară este nenulă, dar cu atât mai mică, cu cât factorul de proporționalitate al regulatorului este mai mare.

6

ELEMENTE DE STABILITATE A SISTEMELOR LINIARE

In studiul stabilității sistemelor se utilizează două concepte: conceptul de stabilitate internă (a stării) şi conceptul de stabilitate externă (a ieşirii).

6.1. STABILITATEA INTERNA

Un sistem este *intern strict stabil* dacă, în regim liber, starea sistemului evoluează spre origine, oricare ar fi starea inițială. Sistemele strict stabile se mai numesc asimptotic stabile sau exponențial stabile. Ele satisfac relația:

$$\lim_{t\to\infty} X_l(t)=0\,, \quad \forall\, X_0\,. \tag{1}$$

Un sistem este *intern stabil* dacă, în regim liber, starea sistemului rămâne finită, oricare ar fi starea inițială. Un sistem stabil care nu este strict stabil se numeste *semistabil* sau *stabil la limită*, iar un sistem care nu este stabil se numeşte *instabil*. La sistemele liniare strict stabile, traiectoria de stare în regim liber este *convergentă spre origine*, în timp ce la sistemele semistabile, traiectoria este *ciclică* (sub forma unei curbe închise). Traiectoria de stare a unui sistem instabil este *divergentă*. Traiectoriile convergente şi cele divergente pot avea forma simplă sau în spirală.

Tinând seama că $X_l(t)=\Phi(t)X_0$, unde $\Phi(t)=\mathrm{e}^{At}$, $t>0$ - la sistemele liniare continue şi $\Phi(t)=A^t$, $t\in\mathbf{N}$ - la sistemele liniare discrete, rezultă că:

a) Un sistem este *intern strict stabil* dacă şi numai dacă matricea fundamentală tinde spre zero, adică

$$\lim_{t\to\infty} \Phi(t)=0\,; \tag{2}$$

b) Un sistem este *intern stabil* dacă şi numai dacă matricea fundamentală este finită, adică există $M > 0$ astfel încât

$$\|\Phi(t)\| \le M \,, \quad \forall t \ge 0 \,. \tag{3}$$

Din relaţiile (2) şi (3) reiese că stabilitatea internă a unui sistem liniar (continuu sau discret) este o proprietate asociată exclusiv matricei *A*.

6.1.1. Stabilitatea internă a sistemelor continue

Dacă matricea A a unui sistem liniar continuu are valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ distincte, atunci matricea fundamentală poate fi scrisă sub forma

$$e^{At} = V\, e^{\overline{A}t} V^{-1},$$

unde V este matricea vectorilor proprii şi

$$e^{\overline{A}t} = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}) \,.$$

Deoarece matricea V este nesingulară, avem

$$\lim_{t\to\infty} e^{At} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t\to\infty} e^{\overline{A}t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t\to\infty} e^{\lambda_i t} = 0 \ \forall i \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\lambda_i < 0 \ \forall i \,.$$

Rezultatul obţinut este valabile şi la sistemele cu valori proprii multiple. Astfel, dacă $\lambda_1 = \lambda_2$, atunci celula pătrată din exponenţiala matriceală $e^{\overline{A}t}$ corespunzătoare valorilor proprii λ_1 şi λ_2 are forma

$$\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \,.$$

Această matrice celulă tinde la zero dacă şi numai dacă $\mathrm{Re}\lambda_1 < 0$.

De asemenea, pentru o matrice A cu valorile proprii distincte, are loc implicaţia:

$$\mathrm{Re}\lambda_i \le 0 \ \forall i \quad \Rightarrow \quad |e^{\lambda_i t}| \le 1 \ \forall i \quad \Rightarrow \quad \|e^{\overline{A}t}\| < \infty \quad \Rightarrow \quad \|e^{At}\| < \infty \,.$$

Tinând seama de faptul că valorile proprii ale matricei A sunt rădăcinile polinomului caracteristic

$$\mathcal{P}(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I} - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \,,$$

rezultă:

Teorema stabilităţii interne a sistemelor continue. Un sistem continuu este *intern strict stabil* dacă şi numai dacă toate rădăcinile polinomului caracteristic au partea reală negativă, adică sunt situate în semiplanul complex stâng (în stânga axei imaginare). Dacă polinomul caracteristic are una sau mai multe rădăcini (simple) cu partea reală nulă, iar celelalte rădăcini cu partea reală negativă, atunci sistemul este *intern semistabil* (stabil la limită).

Din teorema stabilității interne rezultă că dacă o rădăcină a polinomului caracteristic are partea reală pozitivă, atunci sistemul este *intern instabil*.

Conceptul de stabilitate internă este aplicabil în principal la sistemele de tip I-S-E, dar poate fi utilizat şi la sistemele de tip I-E. Deoarece ambele tipuri de sisteme au comun conceptul de polinom caracteristic, enunțul teoremei de stabilitate rămâne valabil şi la sistemele de tip I-E. Un argument în sprijinul acestei afirmații este faptul că sistemul monovariabil de tip I-E cu ecuația

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1\dot{y}+a_0y=b_ru^{(r)}+b_{r-1}u^{(r-1)}+\cdots+b_1\dot{u}+b_0u\,,\quad r<n$$

şi sistemul I-S-E echivalent

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \vdots\\ \dot{x}_{n-1}=x_n\\ \dot{x}_n=-a_0x_1-a_1x_2-\cdots-a_{n-1}x_n+u\end{cases}\qquad y=b_0x_1+b_1x_2+\cdots+b_rx_{r+1}\ ,$$

au acelaşi polinom caracteristic, anume

$$\mathcal{P}(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0\,.$$

La sistemele multivariabile cu m intrări şi p ieşiri, polinomul caracteristic al sistemului este c.m.m.m.c al polinoamelor caracteristice asociate celor $m\cdot p$ canale intrare-ieşire.

Observație. Din expresia funcției de tranziție a stării

$$X(t)=\mathrm{e}^{At}X_0+\int_0^t\mathrm{e}^{A(t-\tau)}BU(\tau)\mathrm{d}\tau\,,$$

rezultă că dacă un sistem continuu este intern strict stabil, atunci pentru orice intrare mărginită, starea sistemului rămâne mărginită.

6.1.2. Stabilitatea internă a sistemelor discrete

Dacă matricea A a unui *sistem liniar discret* are valorile proprii $\lambda_1,\ \lambda_2,\cdots,\ \lambda_n$ distincte, atunci matricea fundamentală poate fi scrisă sub forma

$$A^t=V\,\overline{A}^t\,V^{-1}\,,$$

unde V este matricea vectorilor proprii şi

$$\overline{A}^t=\mathrm{diag}(\lambda_1^t,\lambda_2^t\cdots,\lambda_n^t)\,.$$

Deoarece matricea V este nesingulară, avem

$$\lim_{t\to\infty} A^t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \overline{A}^t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \lambda_i^t = 0,\ \forall i \quad \Leftrightarrow \quad |\lambda_i| < 1 \quad \forall i\,.$$

Rezultatul obținut este valabile şi la sistemele cu valori proprii multiple. Astfel, dacă $\lambda_1 = \lambda_2$, atunci celula pătrată din puterea matriceală $\overline{A}^t$ corespunzătoare valorilor proprii λ_1 şi λ_2 are forma

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^t & t\lambda_1^{t-1} \\ 0 & \lambda_1^t \end{bmatrix}.$$

Această celulă tinde la zero dacă şi numai dacă $|\lambda_1| < 1$.

De asemenea, pentru o matrice A cu valorile proprii distincte, are loc implicația:

$$|\lambda_i| \le 1\ \forall i \quad \Rightarrow \quad \left|\lambda_i^t\right| \le 1\ \forall i \quad \Rightarrow \quad \left\|\overline{A}^t\right\| < \infty \quad \Rightarrow \quad \left\|A^t\right\| < \infty\,.$$

Tinând seama de faptul că valorile proprii ale matricei A sunt rădăcinile polinomului caracteristic $\mathcal{P}(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I} - A)$, rezultă:

Teorema stabilității interne a sistemelor discrete. Un sistem discret este *intern strict stabil* dacă şi numai dacă toate rădăcinile polinomului caracteristic au modulul subunitar, adică sunt situate în interiorul cercului unitar cu centrul în origine. Dacă polinomul caracteristic are una sau mai multe rădăcini (simple) cu modulul egal cu 1, iar celelalte rădăcini cu modulul subunitar, atunci sistemul este *intern semistabil*.

Din teorema stabilității interne rezultă că dacă o rădăcină a polinomului caracteristic are modulul supraunitar, atunci sistemul este *intern instabil*.

Ca şi la sistemele continue, enunțul teoremei de stabilitate rămâne valabil şi la sistemele de tip I-E.

Din expresia funcției de tranziție a stării

$$X(t) = A^t X_0 + (A^{t-1} B U_0 + A^{t-2} B U_1 + \cdots + B U_{t-1})\,,$$

rezultă că dacă un sistem discret este intern strict stabil, atunci pentru orice intrare mărginită, starea sistemului este mărginită.

Observații. **1°.** Deoarece polinomul caracteristic al unei conexiuni serie sau paralel de două subsisteme continue sau discrete este egal cu produsul polinoamelor caracteristice ale subsistemelor, adică $\mathcal{P}(s) = \mathcal{P}_1(s)\mathcal{P}_2(s)$, rezultă că *spectrul* sistemului rezultant (mulțimea rădăcinilor polinomului caracteristic) este reuniunea disjunctă a spectrelor celor două sisteme componente, adică

$$\sigma = \sigma_1 \tilde{\cup} \sigma_2\ . \tag{4}$$

In consecință, sistemul rezultant (serie sau paralel) este intern strict stabil dacă şi numai dacă sistemele componente sunt intern strict stabile.

2°. Din dezvoltarea

$$\det(\lambda \mathrm{I}-A)=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots$$

reiese că suma rădăcinilor polinomului caracteristic este egală cu suma elementelor diagonale ale matricei A, adică

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}\,.$$

Deoarece

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=\mathrm{Re}\,\lambda_1+\mathrm{Re}\,\lambda_2+\cdots+\mathrm{Re}\,\lambda_n\,,$$

rezultă că un *sistem continuu* este intern instabil dacă

$$a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}>0\,. \tag{5}$$

Similar, deoarece

$$|\lambda_1|+|\lambda_2|+\cdots+|\lambda_n|\geq|\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n|=|a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}|,$$

rezultă că un *sistem discret* este intern instabil dacă

$$|a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}|>n\,. \tag{6}$$

♦ **Aplicația 6.1.** Să se studieze stabilitatea internă a sistemului continuu

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_3\\ \dot{x}_2=x_1-x_3\\ \dot{x}_3=5x_1+6x_2-4x_3+u\end{cases}\qquad y=x_1+3x_3\,.$$

Soluție. Formăm polinomul caracteristic al sistemului

$$\mathcal{P}(\lambda)=\det(\lambda \mathrm{I}-A)=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & -1\\ -1 & \lambda & 1\\ -5 & -6 & \lambda+4\end{vmatrix}=\lambda^3+4\lambda^2+\lambda-6=(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda+3)\,.$$

Deoarece $\mathcal{P}(\lambda)$ are o rădăcină pozitivă ($\lambda_1=1$) , sistemul este intern instabil.

♦ **Aplicația 6.2.** Să se studieze stabilitatea internă a sistemului continuu

$$\begin{cases}\dot{x}_1=2x_1+mx_3-2u\\ \dot{x}_2=x_1-x_3\\ \dot{x}_3=2x_1-3x_2-x_3+u\end{cases}\qquad y=x_1+2x_2\,,$$

unde m este un parametru real.

Soluție. Deoarece $a_{11}+a_{22}+a_{33}=2+0-1>0$, sistemul este intern instabil oricare ar fi m real.

♦ **Aplicația 6.3.** Să se studieze stabilitatea internă a sistemului continuu

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + mx_2 - 2u \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 \end{cases} \qquad y = x_1 - 7x_2 \ ,$$

unde m este un parametru real.

Soluție. Formăm polinomul caracteristic al sistemului

$$\mathcal{P}(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I} - A) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -m \\ -1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 - m \ .$$

Pentru $m \geq \frac{-1}{4}$, rădăcinile λ_1 şi λ_2 ale polinomului caracteristic sunt reale. Deoarece $\lambda_1 + \lambda_2 = -3 < 0$ şi $\lambda_1\lambda_2 = 2 - m$, rezultă că:

a) pentru $\frac{-1}{4} \leq m < 2$, ambele rădăcini sunt negative, deci sistemul este strict stabil;

b) pentru $m = 2$, avem $\lambda_1 = \frac{-3}{2}$ şi $\lambda_2 = 0$, deci sistemul este semistabil;

c) pentru $m > 2$, o rădăcină este negativă, iar cealaltă este pozitivă, deci sistemul este instabil.

Pentru $m < \frac{1}{4}$, rădăcinile λ_1 şi λ_2 ale polinomului caracteristic sunt complexe. Deoarece $\mathrm{Re}\lambda_{1,2} = \frac{-3}{2} < 0$, sistemul este stabil.

In concluzie, sistemul este intern stabil pentru $m \leq 2$ şi intern instabil pentru $m > 2$. Pentru $m = 2$, sistemul este intern semistabil (stabil la limită) .

♦ **Aplicația 6.4.** Să se studieze stabilitatea internă a sistemului continuu

$$\ddot{y} + 8\dot{y} + (16 - m^2)y = -\dot{u} + u \ , \quad m \geq 0 \ .$$

Soluție. Ecuația caracteristică

$$\lambda^2 + 8\lambda + 16 - m^2 = 0 \ ,$$

are rădăcinile reale $\lambda_1 = -4 - m$ şi $\lambda_2 = -4 + m$. Sistemul este intern strict stabil pentru $m < 4$, intern semistabil pentru $m = 4$ şi intern instabil pentru $k > 4$.

♦ **Aplicația 6.5.** Să se studieze stabilitatea internă a sistemului discret

$$\begin{cases} x_1(t+1) = -x_1(t) + mx_2(t) + 2u(t) \\ x_2(t+1) = x_1(t) - (2m+0{,}5)x_2(t) - u(t) \end{cases} , \quad y(t) = x_1(t) - 5x_2(t) \ ,$$

unde m este un parametru real.

Soluție. Sistemul are polinomul caracteristic

$$\mathcal{P}(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I} - A) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -m \\ -1 & \lambda+2m+0{,}5 \end{vmatrix} = \lambda^2 + (2m + \frac{3}{2})\lambda + m + \frac{1}{2} \ ,$$

cu rădăcinile reale $\lambda_1 = \frac{-1}{2}$ şi $\lambda_2 = -2m-1$. Rădăcina λ_1 are modulul subunitar, iar rădăcina λ_2 are modulul subunitar pentru $-1 < m < 0$. In consecinţă, sistemul este intern strict stabil pentru $m \in (-1,\ 0)$, intern semistabil pentru $m \in \{-1,\ 0\}$ şi intern instabil pentru $m \in (-\infty,\ -1) \cup (0,\ \infty)$.

♦ **Aplicaţia 6.6.** Să se studieze stabilitatea internă a sistemului discret

$$y(t) + y(t-1) + (1-m)y(t-2) = u(t-1) + u(t-4),$$

unde m este un parametru real.

Soluţie. Ecuaţia caracteristică

$$\lambda^2 + \lambda + 1 - m = 0,$$

are rădăcinile reale pentru $m \geq \frac{3}{4}$ ($\lambda_1 = \frac{-1-\sqrt{4m-3}}{2}$ şi $\lambda_2 = \frac{-1+\sqrt{4m-3}}{2}$) şi complexe pentru $m < 0$ ($\lambda_1 = \frac{-1-j\sqrt{3-4m}}{2}$, $\lambda_1 = \frac{-1+j\sqrt{3-4m}}{2}$).

Cazul $m \geq \frac{3}{4}$. Ambele rădăcini au modulul subunitar numai pentru $\frac{3}{4} \leq m \leq 1$.

Cazul $m < \frac{3}{4}$. Ambele rădăcini au modulul subunitar numai pentru $0 \leq m < \frac{3}{4}$. Sistemul este intern strict stabil pentru $m \in (0,\ 1)$, intern semistabil pentru $m \in \{0,\ 1\}$ şi intern instabil pentru $m \in (-\infty,\ 0) \cup (1,\ \infty)$.

6.2. STABILITATEA EXTERNA

Dacă stabilitatea internă a unui sistem caracterizează stabilitatea stării în regim liber, în schimb stabilitatea externă caracterizează *stabilitatea ieşirii* (*răspunsului*) *în regim forţat*.

Prin definiţie, un sistem liniar este *extern strict stabil* dacă, pentru orice intrare mărginită, ieşirea forţată a sistemului este, de asemenea, mărginită. Prin urmare, la un sistem extern strict stabil, oricare ar fi intrarea cu proprietatea

$$\|U(t)\| \leq 1, \quad t \geq 0,$$

există $M > 0$ astfel încât

$$\|Y_f(t)\| \leq M, \quad t \geq 0.$$

6.2.1. Stabilitatea externă a sistemelor continue

La sistemele monovariabile continue proprii, din relaţia de convoluţie

$$y_f(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau \ ,$$

unde $g(t)$ este funcția pondere, obținem următorul rezultat:

Un sistem monovariabil continuu este *extern strict stab*il dacă şi numai dacă integrala

$$\boldsymbol{I}=\int_0^{\infty}|g(t)|\mathrm{d}t \tag{7}$$

este finită.

Pentru a demonstra *necesitatea*, presupunem că integrala $\boldsymbol{I}$ nu este finită şi arătam că se ajunge la o contradicție (că sistemul nu este extern strict stabil). Dacă $\boldsymbol{I}$ nu este finită, atunci oricare ar fi $M>0$, există $T>0$ astfel încât $\int_0^T|g(t)|dt>M$.

Scriem această inegalitate sub forma $\int_0^T|g(T-\tau)|d\tau>M$, apoi sub forma

$$\int_0^T g(T-\tau)\cdot\operatorname{sgn}(g(T-\tau))d\tau>M\ .$$

Alegând acum intrarea $u(\tau)=\operatorname{sgn}(g(T-\tau))$, care satisface condiția $|u(\tau)|\le 1$, rezultă $\int_0^T g(T-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau>M$, adică $y(T)>M$, rezultat în contradicție cu ipoteza de mărginire a ieşirii $y(t)$.

Pentru a demonstra *suficiența*, vom considera integrala $\boldsymbol{I}$ finită şi vom arăta că pentru orice intrare $u(t)$ satisfăcând condiția $|u(t)|\le 1$, ieşirea $y(t)$ este mărginită. Intr-adevăr, avem

$$y(t)=\int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau\le\int_0^t|g(t-\tau)||u(\tau)|d\tau\le\int_0^t|g(t-\tau)|d\tau=$$

$$=\int_0^t|g(x)|dx\le\int_0^{\infty}|g(x)|dx=\boldsymbol{I}\ .$$

Prin relaxarea condițiilor de stabilitate strică, se consideră că un sistem monovariabil este *extern stabil* dacă funcția pondere $g(t)$ este mărginită pe $(0, \infty)$, adică există $M>0$ astfel încât

$$|g(t)|\le M\ ,\quad \forall\ t>0. \tag{8}$$

Deoarece funcția pondere a unui sistem I-S-E este dependentă de matricele A, B, C şi D, rezultă că stabilitatea externă constituie o proprietate asociată tuturor acestor matrice, spre deosebire de stabilitatea internă, care este asociată numai matricei A.

Să considerăm acum sistemul monovariabil minimal cu modelul primar

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_1\dot{y}+a_0y=b_ru^{(r)}+b_{r-1}u^{(r-1)}+\dots+b_1\dot{u}+b_0u\ ,$$

modelul secundar

$$\begin{cases} a_nz^{(n)}+a_{n-1}z^{(n-1)}+\dots+a_1\dot{z}+a_0z=u \\ y=b_rz^{(r)}+\dots+b_1\dot{z}+b_0z \end{cases}$$

şi funcţia de transfer

$$G(s)=\frac{b_r s^r + b_{r-1}s^{r-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}\,.$$

Deoarece sistemul este minimal, mulţimea polilor s_1, s_2, … , s_n ai funcţiei de transfer $G(s)$ coincide cu mulţimea rădăcinilor ecuaţiei caracteristice. Să considerăm mai întâi cazul în care toţi polii funcţiei de transfer sunt simpli (diferiţi între ei) şi $a_0 \neq 0$. Pentru intrare tip treaptă unitară, răspunsul $z(t)$ are forma

$$z(t)=\frac{1}{a_0}+C_1 \mathrm{e}^{s_1 t}+C_2 \mathrm{e}^{s_2 t}+\cdots+C_n \mathrm{e}^{s_n t}\,,$$

unde toţi coeficienţii C_i sunt diferiţi de zero. Din a doua ecuaţie a modelului secundar, obţinem răspunsul indicial al sistemului, sub forma

$$h(t)=\frac{b_0}{a_0}+A_1 \mathrm{e}^{s_1 t}+A_2 \mathrm{e}^{s_2 t}+\cdots+A_n \mathrm{e}^{s_n t}\,, \tag{9}$$

unde

$$A_i = C_i(b_r s_i^r + b_{r-1}s_i^{r-1}+\cdots+b_1 s_i + b_0)\,,\quad i=1\cdots n\,.$$

Sistemul fiind minimal, polii s_i nu sunt rădăcini ale numărătorului funcţiei de transfer $G(s)$, deci toţi coeficienţii A_i sunt diferiţi de zero.

Sistemul are funcţia pondere

$$g(t)=\dot{h}(t)+h(0+)\delta_0(t)=s_1 A_1 \mathrm{e}^{s_1 t}+s_2 A_2 \mathrm{e}^{s_2 t}+\cdots+s_n A_n \mathrm{e}^{s_n t}+\frac{b_n}{a_n}\cdot\delta_0(t)\,. \tag{10}$$

Integrala $\boldsymbol{I}$ este finită dacă şi numai dacă toate funcţiile exponenţiale din componenţa funcţiei pondere $g(t)$ tind spre 0 pentru $t\to\infty$, adică atunci când toţi polii s_1, s_2, … , s_n au partea reală negativă. In ceea ce priveşte funcţia pondere $g(t)$, aceasta este mărginită dacă şi numai dacă toţi polii s_1, s_2, … , s_n au partea reală negativă sau nulă.

Dacă polii s_1 şi s_2 sunt reali şi egali, atunci expresiile corespunzătoare acestor poli în funcţiile $h(t)$ şi $g(t)$ au formele $(A_1+A_2 t)\mathrm{e}^{s_1 t}$, respectiv $(A_2+s_1 A_1+s_1 A_2 t)\mathrm{e}^{s_1 t}$. Condiţiile ca integrala $\boldsymbol{I}$ să fie finită rămân neschimbate. In schimb, pentru ca funcţia pondere $g(t)$ să fie mărginită este necesar ca polul dublu s_1 să aibă partea reală negativă (nu şi nulă).

In cazul $a_0=0$ şi $a_1\neq 0$, funcţia de transfer $G(s)$ are un pol în origine, $h(t)$ conţine termenul $(b_0/a_1)\cdot t$, iar $g(t)$ conţine termenul b_0/a_1. Dacă ceilalţi poli au partea reală negativă, funcţia pondere $g(t)$ este mărginită, dar integrala $\boldsymbol{I}$ nu este finită. Tinând seama de aceste rezultate şi de faptul că un sistem neminimal are răspunsul forţat egal cu cel al sistemului minimal echivalent, putem formula

Teorema stabilității externe a sistemelor continue. Un sistem monovariabil continuu este *extern strict stabil* dacă şi numai dacă toți polii funcției de transfer a sistemului au partea reală negativă. Sistemul este *extern semistabil* dacă şi numai dacă polii funcției de transfer a sistemului au partea reală negativă sau nulă, iar polii cu partea reală nulă sunt simpli.

Dacă există un pol cu partea reală pozitivă sau un pol multiplu cu partea reală nulă, atunci sistemul este *extern instabil*.

Conceptul de stabilitate externă este aplicabil atât la sistemele de tip I-E, cât şi la cele de tip I-S-E.

Un sistem intern stabil este şi extern stabil, iar un sistem extern instabil este şi intern instabil. Un sistem intern instabil poate fi însă extern stabil, în cazul în care rădăcinile cu partea reală pozitivă ale polinomului caracteristic nu sunt poli ai funcției de transfer a sistemului.

La un sistem intern instabil de tip I-S-E având forma *modală* (caracterizată printr-o matrice A de tip diagonal), variabilele de stare asociate valorilor proprii cu partea reală pozitivă sunt instabile, iar variabilele de stare asociate valorilor proprii cu partea reală negativă sunt stabile. Dacă mărimea de ieşire a sistemului este dependentă (liniar) numai de variabilele de stare stabile, atunci sistemul este extern stabil.

Un sistem *multivariabil* este extern stabil dacă şi numai dacă toate canalele intrare-ieşire ale sistemului sunt extern stabile.

6.2.2. Stabilitatea externă a sistemelor discrete

La sistemele monovariabile discrete cu funcția pondere $g(t)$, din relația de convoluție

$$y_f(t) = g(t)u(0) + g(t-1)u(1) + \cdots + g(0)u(t) = \sum_{i=0}^{t} g(t-i)u(i)\ ,$$

obținem următorul rezultat:

Un sistem monovariabil discret este extern strict stabil dacă şi numai dacă suma

$$\boldsymbol{S} = \sum_{k=0}^{\infty} |\, g(k)| \tag{11}$$

este finită.

Pentru a demonstra *necesitatea*, presupunem că suma $\boldsymbol{S}$ nu este finită. Atunci, oricare ar fi $M>0$, există N natural astfel încât $\sum_{k=0}^{N}|g(k)|>M$. Scriem această inegalitate sub forma $\sum_{k=0}^{N}|g(N-k)|>M$, apoi sub forma

$$\sum_{k=0}^{N} g(N-k)\operatorname{sgn}(g(N-k))>M .$$

Alegând acum intrarea $u(k)=\operatorname{sgn}(g(N-k))$, care satisface condiția $|u(k)|\le 1$, rezultă $\sum_{k=0}^{N} g(N-k)u(k)>M$, adică $y(N)>M$, rezultat în contradicție cu ipoteza de mărginire a ieşirii $y(t)$.

Pentru a demonstra *suficiența*, vom considera suma $\boldsymbol{S}$ finită şi vom arăta că pentru orice intrare $u(t)$ satisfăcând condiția $|u(t)|\le 1$, ieşirea $y(t)$ este mărginită. Intr-adevăr, avem

$$y(t)=\sum_{i=0}^{t} g(t-i)u(i)\le\sum_{i=0}^{t}|g(t-i)||u(i)|\le\sum_{i=0}^{t}|g(t-i)|=$$

$$=\sum_{k=0}^{t}|g(k)|\le\sum_{k=0}^{\infty}|g(k)|=\boldsymbol{S} .$$

Prin relaxarea condițiilor de stabilitate strică, se consideră că un sistem monovariabil este *extern stabil* dacă funcția pondere $g(t)$ este mărginită, adică există $M>0$ astfel încât

$$|g(t)|\le M . \tag{12}$$

Să considerăm acum sistemul monovariabil minimal cu modelul primar

$$y(t)+a_1y(t-1)+\cdots+a_ny(t-n)=b_0u(t)+b_1u(t-1)+\cdots+b_ru(t-r), \quad r\le n$$

modelul secundar

$$\begin{cases} z(t)+a_1z(t-1)+\ldots+a_nz(t-n)=u(t) \\ y(t)=b_0z(t)+b_1z(t-1)+\ldots+b_rz(t-r) \end{cases}$$

şi funcția de transfer

$$G(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_rz^{-r}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}} .$$

Deoarece sistemul este minimal, mulțimea polilor z_1, z_2, … , z_n ai funcției de transfer $G(z)$ coincide cu mulțimea rădăcinile ecuației caracteristice. Să considerăm mai întâi cazul în care toți polii funcției de transfer sunt simpli (diferiți între ei) şi $1+a_1+a_2+...+a_n \neq 0$. Pentru intrare tip treaptă unitară, răspunsul $z(t)$ are forma

$$z(t)=\frac{1}{1+a_1+a_2+...+a_n}+C_1z_1^t+C_2z_2^t+\cdots+C_nz_n^t\,,$$

unde toți coeficienții C_i sunt diferiți de zero. Din a doua ecuație a modelului secundar, obținem răspunsul indicial al sistemului, sub forma

$$h(t)=\frac{b_0+b_1+\cdots+b_r}{1+a_1+a_2+...+a_n}+A_1z_1^t+A_2z_2^t+\cdots+A_nz_n^t\;, \tag{13}$$

unde

$$A_i=C_iz_i^t(b_0+b_1z_i^{-1}+\cdots+b_rz_i^{-r})\,,\quad i=1\cdots n\,.$$

Sistemul fiind minimal, polii z_i nu sunt rădăcini ale numărătorului funcției de transfer $G(z)$, deci toți coeficienții A_i sunt diferiți de zero.

Sistemul are funcția pondere

$$g(t)=h(t)-h(t-1)=A_1z_1^t(1-z_1^{-1})+A_2z_2^t(1-z_2^{-1})+\cdots+A_nz_n^t(1-z_n^{-1})\,. \tag{14}$$

Suma $\boldsymbol{S}=\sum_{k=0}^{\infty}|g(k)|$ este finită dacă şi numai dacă toate funcțiile exponențiale din componența funcției pondere $g(t)$ tind spre 0 pentru $t\to\infty$, adică atunci când toți polii z_1, z_2, … , z_n au modulul subunitar. In ceea ce priveşte funcția pondere $g(t)$, aceasta este mărginită dacă şi numai dacă toți polii z_1, z_2, … , z_n au modulul subunitar sau egal cu 1.

Dacă polii s_1 şi s_2 sunt reali şi egali, atunci expresiile corespunzătoare acestor poli în funcțiile $h(t)$ şi $g(t)$ au formele $(A_1+A_2t)z_1^t$, respectiv $[A_2z_1^{-1}+(A_1+A_2t)(1-z_1^{-1})]z_1^t$. Condițiile ca suma $\boldsymbol{S}$ să fie finită rămân neschimbate. In schimb, pentru ca funcția pondere $g(t)$ să fie mărginită este necesar ca polul dublu z_1 să aibă modulul subunitar (nu şi unitar).

Tinând seama de aceste rezultate şi de faptul că un sistem neminimal are răspunsul forțat egal cu cel al sistemului minimal echivalent I-E, putem formula

Teorema stabilității externe a sistemelor discrete. Un sistem monovariabil discret este *extern strict stabil* dacă şi numai dacă toți polii funcției de transfer a sistemului au modulul subunitar. Sistemul este *extern semistabil* dacă şi numai dacă polii funcției de transfer a sistemului au modulul subunitar sau egal cu 1, iar polii cu modulul 1 sunt poli simpli.

Dacă există un pol cu modulul supraunitar sau un pol multiplu cu modulul unitar, atunci sistemul este *extern instabil*.

Conceptul de stabilitate externă este aplicabil atât la sistemele de tip I-E, cât şi la cele de tip I-S-E.

Un sistem intern stabil este şi extern stabil, iar un sistem extern instabil este şi intern instabi. Un sistem intern instabil poate fi însă extern stabil, în cazul în care rădăcinile cu modulul subunitar ale polinomului caracteristic nu sunt poli ai funcţiei de transfer a sistemului.

Observaţii. **1°.** Problema stabilităţii unui sistem liniar se reduce la problema poziţionării în planul complex a rădăcinilor *polinomului caracteristic* $\mathcal{P}(s)$ - cazul stabilităţii interne, respectiv a rădăcinilor *polinomului polilor* $p(s)$ - cazul stabilităţii externe. La un *sistem minimal*, polinomul caracteristic coincide cu polinomul polilor şi, în consecinţă, conceptele de stabilitate internă şi de stabilitate externă sunt echivalente. Un sistem intern stabil este şi extern stabil, dar implicaţia inversă nu este valabilă.

2°. In cazul *conexiunilor serie şi paralel*, dacă sistemele componente sunt strict stabile, atunci sistemul rezultant este strict stabil. Teoretic, sistemul rezultant poate fi extern stabil şi în condiţiile în care sistemele componente nu sunt toate extern stabile. De exemplu, conexiunea serie a două sisteme continue cu funcţiile de transfer $G_1(s)=\dfrac{s-1}{s+1}$ şi $G_2(s)=\dfrac{1}{s-1}$, sau conexiunea paralel cu $G_1(s)=\dfrac{-1}{s-1}$ şi $G_2(s)=\dfrac{s}{s-1}$, sunt teoretic strict stabile. Din considerente practice, vom considera însă conexiunile serie şi paralel ca fiind instabile atunci când un sistem component este instabil.

♦ **Aplicaţia 6.7.** Să se studieze stabilitatea externă a sistemului continuu

$$2\ddot{y}-3\dot{y}-2y=\dot{u}-2u\,.$$

Soluţie. Sistemul are funcţia de transfer

$$G(s)=\frac{s-2}{2s^2-3s-2}=\frac{1}{2s+1}\,.$$

Deoarece polinomul polilor $p(s)=2s+1$ are o singură rădăcină şi aceasta este negativă ($s_1=-1/2$), sistemul este extern strict stabil.

Remarcă. Deoarece polinomul caracteristic

$$\mathcal{P}(s)=2s^2-3s-2=(s-2)(2s+1)$$

are rădăcina $s_1=2$ strict pozitivă, sistemul este intern instabil.

♦ **Aplicaţia 6.8.** Să se studieze stabilitatea externă a sistemului continuu

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = 6x_1 + 5x_2 - 4x_3 + u \end{cases} \qquad y = -x_1 \ .$$

Soluție. Din relațiile

$$y = -x_1 ,$$

$$\dot{y} = -\dot{x}_1 = -x_2 + x_3 \ ,$$

$$\ddot{y} = -\dot{x}_2 + \dot{x}_3 = 6x_1 - 5(-x_2 + x_3) + u ,$$

rezultă modelul intrare-ieşire

$$\ddot{y} = -6y - 5\dot{y} + u ,$$

adică

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = u .$$

Sistemul are funcția de transfer

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 6} = \frac{1}{(s+2)(s+3)} .$$

Deoarece ambii poli ai funcției de transfer sunt negativi, sistemul este extern strict stabil.

Remarcă. Polinomul caracteristic al sistemului

$$\mathcal{P}(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I} - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -6 & -5 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3)$$

are rădăcina pozitivă $\lambda_1 = 1$, deci sistemul este intern instabil.

♦ **Aplicația 6.9.** Să se studieze stabilitatea externă a sistemului discret

$$y(t) + y(t-1) - 2y(t-2) = u(t-1) + 2u(t-2) ,$$

Soluție. Sistemul are funcția de transfer

$$G(z) = \frac{z^{-1} + 2z^{-2}}{1 + z^{-1} - 2z^{-2}} = \frac{z^{-1}(1 + 2z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 + 2z^{-1})} = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} .$$

Deoarece funcția de transfer are polul $z_1 = 1$ (cu modulul egal cu 1), sistemul este extern semistabil.

Remarcă. Deoarece ecuația caracteristică

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 ,$$

are rădăcina -2 cu modulul supraunitar, sistemul este intern instabil.

♦ **Aplicația 6.10.** Să se studieze stabilitatea externă a sistemului discret

$$\begin{cases} x_1(t+1) = -x_1(t) + x_2(t) \\ x_2(t+1) = x_1(t) - 2x_2(t) - u(t) \end{cases} , \qquad y(t) = x_1(t) - x_2(t) ,$$

unde m este un parametru real.

Soluție. Avem

$$y(t) = x_1(t) - x_2(t)\ ,$$

$$y(t+1) = x_1(t+1) - x_2(t+1) = -2x_1(t) + 3x_2(t) + u(t)\ ,$$

$$y(t+2) = -2x_1(t+1) + 3x_2(t+1) + u(t+1) = 5x_1(t) - 8x_2(t) + u(t+1) - 3u(t)\ .$$

Din primele două relații obținem

$$x_1(t) = y(t+1) + 3y(t) - u(t)\ , \quad x_2(t) = y(t+1) + 2y(t) - u(t)\ .$$

Inlocuind în cea de-a treia relație, rezultă modelul intrare-işire

$$y(t+2) = -3y(t+1) - y(t) + u(t+1)\ ,$$

echivalent cu

$$y(t) + 3y(t-1) + y(t) = u(t-1)\ .$$

Sistemul are funcția de transfer

$$G(z) = \frac{z^{-1}}{1 + 3z^{-1} + z^{-2}}$$

şi este extern instabil, deoarece are polul $z_1 = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$ cu modulul supraunitar.

6.3. CRITERIUL DE STABILITATE HURWITZ

Criteriul lui Hurwitz permite rezolvarea efectivă a problemei stabilității sistemelor liniare continue pe baza condițiilor formulate în cadrul teoremelor de stabilitate internă si externă. Criteriul evidențiază faptul că rezolvarea problemei locației rădăcinilor unui polinom în raport cu axa imaginară nu necesită calculul rădăcinilor polinomului.

Criteriul lui Hurwitz. *Polinomul*

$$\mathcal{P}_n(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0\ , \qquad a_n > 0$$

este hurwitzian, adică are toate rădăcinile cu partea reală negativă (situate în stânga axei imaginare), dacă şi numai dacă minorii principali $\Delta_1 = a_{n-1}$, $\Delta_2 = a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}$, … , $\Delta_n = a_0 \Delta_{n-1}$ *ai matricei Hurwitz*

$$H_n = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & * & \cdots & a_1 & 0 \\ 0 & * & \cdots & a_2 & a_0 \end{bmatrix} \qquad (15)$$

sunt pozitivi. In plus, pentru ca polinomul $\mathcal{P}(s)$ *să fie hurwitzian este necesar ca toți coeficienții* a_i *să fie pozitivi.*

Construcția matricei Hurwitz se face astfel: se completează mai întâi diagonala principală şi apoi coloanele, ținând seama de faptul că indicii coeficienților cresc la deplasarea pe o coloană, de sus în jos.

Pentru $n=2$, din criteriul lui Hurwitz rezultă că ambele rădăcini ale polinomului $\mathcal{P}_2(s)=a_2s^2+a_1s+a_0$ ($a_2>0$) au partea reală negativă dacă şi numai dacă toți coeficienții sunt strict pozitivi.

Pentru $n=3$, matricea Hurwitz are forma

$$H_3=\begin{bmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Din criteriul lui Hurwitz rezultă că polinomul $\mathcal{P}_3(s)=a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0$ ($a_3>0$) are rădăcinile cu partea reală negativă dacă şi numai dacă toți coeficienții sunt strict pozitivi şi $\Delta_2=a_1a_2-a_0a_3>0$.

Pentru $n=4$, matricea Hurwitz are forma

$$H_4=\begin{bmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Rădăcinile polinomului $\mathcal{P}_4(s)=a_4s^4+a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0$ ($a_4>0$) au partea reală negativă dacă şi numai dacă toți coeficienții sunt strict pozitivi şi $\Delta_3=a_1\Delta_2-a_0a_3^2>0$, unde $\Delta_2=a_2a_3-a_1a_4$.

Observații. 1°. Polinomul $\mathcal{P}_n(s)$ are rădăcinile cu partea reală mai mică decât δ, adică situate în stânga dreptei $s=\delta$, dacă şi numai dacă polinomul $\mathcal{P}_n(p+\delta)$ este hurwitzian în raport cu variabila p. Intr-adevăr, între rădăcinile celor două polinoame există relația $s_i=p_i+\delta$, iar din condițiile $\operatorname{Re}p_i<0$, rezultă $\operatorname{Re}s_i=\operatorname{Re}p_i+\delta<\delta$. Această remarcă poate fi utilizată la poziționarea rădăcinilor polinomului caracteristic sau polinomului polilor în stânga dreptei $s=\delta$, $\delta<0$, în vederea obținerii unor performanțe dinamice convenabile.

2°. In analiza stabilității *sistemelor discrete* se ține seama de faptul că transformarea omografică

$$z=\frac{s+1}{s-1} \quad \left(s=\frac{z+1}{z-1}\right) \tag{16}$$

aplică biunivoc interiorul cercului cu centrul în origine şi de rază 1 din planul variabilei z în semiplanul stâng $\operatorname{Re}s<0$ din planul variabilei s. In consecință, polinomul

$$\mathcal{P}_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0\,, \quad a_n > 0$$

are toate rădăcinile cu *modulul subunitar* dacă şi numai dacă ecuaţia $\mathcal{P}_n(\frac{s+1}{s-1}) = 0$ are toate rădăcinile cu partea reală negativă. Mai mult, polinomul $\mathcal{P}_n(z)$ are toate rădăcinile cu modulul mai mic decât δ, dacă şi numai dacă ecuaţia $\mathcal{P}_n(\delta \cdot \frac{s+1}{s-1}) = 0$ are toate rădăcinile cu partea reală negativă.

♦ **Aplicaţia 6.11.** Să se studieze stabilitatea internă şi externă a sistemului continuu

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = m x_3 \\ \dot{x}_3 = 6x_1 + 5x_2 - 4x_3 + u \end{cases} \qquad y = -x_1\,,$$

unde m este un parametru real.

Soluţie. Pentru studiul stabilităţii interne formăm polinomul caracteristic

$$\mathcal{P}(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I} - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ 0 & \lambda & -m \\ -6 & -5 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 4\lambda^2 + (6 - 5m)\lambda - 6m\,.$$

Coeficienţii polinomului caracteristic sunt pozitivi penru $m < 0$, iar minorul $\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 24 - 14m$ este pozitiv pentru $m < 12/7$. In consecinţă, sistemul este intern strict stabil dacă şi numai dacă $m < 0$. Pentru $m = 0$, polinomul caracteristic are rădăcinile $\lambda_1 = 0$ şi $\lambda_{2,3} = -2 \pm \mathrm{j}\sqrt{2}$, deci sistemul este intern semistabil. Pentru $m > 0$, sistemul este intern instabil.

Pentru determinarea modelului intrare-ieşire, avem

$$y = -x_1\,,$$
$$\dot{y} = -\dot{x}_1 = -x_2 + x_3\,,$$
$$\ddot{y} = -\dot{x}_2 + \dot{x}_3 = 6x_1 + 5x_2 - (m+4)x_3 + u\,,$$
$$\dddot{y} = 6\dot{x}_1 + 5\dot{x}_2 - (m+4)\dot{x}_3 + \dot{u} = -6(m+4)x_1 - (5m+14)x_2 + (9m+10)x_3 + \dot{u} - (m+4)u\,.$$

Cazul $m \neq 1$. Din primele trei relaţii obţinem

$$x_1 = -y\,,$$
$$x_2 = \frac{\ddot{y} + (m+4)\dot{y} + 6y - u}{1 - m}\,,$$
$$x_3 = \frac{\ddot{y} + 5\dot{y} + 6y - u}{1 - m}\,,$$

iar prin înlocuirea expresiilor variabilelor de stare în cea de-a patra relaţie, rezultă

$$\dddot{y} + 4\ddot{y} + (6 - 5m)\dot{y} - 6my = \dot{u} - mu\,.$$

Sistemul are funcţia de transfer

$$G(s)=\frac{s-m}{s^3+4s^2+(6-5m)s-6m}\ .$$

Pentru $m\neq 0$, polinomul polilor este

$$p(s)=s^3+4s^2+(6-5m)s-6m$$

şi coincide cu polinomul caracteristic al sistemului. Sistemul este deci extern strict stabil pentru $m<0$. Pentru $m=0$, polinomul polilor este $p(s)=s^2+4s+6$. Deoarece polii $s_{1,2}=-2\pm \mathrm{j}\sqrt{2}$ au partea reală negativă, sistemul este extern strict stabil.

Cazul $m=1$. Din primele trei relații obținem

$$\ddot{y}+5\dot{y}+6y=u\ .$$

Sistemul are funcția de transfer

$$G(s)=\frac{1}{s^2+5s+6}=\frac{1}{(s+2)(s+3)}\ ,$$

cu ambii poli negativi, deci este este extern strict stabil.

In concluzie, sistemul este extern strict stabil pentru $m\in(-\infty,0]\cup\{1\}$ şi extern instabil pentru $m\in(0,\infty)-\{1\}$.

♦ **Aplicația 6.12.** Să se studieze stabilitatea internă şi externă a sistemului continuu

$$m\dddot{y}+(m+1)\ddot{y}+(3m+1)\dot{y}+3y=-\dot{u}+u\ ,\quad m\in\mathbf{R}\ .$$

Soluție. Polinomul caracteristic

$$\mathcal{P}(s)=ms^3+(m+1)s^2+(3m+1)s+3$$

are toți coeficienții pozitivi pentru $m>0$ şi minorul

$$\Delta_2=a_1a_2-a_0a_3=(3m+1)(m+1)-3m=3m^2+m+1$$

pozitiv pentru orice m real. Pentru $m=0$, polinomul caracteristic devine $\mathcal{P}(s)=s^2+s+3$ şi are ambele rădăcini cu partea reală negativă. In consecință, sistemul este intern strict stabil dacă şi numai dacă $m\geq 0$. Pentru $m<0$, sistemul este intern instabil.

Sistemul are funcția de transfer

$$G(s)=\frac{-s+1}{ms^3+(m+1)s^2+(3m+1)s+3}\ .$$

Funcția de transfer este reductibilă în cazul $m+(m+1)+(3m+1)+3=0$, adică pentru $m=-1$. In acest caz

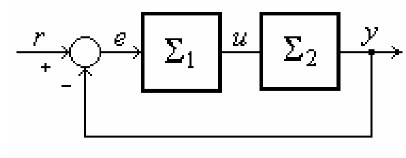
$$G(s)=\frac{1-s}{(1-s)(s^2+s+3)}=\frac{1}{s^2+s+3}\ .$$

Deoarece polinomul polilor $p(s)=s^2+s+3$ are ambele rădăcini cu partea reală negativă, sistemul este extern strict stabil. Pentru $m\neq -1$, sistemul are polinomul polilor identic cu polinomul caracteristic. Prin urmare, sistemul este extern strict stabil pentru $m\in[0,\infty)\cup\{-1\}$. Pentru $m\in(-\infty,0)-\{-1\}$, sistemul este extern instabil.

♦ **Aplicația 6.13.** Considerăm conexiunea cu reacție de mai jos, în care:

$$u = k(e + \frac{1}{2}\int_0^t e\mathrm{d}t)\,, \quad k > 0$$

$$24\ddot{y} + 10\dot{y} + y = u\,.$$



Să se studieze stabilitatea sistemului.

Soluție. Prin eliminarea variabilei u între cele două ecuații, obținem ecuația conexiunii serie a celor două subsisteme:

$$24\dddot{y} + 10\ddot{y} + \dot{y} = k(\dot{e} + \frac{e}{2})\,.$$

Mai departe, înlocuind variabila e cu $r - y$, obținem ecuația intrare – ieşire a sistemului, sub forma

$$48\dddot{y} + 20\ddot{y} + 2(k+1)\dot{y} + ky = k(2\dot{r} + r)\,.$$

Din ecuația sistemului rezultă funcția de transfer

$$G(s) = \frac{k(2s+1)}{48s^3 + 20s^2 + 2(k+1)s + k}\,.$$

Deoarece funcția de transfer este ireductibilă (rădăcina numărătorului $s = -1/2$ nu este şi rădăcină a numitorului), sistemul are polinomul polilor

$$p(s) = 48s^3 + 20s^2 + 2(k+1)s + k\,.$$

Polinomul polilor are are toți coeficienții pozitivi, iar minorul

$$\Delta_2 = a_1a_2 - a_0a_3 = 40(k+1) - 48k = 8(5-k)$$

este pozitiv pentru $k < 5$. Prin urmare, conform criteriului de stabilitate Hurwitz, sistemul este extern strict stabil pentru $k < 5$ şi extern instabil pentru $k > 5$. In figura 6.1 este prezentat răspunsul sistemului la o variație treaptă unitară a referinței r, pentru trei valori diferite ale parametrului k ($k = 0{,}1$; $k = 1$; $k = 7$).

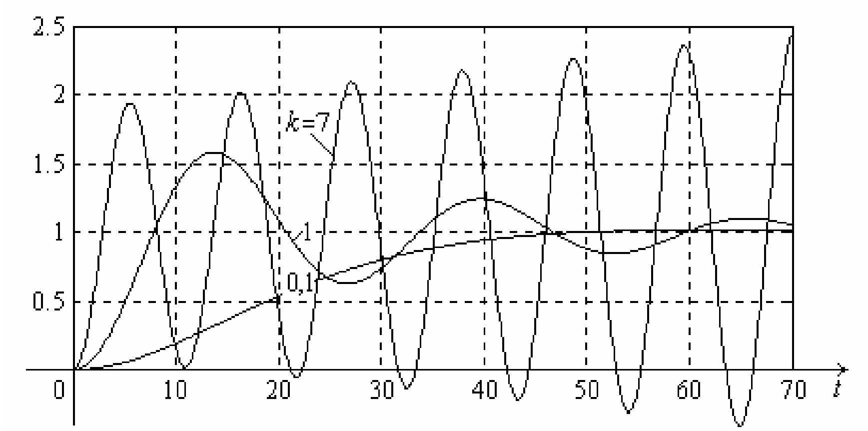


Fig. 6.1. *Răspunsul* $y(t)$ *al sistemuluicu reacție la intrare treaptă unitară.*

♦ **Aplicația 6.14.** Să se studieze stabilitatea sistemului discret

$$10y(t)+17y(t-1)+8y(t-2)+my(t-3)=u(t-1)+u(t-2)\,,\quad m\in\mathbf{R}\,.$$

Soluție. Sistemul are polinomul caracteristic

$$\mathcal{P}(z)=10z^3+17z^2+8z+m\,.$$

Ecuația $\mathcal{P}(\frac{s+1}{s-1})=0$, are forma

$$(35+m)s^3+(39-3m)s^2+(5+3m)s+1-m=0\,.$$

Coeficienții polinomului din membrul stâng sunt pozitivi pentru $-\frac{5}{3}<m<1$. Impunând şi condiția

$$\Delta_2=(5+3m)(39-3m)-(35+m)(1-m)=-8m^2+136m+160>0\,,$$

rezultă că sistemul discret este intern strict stabil pentru $m_0<m<1$, unde $m_0\cong-1{,}105$.

Sistemul are funcția de transfer

$$G(z)=\frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{10+17z^{-1}+8z^{-2}+mz^{-3}}=\frac{z(z+1)}{10z^3+17z^2+8z+m}\,.$$

Funcția de transfer este reductibilă în cazurile $m=0$ şi $m=1$. In cazul $m=0$, sistemul este intern strict stabil, deci este şi extern strict stabil. In cazul $m=1$, avem

$$G(z)=\frac{z(z+1)}{(z+1)(10z^2+7z+1)}=\frac{z}{10z^2+7z+1}=\frac{z}{(2z+1)(5z+1)}\,.$$

Deoarece polii $z_1=\frac{-1}{2}$ şi $z_2=\frac{-1}{5}$ au modulul subunitar, sistemul este extern strict stabil. Pentru $m\neq0$ şi $m\neq1$, polinomul polilor coincide cu polinomul caracteristic $\mathcal{P}(z)$. In concluzie, sistemul este extern strict stabil pentru $m_0<m\leq1$. In figura 6.2 este prezentat răspunsul sistemului la o variație treaptă unitară a mărimii de intrare, pentru două valori diferite ale lui k ($k=0{,}5$ şi $k=1{,}4$).

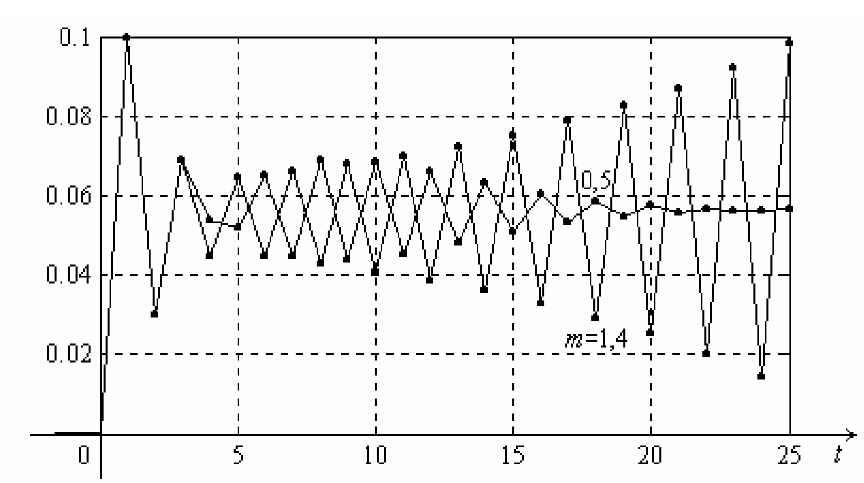


Fig. 6.2. *Răspunsul* $y(t)$ *al sistemului discret la intrare treaptă unitară.*

7

PRINCIPIILE REGLARII AUTOMATE

Mărimile de intrare ale unui proces condus pot fi împărţite în *comenzi* şi *perturbaţii***.** Prin intermediul comenzilor se poate interveni asupra procesului, pentru ca acesta să evolueze după o traiectorie dorită, în condiţiile acţiunii arbitrare a perturbaţiilor.

Modelul I-S-E al unui proces continuu staţionar strict propriu, cu comenzi şi perturbaţii, are forma

$$\begin{cases} \dot{X} = f(X, U, V_1, V_2) \\ Y = g(X) \end{cases}, \tag{1}$$

unde U este intrarea de comandă, V_1 perturbaţia măsurată, V_2 perturbaţia nemăsurată, Y mărimea de ieşire, X mărimea de stare, iar f şi g sunt funcţii continue în raport cu toate variabilele. In cazul liniar, modelul are forma:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU + G_1V_1 + G_2V_2 \\ Y = CX \end{cases}. \tag{2}$$

7.1. PROBLEMA REGLARII

Reglarea este operaţia de menţinere a mărimii de ieşire a procesului la o valoare cât mai apropiată de cea a unei mărimi de referinţă, în condiţiile modificării în timp a mărimii de referinţă şi a acţiunii perturbaţiilor asupra procesului reglat.

Problema reglării (*sintezei*) constă în elaborarea unei comenzi convenabile $U(t)$ asupra procesului reglat **P** (fig. 7.1), astfel încât mărimea de ieşire a procesului $Y(t)$ să urmărească cât mai bine o mărime de referinţă $R(t)$ dată, în condiţiile acţiunii perturbaţiilor $V_1(t)$ şi $V_2(t)$ asupra procesului. Comanda $U(t)$ este elaborată de elementul decizional (de comandă) **C,** numit *compensator* sau *regulator*, după un algoritm adecvat (lege, formulă), pe baza valorii curente a mărimii reglate Y, a referinţei R şi a perturbaţiei măsurate V_1.

Compensatorul **C** poate îndeplini şi alte funcţii speciale (de identificare a procesului **P**, de optimizare etc.).

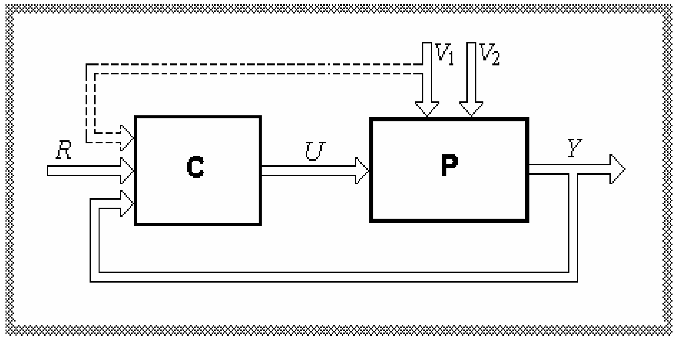


Fig. 7.1. *Schema de reglare a procesului* **P**.

Sistemul de reglare realizează, în cazul *ideal*, condiţia de reglare

$$Y(t) \equiv R(t) ,$$

oricare ar fi intrarea de referinţă $R(t)$ şi perturbaţiile $V_1(t)$ şi $V_2(t)$ din clasa funcţiilor de intrare admise. Problema reglării poate fi descompusă, pe baza principiului superpoziţiei, în *problema rejecţiei efectului perturbaţiilor* şi *problema urmăririi referinţei*.

Problema *rejecţiei exacte* a efectului perturbaţiei $V_1(t)$ exprimă cerinţa ideală ca în ipoteza $R(t) \equiv 0$ şi $V_2(t) \equiv 0$, să avem $Y(t) \equiv 0$ oricare ar fi $V_1(t)$. Problema *urmăririi exacte* exprimă cerinţa ideală ca în ipoteza $V_1(t) \equiv 0$ şi $V_2(t) \equiv 0$, să avem $Y(t) \equiv R(t)$ oricare ar fi $R(t)$. Principial, problema urmăririi exacte poate fi redusă la problema rejecţiei exacte. Astfel, prin înlocuirea ieşirii Y cu ieşirea $Z = Y - R$, problema urmăririi exacte se transformă în problema rejecţiei exacte a efectului intrării $R(t)$ asupra ieşirii $Z(t)$.

In aplicaţiile practice, problema reglării trebuie *relaxată*, în sensul înlocuirii condiţiei rigide ca mărimea reglată Y să urmărească exact mărimea de referinţă R, cu condiţia ca Y să urmărească pe R cu un anumit grad de precizie.

In *regim staţionar*, gradul de precizie este dat de *eroarea staţionară*

$$E_{st} = \lim_{t \to \infty} [R(t) - Y(t)] , \qquad (3)$$

corespunzătoare anumitor funcţii de intrare $R(t)$ şi $V_1(t)$ date, de tip *persistent* (care nu tind la zero atunci cînd $t \to \infty$). Funcţia treaptă unitară $1(t)$ şi funcţia rampă unitară $t \cdot 1(t)$ sunt funcţii persistente, în timp ce funcţia impuls Dirac $\delta_0(t)$, funcţia exponenţială $e^{-t} \cdot 1(t)$ şi funcţia trigonometrică $\sin 2t \cdot 1(t)$ sunt exemple de funcţii nepersistente.

In *regim dinamic*, gradul de precizie poate fi exprimat, de exemplu, prin valoarea integralei

$$\boldsymbol{J} = \int_0^\infty \left\| R(t) - Y(t) \right\|^2 \mathrm{d}t\,, \tag{4}$$

corespunzătoare unor funcții de intrare $R(t)$ şi $V(t)$ date, nu neapărat persistente. In proiectare, se impune fie minimizarea indicatorului de calitate $\boldsymbol{J}$ în raport cu structura şi parametrii compensatorului, fie limitarea superioară a acestuia, printr-o condiție de forma $\boldsymbol{J} \le \boldsymbol{J}_{\text{sup}}$.

Sistemele de reglare pot funcționa pe baza *principiului acțiunii după cauză* sau pe baza *principiului acțiunii după efect* (*eroare*, *abatere*). Sistemele cu reglare după cauză se mai numesc sisteme cu *acțiune directă* (cu *precompensare* sau cu "*feedforward*"), iar sistemele cu reglare după efect se numesc sisteme cu *acțiune inversă* (cu *reacție* sau cu *"feedback*").

7.2. PRINCIPIUL REGLARII DUPA CAUZA

Principiul reglării (*acțiunii*) *după cauză* presupune intervenția asupra procesului reglat numai pe baza valorilor curente ale intrării perturbatoare şi intrării de referință.

Conform *principiului reglării după perturbație*, se evaluează valoarea curentă a perturbației, se estimează efectul acesteia asupra mărimii de ieşire a procesului (mărimii reglate) şi se intervine convenabil asupra procesului în scopul compensării efectului produs de perturbație. Deoarece acțiunea compensatorului are loc în paralel şi simultan cu acțiunea directă a perturbației, sistemul de reglare poate *să prevină modificarea mărimii reglate* de către perturbația respectivă. Pentru realizarea reglării ideale (care presupune menținerea neschimbată a mărimii reglate în condițiile variației arbitrare a mărimii perturbatoare) este necesară *cunoaşterea exactă a modelului dinamic* al procesului reglat. Chiar şi în acest caz, efectul perturbațiilor nemăsurate rămîne în totalitate necompensat, ceea ce constituie un mare dezavantaj al reglării după perturbație.

Conform *principiului reglării după referință*, se evaluează valoarea curentă a referinței şi se intervine convenabil asupra procesului în scopul aducerii mărimii de ieşire a procesului (mărimii reglate) la valoarea mărimii de referință. Comparația mărimii reglate cu mărimea de referință, în condițiile în care aceste mărimi sunt de natură fizică diferită (de exemplu, mărimea reglată este temperatura unui lichid, iar mărimea de referință este semnal unificat 4…20 mA), este posibilă prin folosirea exprimării procentuale a valorilor celor două mărimi. Ca şi în cazul precedent, realizarea unei reglări de bună calitate este posibilă numai în condițiile cunoaşterii foarte exacte a modelului procesului reglat. In plus, reglarea este eficientă numai în lipsa acțiunii perturbațiilor asupra procesului reglat.

La reglarea după perturbație se urmărește menținerea constantă a mărimii de ieșire a procesului, iar la reglarea după referință se urmărește aducerea mărimii reglate la o valoare apropiată de cea a referinței.

Sistemele de reglare după cauză (după perturbație și după referință) sunt sisteme cu structură deschisă (fig. 7.2), deoarece compensatorul nu primește informație referitoare la valoarea mărimii reglate, deci la efectul acțiunii sale asupra procesului reglat. In consecință, compensatorul nu poate efectua acțiuni de autocorecție, iar aplicațiile practice bazate numai pe principiul reglării după cauză nu pot fi realizate în condiții bune de precizie și robustețe. Sistemele automate de reglare după cauză sunt eficiente numai în corelație cu sistemele de reglare după efect.

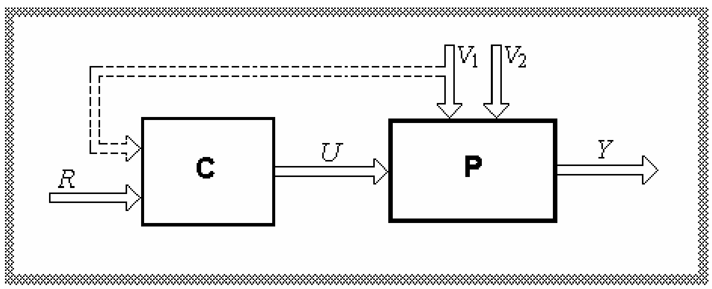


Fig. 7.2. *Sistem de reglare automată după perturbație și referință.*

Modelul I-S-E al compensatorului liniar **C** care realizează *reglarea dinamică* după perturbația V_1 și după referința R (fig. 7.2), are forma I-S-E

$$\begin{cases} \dot{X} = A_1 X + B_1 V_1 + B_2 R \\ U = C_1 X + D_1 V_1 + D_2 R \end{cases}, \tag{5}$$

unde X reprezintă starea curentă a compensatorului.

Dacă se urmărește numai *reglarea staționară* (în regim staționar) după perturbația V_1 și după referința R, atunci compensatorul **C** este de *tip static*, cu modelul liniar de forma

$$U = K_1 R + K_2 V_1 . \tag{6}$$

Considerând procesul **P** liniar, cu modelul staționar

$$Y = K_{P1} U + K_{P2} V_1 , \tag{7}$$

parametrii K_1 și K_2 ai compensatorului sunt dați de relațiile

$$K_1 = K_{P1}^{-1}, \quad K_2 = -K_{P1}^{-1} K_{P2} . \tag{8}$$

In cazul reglării perfecte *după perturbație* cu compensator static, efectul perturbator produs de o variație treaptă a perturbației măsurate asupra mărimii reglate este integral eliminat la încheierea regimului tranzitoriu, în condițiile proiectării perfecte (ideale) a compensatorului (fig. 7.3, B). Forma de variație a mărimii reglate în timpul regimului tranzitoriu este determinată de caracteristicile dinamice ale celor două canale ale procesului prin care se propagă efectul perturbator şi efectul comenzii. In cazul reglării perfecte cu compensator dinamic, efectul perturbator este eliminat în întregime pe toată durata regimului tranzitoriu (fig. 7.3, C). Sinteza compensatorului dinamic este o operație mult mai dificilă, care necesită cunoaşterea modelului dinamic al procesului **P**. De remarcat faptul că există procese la care efectul perturbator nu poate fi perfect compensat, oricum am alege structura şi parametrii compensatorului. Un exemplu în acest sens este procesul cu timp mort, la care timpul mort al canalului perturbator este mai mic decât timpul mort al canalului de comandă.

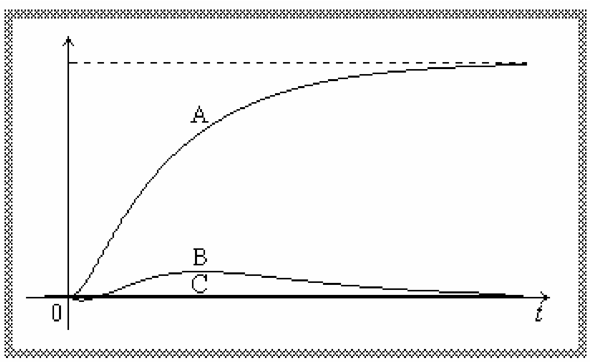


Fig. 7.3. *Variația în timp a ieşirii procesului la modificarea treaptă a perturbației*:
A - în lipsa reglării; *B - la reglarea perfectă după perturbație cu compensator static*;
C - la reglarea perfectă după perturbație cu compensator dinamic.

In cazul reglării perfecte *după referință* cu compensator static, pentru o variație treaptă a referinței şi în lipsa acțiunii perturbațiilor, mărimea reglată este adusă la încheierea regimului tranzitoriu exact la noua valoare a referinței (fig. 7.4, Y_1). Forma de variație a mărimii reglate în timpul regimului tranzitoriu este determinată de caracteristicile dinamice ale canalului procesului prin care se propagă efectul comenzii. In cazul reglării cu compensator dinamic, mărimea reglată este adusă la valoarea mărimii de referință într-un timp mult mai scurt (fig. 7.4, Y_2). Teoretic, prin alegerea adecvată a structurii şi parametrilor compensatorului dinamic, timpul de răspuns poate fi făcut oricât de mic în cazul proceselor fără timp mort. Reducerea timpului de răspuns implică însă generarea unui semnal de comandă de mare intensitate, a cărui formă se apropie de cea a impulsului Dirac. In aplicațiile practice nu se utilizează asemenea semnale de comandă, pentru a se evita uzura şi consumul exagerat de combustibil şi energie.

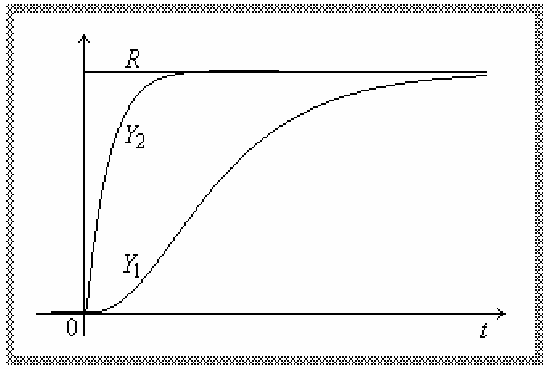


Fig. 7.4. *Variația în timp a ieşirii procesului la modificarea treaptă a referinței R*:

Y_1 *- la reglarea perfectă după referință cu compensator static*;

Y_2 *- la reglarea după referință cu compensator dinamic.*

7.2. PRINCIPIUL REGLARII DUPA EFECT

Principiul reglării (*acțiunii*) *după efect* presupune intervenția asupra procesului reglat, pe baza informației obținute prin măsurarea mărimii de ieşire a procesului (mărimii reglate), în scopul menținerii mărimii reglate la o valoare cât mai apropiată de valoarea referinței, în condițiile acțiunii perturbațiilor asupra procesului şi ale variației în timp a referinței. La sistemele cu acțiune după efect, *apariția erorii* (diferenței între mărimea reglată şi mărimea de referință) *nu poate fi prevenită*, dar acțiunea de reducere a acesteia începe din momentul producerii celei mai mici erori sesizabile, *indiferent de cauza care a provocat eroarea*.

Modelul I-S-E al compensatorului liniar **C** care realizează urmărirea referinței R de către mărimea reglată Y (fig. 7.1), are forma

$$\begin{cases} \dot{X} = A_1X + B_1E \\ U = C_1X + D_1E \end{cases}, \tag{9}$$

unde $E = R - Y$ reprezintă eroare de reglare, iar X starea curentă a compensatorului. In unele cazuri, în locul algoritmului cu un grad de libertate (9), se utilizează algoritmul cu două grade de libertate

$$\begin{cases} \dot{X} = A_1X + B_1Y + B_2R \\ U = C_1X + D_1Y + D_2R \end{cases}. \tag{10}$$

Un compensator liniar care utilizează ambele principii de reglare - după perturbaţie şi după eroare, are modelul I-S-E sub forma

$$\begin{cases} \dot{X} = A_1 X + B_1 Y + B_2 R + B_3 V_1 \\ U = C_1 X + D_1 Y + D_2 R + D_3 V_1 \end{cases} . \qquad (11)$$

Omul, cel mai evoluat sistem cunoscut, utilizează în mod curent cele două principii ale reglării. In plus, majoritatea procesele interne specifice corpului viu se desfăşoară în strânsă corelaţie cu aceste principii.

In figura 7.5 este prezentată schema practică a unui sistem monovariabil *de reglare automată după eroare* (*abatere*). Dispozitivul de reglare a procesului **P** este compus din traductorul **T**, regulatorul **R** (ccare include şi elementul de comparaţie) şi elementul de execuţie **E**, care îndeplinesc respectiv funcţiile de *măsurare*, de *comandă* şi de *execuţie*.

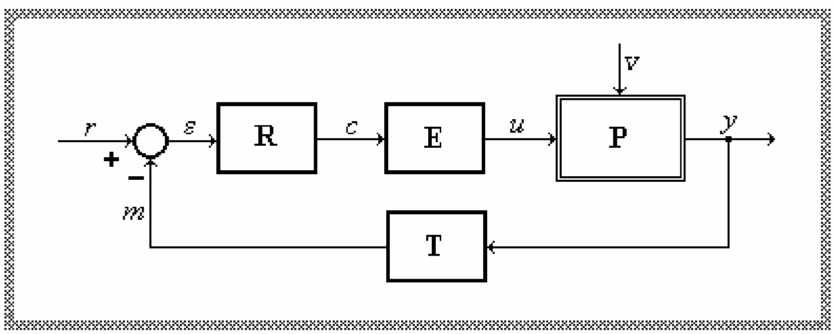


Fig. 7.5. *Sistem de reglare automată după eroare.*

Regulatoarele clasice (convenţionale) generează comanda c prin prelucrarea erorii curente $\varepsilon = r - m$ (r - semnal de **r**eferinţă sau “set-point”; m - semnal de **m**ăsură sau de reacţie) după cunoscutul *algoritm de reglare* **PID** (de tip proporţional-integral-derivativ). In majoritatea cazurilor, algoritmul continuu PID este utilizat sub următoarea formă idealizată:

$$c(t) = K_R[\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t \varepsilon(t)\mathrm{d}t + T_d \frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}] + c_0, \quad \varepsilon = r - m \qquad (12)$$

în care K_R, T_i şi T_d sunt parametri de acordare (K_R - factorul de proporţionalitate, T_i - constanta de timp integrală, T_d - constanta de timp derivativă). Dacă sistemul de reglare se află la momentul iniţial $t = 0$ în regim staţionar, cu eroarea zero, atunci c_0 reprezintă chiar valoarea iniţială a comenzii. Intre factorul de proporţionalitate K_R şi banda de proporţionalitate B_R (cu care se operează frecvent în practică) există relaţia $K_R = 100/B_R$. In forma (12) a algoritmului de reglare, factorul de proporționalitate K_R influențează în mod egal toate cele trei componente ale comenzii.

In realizarea unei reglări performante, un rol important îl au valorile celor trei parametri de acordare, care determină intensitatea şi forma de variație în timp a comenzii la modificarea referinței şi la acțiunea perturbațiilor asupra procesului. Valorile optime ale parametrilor de acordare sunt dependente de caracteristicile dinamice ale procesului reglat.

Componenta proporțională **P** are expresia

$$c_P(t) = K_R \varepsilon(t) + c_0 .$$

Această componentă constituie, în majoritatea cazurilor practice de reglare, componenta principală a comenzii. Ea este proporțională cu valoarea curentă a erorii, generând un efect care se opune creşterii erorii, dar şi scăderii acesteia, cu atât mai puternic, cu cât factorul de proporționalitate K_R este mai mare. Componenta proporțională reduce eroarea produsă prin acțiunea perturbațiilor sau prin modificarea referinței, dar nu reuşeşte, de regulă, să anuleze eroarea staționară (finală). Acest neajuns se datoreşte faptului că la eroare nulă, valoarea componentei proporționale este întotdeauna egală cu c_0. Valoarea erorii staționare este însă cu atât mai mică cu cât factorul de proporționalitate K_R este mai mare. Pentru compensarea efectului produs asupra mărimii reglate de o perturbație tip treaptă, valoarea finală a comenzii trebuie să fie, de regulă, diferită de valoarea inițială. Dar variația comenzii Δc_P este realizabilă numai pe baza variației erorii $\Delta\varepsilon$, după relația $\Delta c_P = K_R \cdot \Delta\varepsilon$. Pentru o variație dată a comenzii Δc_P, variația erorii $\Delta\varepsilon$ este invers proporțională cu factorul de proporționalitate K_R.

Componenta integrală **I** are expresia

$$c_I = \frac{K_R}{T_i}\int_0^t \varepsilon \,\mathrm{d}t + c_0 .$$

Această componentă este proporțională cu integrala erorii. Ea are caracter „persistent”, în sensul că nu-şi încetează acțiunea decât atunci când eroarea redevine zero. In consecință, rolul principal al componentei integrale este acela de anulare a erorii, deci de aducere a semnalului de măsură la valoarea semnalului de referință.Din acest punct de vedere, componenta integrală este complementară componentei proporționale. La reducerea erorii, componenta integrală îşi reduce intensitatea, dar sensul de acțiune rămâne orientat tot spre reducerea erorii. Prin urmare, componenta integrală nu generează efect de opoziție, aşa cum face componenta proporțională.

Componenta derivativă **D** are expresia

$$c_D = K_R T_d \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}.$$

Această componentă este proporțională cu viteza de variație a erorii. Ea are caracter „anticipativ”, care rezultă din faptul că semnul şi valoarea vitezei de variație a erorii la un anumit moment de timp *anticipă* evoluția ulterioară a erorii (în sensul că aceasta va rămâne constantă la viteză nulă, va creşte la viteză pozitivă şi va scădea la viteză negativă). Ca şi componenta proporțională, componenta derivativă se opune atât creşterii, cât şi scăderii erorii. In general, componenta derivativă poate contribui la îmbunătățirea stabilității şi calității operației de reglare. In anumite situații însă, introducerea componentei derivative poate înrăutăți stabilitatea şi robustețea reglării (de exemplu, în cazul în care zgomotul de măsurare este relativ mare).

Datorită componentei derivative, regulatorul PID este un sistem impropriu. In realitate, componentei derivative i se asociază o constantă de întârziere τ_d. In acest caz, algoritmul PID are forma

$$\begin{cases} \tau_d \dfrac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} + D = T_d \dfrac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} \\ c = K_R(\varepsilon + \dfrac{1}{T_i}\displaystyle\int_0^t \varepsilon \mathrm{d}t + D) \end{cases}. \tag{13}$$

La modificarea treaptă a referinței sau a măsurii, deci a erorii, componenta derivativă este la momentul inițial $t = 0_+$ de k_d ori mai mare decât componenta proporțională, unde $k_d = T_d / \tau_d$. In timp ce componenta proporțională rămâne însă constantă, componenta derivativă descreşte exponențial şi se anulează după un timp egal cu circa $(3 \cdots 4)\tau_d$. In aplicațiile practice, raportul derivativ k_d se alege în gama $2 \cdots 10$.

In cazul *regulatoarelor numerice*, algoritmul de reglare **PI** are forma *intrare-stare-ieşire*

$$\begin{cases} I_k = I_{k-1} + \dfrac{T}{T_i}\varepsilon_k \\ c_k = K_R(\varepsilon_k + I_k) + c_0 \end{cases} \tag{14}$$

şi forma *intrare-ieşire*

$$c_k = c_{k-1} + K_R[(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}) + \frac{T}{T_i}\varepsilon_k], \tag{15}$$

unde T reprezintă perioada de eşantionare, iar c_0 este valoarea comenzii în momentul comutării regulatorului din regim MANUAL (cu eroarea nulă şi comanda c constantă, egală cu c_0) în regim AUTOMAT (cu comanda c generată pe baza algoritmului de reglare).

Algoritmul numeric **PID** poate fi scris sub forma

$$\begin{cases} D_k = p_d D_{k-1} + K_R k_d (\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}) \\ (PI)_k = (PI)_{k-1} + K_R[(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}) + \dfrac{T}{T_i}\varepsilon_k] \\ c_k = (PI)_k + D_k + c_0 \end{cases} , \tag{16}$$

unde $k_d = \dfrac{T_d}{\tau_d}$ şi $p_d = \mathrm{e}^{-T/\tau_d} \cong 1/(1 + x + x^2/2)$, cu $x = T/\tau_d$.

Pe durata intervalului de eşantionare care urmează unei modificări treaptă a referinței sau a măsurii (deci a erorii), componenta derivativă este de k_d ori mai mare decât componenta proporțională.

In cazul algoritmilor de reglare (15) şi (16), modificarea unui parametru de acordare în timpul regimului AUTOMAT se realizează „fără şoc”, adică fără a produce o variație bruscă a semnalului de comandă. In schimb, la algoritmul de reglare (14), modificarea factorului de proporționalitate K_R produce, în lipsa altor măsuri speciale, o variație bruscă a comenzii.

Pentru ca operația de schimbare a regimului de lucru din MANUAL în AUTOMAT să se realizeze „fără şoc”, operația de comutare MANUAL-AUTOMAT trebuie precedată de o operație de inițializare convenabilă a variabilelor algoritmului de reglare. La algoritmul (16), operația de inițializare constă în inițializarea variabilei ε_{k-1} la valoarea curentă a erorii, a variabilelor D_{k-1} şi $(PI)_{k-1}$ la valoarea zero, iar a variabilei c_0 la valoarea curentă a comenzii. In aceste condiții, prima valoare a comenzii generate pe AUTOMAT (la pasul $k=1$), va avea valoarea

$$c_1 = K_R \frac{T}{T_i} \cdot \varepsilon_1 + c_0 \cong c_0 . \tag{17}$$

Dacă însă variabila ε_{k-1} este inițializată la valoarea zero, atunci

$$c_1 = K_R (1 + \frac{T}{T_i} + \frac{T_d}{\tau_d}) \varepsilon_1 + c_0 . \tag{18}$$

In acest ultim caz, toate cele trei componente ale comenzii acționează din primul moment pentru reducerea erorii, exact ca în cazul în care eroarea s-ar fi modificat brusc, de la valoarea zero la valoarea curentă.

Prin utilizarea algoritmului de reglare cu două grade de libertate

$$\begin{cases} D_k = p_d D_{k-1} - K_R k_d (m_k - m_{k-1}) \\ (PI)_k = (PI)_{k-1} + K_R [(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}) + \dfrac{T}{T_i} \varepsilon_k] \\ c_k = (PI)_k + D_k + c_0 \end{cases} , \tag{19}$$

acțiunea componentei derivative are loc numai la variația semnalului de măsură *m*, nu şi la variația referinței *r*. Algoritmul are două grade de libertate, deoarece modul de procesare a semnalului de referință r este diferit de modul de procesare a semnalului de măsură m.